Глава II

Числовые системы и приближенные вычисления

§ 1. Действия с приближенными числами

1. Приближенные числа

В большинстве случаев при измерениях, вычислениях, при выполнении операций над действительными числами получают не точные, а приближенные значения величин. Числа, выражающие точное и приближенное значение величины, мы будем для краткости называть соответственно точными и приближенными числами.

Приближенное число есть такое число, которое отличается от точного на погрешность (ошибку), допущенную в соответствии с условиями данной задачи, и заменяет точное число в расчетной формуле. Арифметические действия с приближенными числами следует производить также приближенно, ограничиваясь той степенью точности, которая необходима для данной задачи.

А. Н. Крылов, создатель теории приближенных вычислений, говорил: «При производстве всяких численных вычислений надо руководствоваться правилом: точность вычислений должна соответствовать точности данных и той практической потребности, для которой вычисления производятся». Ему же принадлежат слова: «Помните, что каждая неверная цифра — это ошибка, всякая лишняя цифра — это пол-ошибки».

Приближенные числа появляются в результате погрешностей исходных данных (результатов измерений, различных коэффициентов, технологических данных и т. п.). Это неустранимые погрешности, они не зависят от метода решения задач. Подобным же образом сказывается неточность формул, методов, моделей. В частности, экономико-математические модели как по точности коэффициентов уравнений и неравенств, так и по своей полноте обычно лишь приближенно отражают действительные условия. Возникают приближенные числа и из-за погрешностей округлений в процессе самого счета. Это устранимые погрешности, для исправления которых промежуточные результаты следует записывать с дополнительными (сомнительными) знаками.

При действиях с приближенными числами необходимо учитывать точность, с которой можно получить значения искомых величин, и точность, с которой их необходимо знать.

2. Абсолютная погрешность

Точные значения искомых величин будем обозначать буквами a_0, b_0, c_0... и т. д. (с индексом 0). На практике часто получают не точные, а приближенные значения величин, которые будем обозначать a_1, a_2, a_3, ... и т. д. (индексы — номер измерения).

Если a_0 — точное число, а a — его приближенное значение, то $a \approx a_0$.

Не все приближенные числа обладают одинаковой близостью к точному числу. Для оценки точности приближенного числа рассматривают разность $a - a_0$ между истинным и приближенным значением числа, которая называется *истинной погрешностью.* Истинная погрешность приближенного значения числа может быть как положительной, так и отрицательной.

Абсолютная величина разности между точным и приближенным значением числа, т. е. $\Delta = |a - a_0|$, называется *истинной абсолютной погрешностью* этого числа.

1. Найти истинную абсолютную погрешность числа $a_0 = 245{,}2$, если $a = 246$.

Решение. Имеем $|a - a_0| = |245{,}2 - 246| = 0{,}8$.

2—9. Найти истинные абсолютные погрешности чисел:

2. $a_0 = 348$; $a = 347{,}289$.
3. $a_0 = 64{,}28$; $a = 64{,}32$.
4. $a_0 = 14{,}262$; $a = 14{,}261983$.
5. $a_0 = 0{,}135$; $a = 0{,}13512$.
6. $a_0 = 12\,487\,856$; $a = 12\,400\,000$.
7. $a_0 = 3{,}528$; $a = 3{,}5281$.
8. $a_0 = 854\,000$; $a = 853\,997$.
9. $a_0 = 647\,398$; $a = 647\,500$.

Истинная абсолютная погрешность всегда измеряется в тех же величинах, что и рассматриваемая величина.

Так как истинное или точное число чаще всего неизвестно, то разность $|a - a_0|$ найти трудно, но можно указать положительное число Δa, удовлетворяющее неравенству $|a - a_0| \leqslant \Delta a$ или $a - \Delta a \leqslant a_0 \leqslant a + \Delta a$.

Число Δa будем называть *границей абсолютной погрешности*. Если задана граница абсолютной погрешности Δa, то говорят, что число a есть приближенное значение числа a_0 с точностью до Δa, и пишут $a_0 = a \pm \Delta a$. Отсюда следует, что $a - \Delta a \leqslant a_0 \leqslant a + \Delta a$.

10. Записать число $a_0 = 9{,}3 \pm 0{,}5$ с помощью двойного неравенства.

Решение. $9{,}3 - 0{,}5 \leqslant a_0 \leqslant 9{,}3 + 0{,}5$; $8{,}8 \leqslant a_0 \leqslant 9{,}8$.

11—18. Записать числа в виде двойного неравенства:

11. $a_0 = 347{,}50$; $\Delta a = 0{,}0047$.
12. $a_0 = 0{,}3010$; $\Delta a = 0{,}00005$.
13. $a_0 = 7{,}269$; $\Delta a = 0{,}0004$.
14. $a_0 = 142\,170$; $\Delta a = 30$.
15. $a_0 = 420\,000$; $\Delta a = 500$.
16. $a_0 = 7{,}263$; $\Delta a = 0{,}00001$.
17. $a_0 = 0{,}1628$; $\Delta a = 0{,}0002$.
18. $a_0 = 99{,}973$; $\Delta a = 0{,}027$.

В математике имеется ряд практических методов для оценки точности вычислений, в том числе и обязательные правила составления таблиц и проведения измерений.

Так, абсолютная погрешность числа, взятого из математической таблицы, не превосходит единицы последнего разряда; при физических измерениях не очень большой точности погрешность измерения определяется по наименьшему делению прибора.

При выполнении расчетов с помощью приближенных чисел чаще всего бывает нецелесообразно сохранять большое число знаков.

3. Запись приближенных чисел

Определение. Некоторая цифра приближенного числа считается *верной*, если его абсолютная погрешность Δa не превосходит единицы того разряда, в котором стоит эта цифра. В противном случае цифра называется *сомнительной*.

Очевидно, что если какая-либо цифра верна, то и все предшествующие ей цифры также являются верными.

19. Найти верные и сомнительные цифры числа $a = 945{,}673 \pm 0{,}03$.

Решение. Здесь $a = 945{,}673$, $\Delta a = 0{,}03$. Цифра 6 представляет собой цифру десятых долей, т. е. единицу этого разряда запишем так: 0,1. Сравним эту единицу с погрешностью числа; так как $0{,}1 > 0{,}03$, то абсолютная погрешность числа не превосходит (в данном случае меньше) единицы разряда, в котором стоит цифра 6. Следовательно, по определению, цифра 6 — верная. Очевидно, что цифры 9, 4, 5, стоящие перед цифрой 6, также являются верными.

Цифра 7 — это цифра сотых долей, т. е. единицу этого разряда можно записать так: 0,01. Сравним эту единицу с погрешностью числа; поскольку $0{,}01 < 0{,}03$, абсолютная погрешность числа больше единицы разряда, в котором стоит цифра 7. Следовательно, по определению, цифра 7 — сомнительная. Очевидно, что цифра 3 также является сомнительной.

20—31. Определить верные и сомнительные цифры чисел:

20. $a=649\pm0{,}04$. **21.** $a=14{,}28\pm0{,}03$. **22.** $a=1{,}298\pm$ $\pm0{,}003$.

23. $a=428{,}735\pm$ ±6. **24.** $a=24{,}68\pm0{,}05$. **25.** $a=749{,}3\pm5$.

26. $a=1428\pm$ $\pm0{,}05$. **27.** $a=729{,}5\pm1$. **28.** $a=4{,}289\pm$ $\pm0{,}2$.

29. $a=679{,}3\pm$ $\pm0{,}06$. **30.** $a=428{,}7\pm20$. **31.** $a=64{,}28\pm5$.

В записи приближенных чисел принято соблюдать следующие правила:

I. *Оставлять в записи приближенного числа только верные цифры.*

II. *Если в десятичной дроби последние верные цифры нули, то их надо выписать.*

III. *Если число содержит в конце нули, не являющиеся верными цифрами, то они должны быть заменены на* 10^n, *где* n — *число нулей, которое надо заменить.*

32. Записать правильно число: а) $a=0{,}075\pm0{,}000005$; б) $a=746\,000\,000\pm5000$.

Решение. а) Так как погрешность числа не превосходит 0,00001, то число должно быть записано в виде $a=0{,}07500$.

б) Здесь первой верной цифрой является цифра десятков тысяч, поскольку погрешность числа не превосходит 10 000. Значит, число должно быть записано в виде $a=74\,600\cdot10^4$.

33—40. Записать правильно следующие приближенные числа:

33. $a_0=0{,}35$; $\Delta a=0{,}00005$. **34.** $a=163\,000\,000$; $\Delta a=500$.

35. $a_0=765\,000$; $\Delta a=5$. **36.** $a_0=0{,}3700$; $\Delta a=0{,}05$.

37. $a_0=278\,000$; $\Delta a=50$; **38.** $a_0=428$; $\Delta a=5$.

39. $a_0=649{,}3$; $\Delta a=5$. **40.** $a_0=172\,420$; $\Delta a=0{,}05$.

41. Указать абсолютную погрешность приближенного числа: а) $a=2\,175\,000$; б) $a=173\cdot10^4$.

Решение. а) Так как выписаны все нули, то нули разряда сотен, десятков, единиц — верные цифры. Следовательно, абсолютная погрешность числа не превосходит единицы наименьшего разряда, в котором стоят верные цифры, т. е. $\Delta a=1$.

б) Согласно правилу III на 10^4 заменены нули, не являющиеся верными цифрами. Следовательно, первой верной цифрой является цифра 3 в разряде десятков тысяч. Итак, $\Delta a=10\,000$.

42—53. Указать абсолютные погрешности следующих приближенных чисел:

42. $a=14{,}5\cdot10$. **43.** $a=263\cdot10^4$. **44.** $a=748{,}56$.

45. $a=34{,}20$. **46.** $a=759{,}00$. **47.** $a=64{,}27$.

48. $a=23{,}560$. **49.** $a=1{,}0000$. **50.** $a=147{,}3\cdot10^3$.

51. $a=142{,}3\cdot10$. **52.** $a=596{,}2\cdot10^5$. **53.** $a=15{,}7\cdot10^2$.

54—71. Записать правильно следующие приближенные числа, учитывая, что $\Delta a = 500$:

54. $a = 15\,400$.	**55.** $a = 24\,300$.	**56.** $a = 2600$.
57. $a = 4000$.	**58.** $a = 600$.	**59.** $a = 56\,100$.
60. $a = 1700$.	**61.** $a = 41\,500$.	**62.** $a = 89\,300$.
63. $a = 666\,400$.	**64.** $a = 759\,200$.	**65.** $a = 111\,600$.
66. $a = 35\,200$.	**67.** $a = 74\,900$.	**68.** $a = 54\,300$.
69. $a = 7500$.	**70.** $a = 1\,628\,300$.	**71.** $a = 428\,600$.

Значащими цифрами числа называют все его верные цифры, за исключением нулей, стоящих левее первой цифры, отличной от нуля.

Например, число 0,712 содержит три значащие цифры: 7, 1, 2; число 0,0016 — две значащие цифры: 1, 6; число 45,03 — четыре значащие цифры: 4, 5, 0, 3.

Следует помнить, что в записи натурального числа все цифры являются значащими. Так, все цифры натурального числа 2574 — значащие.

4. Округление приближенных чисел

Запись приближенных чисел требует их округления.

Чтобы округлить число с точностью до указанного разряда, нужно цифры, стоящие правее указанного разряда, отбросить (в дробной части числа) или заменить нулями (в целой части числа). Если при округлении первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последнюю сохраняемую цифру не изменяют; если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на 1.

72. Округлить с точностью до 0,01: а) 1,423; б) 3,2387; в) 1,996.

Решение. а) Так как отбрасываемая цифра $3<5$, то округляем до 1,42;

б) так как первая отбрасываемая цифра $8>5$, то округляем до 3,24;

в) так как первая отбрасываемая цифра $6>5$, то округляем до до 2,00.

73—83. Округлить с точностью до 0,01 следующие числа:

73. 0,428.	**74.** 2,645.	**75.** 8,993.
76. 16,452.	**77.** 25,689.	**78.** 81,341.
79. 10,328.	**80.** 76,645.	**81.** 62,8428.
82. 15,1613.	**83.** 17,8975.	**84.** 22,1488.

85—93. Округлить с точностью до 1 следующие числа:

85. 16,285.	**86.** 17,349.	**87.** 34,931.
88. 60,605.	**89.** 0,785.	**90.** 2,501.
91. 31,499.	**92.** 785,501.	**93.** 0,499.

94—102. Округлить с точностью до 1000 следующие числа:

94. 1835. **95.** 4382. **96.** 64 975.

97. 10 428. **98.** 72 356. **99.** 16 765.

100. 4172,035. **101.** 6872,73. **102.** 1335,42.

5. Относительная погрешность

Допустим, что погрешность какого-либо измерения равна 0,2 см. Если с такой погрешностью измеряли длину тетради, то это большая погрешность, а если измеряли длину комнаты — небольшая. Таким образом, имеет значение не только какова погрешность, но и отношение ее к измеряемой величине.

Относительной погрешностью приближенного значения числа a называется отношение абсолютной погрешности этого числа к числу a.

Так как абсолютная погрешность обычно бывает неизвестна, то на практике используют понятие границы относительной погрешности числа.

Границей относительной погрешности ε_a приближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a, т. е.

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

Обычно границу относительной погрешности записывают в процентах, т. е.

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|} \cdot 100\%.$$

Чем меньше граница относительной погрешности, тем выше качество измерения.

103. Найти границу относительной погрешности числа $a = 142{,}5$, если $\Delta a = 0{,}05$.

Решение. $\varepsilon_a = \frac{0{,}05}{142{,}5} \cdot 100\% = 0{,}00034 \cdot 100\% = 0{,}03\%$.

104—111. Определить границы относительных погрешностей следующих чисел:

104. $a = 6{,}93$; $\Delta a = 0{,}02$. **105.** $a = 12{,}79$; $\Delta a = 2$.

106. $a = 648{,}5$; $\Delta a = 0{,}05$. **107.** $a = 792{,}3$; $\Delta a = 0{,}05$.

108. $a = 2{,}372$; $\Delta a = 0{,}004$. **109.** $a = 4{,}25$; $\Delta a = 0{,}02$.

110. $a = 34{,}27$; $\Delta a = 0{,}005$. **111.** $a = 1{,}9345$; $\Delta a = 0{,}0005$.

112. Найти границу абсолютной погрешности числа $a = 1348$, если $\varepsilon_a = 0{,}04\%$.

Решение. Запишем границу относительной погрешности в виде $0{,}04\% = 0{,}0004$. Чтобы найти границу абсолютной погрешности числа a, воспользуемся формулой $\Delta a = |a|\varepsilon_a$, откуда $\Delta a = 1348 \cdot 0{,}0004 = 0{,}539 \approx 0{,}5$. Значит, $\Delta a = 0{,}5$ и число может быть записано так: $a = 1348 \pm 0{,}5$.

113—118. Найти границу абсолютной погрешности следующих чисел:

113. $a = 352{,}004$; $\varepsilon_a = 0{,}03\,\%$. **114.** $a = 71{,}28$; $\varepsilon_e = 0{,}005\,\%$.

115. $a = 0{,}649$; $\varepsilon_a = 0{,}002\,\%$. **116.** $a = 42{,}78$; $\varepsilon_a = 3\,\%$.

117. $a = 142{,}5$; $\varepsilon_a = 0{,}3\,\%$. **118.** $a = 740\,000{,}0$; $\varepsilon_a = 0{,}05\,\%$.

6. Действия с приближенными числами

Для того чтобы научиться производить действия с приближенными числами, нужно уметь находить погрешность этих действий. Сформулируем следующие правила:

I. *Граница абсолютной погрешности суммы (разности) двух чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей заданных чисел:*

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b; \quad \Delta_{a-b} = \Delta_a + \Delta_b.$$

II. *Граница абсолютной погрешности произведения двух чисел равна произведению границы относительной погрешности произведения на абсолютную величину произведения этих чисел:*

$$\Delta_{ab} = \varepsilon_{ab}|ab|.$$

III. *Граница абсолютной погрешности частного двух чисел равна произведению границы относительной погрешности частного на абсолютную величину частного этих чисел:*

$$\Delta_{a/b} = \varepsilon_{a/b}\left|\frac{a}{b}\right|.$$

IV. *Граница относительной погрешности произведения (частного) двух чисел равна сумме относительных погрешностей этих чисел:*

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b; \quad \varepsilon_{a/b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b.$$

V. *Граница относительной погрешности степени равна произведению границы относительной погрешности основания на показатель степени:*

$$\varepsilon_{a^n} = \varepsilon_a n.$$

На практике пользуются более простыми правилами, называемыми *правилами подсчета цифр:*

I. *При сложении и вычитании приближенных чисел в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их в наименее точном числе.*

II. *При умножении и делении приближенных чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в числе с меньшим количеством значащих цифр.*

III. *При возведении в степень в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.*

IV. *При извлечении корня сохраняют столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.*

V. *При выполнении промежуточных действий оставляют на один знак больше, чем требуют правила, а в результате запасной знак округляют.*

VI. *Если в вычислениях точность задана заранее, то вычисления ведут с запасным знаком, который в результате округляют.*

119. Сложить приближенные числа:

$$14{,}5+113{,}76+12{,}783+11{,}2161.$$

Решение. Округляем все числа по наименее точному числу (14,5), оставляя запасной знак, и производим сложение:

$$14{,}5+113{,}76+12{,}78+11{,}22=152{,}26.$$

Запасной знак округляем и получаем ответ: 152,3.

120—131. Произвести действия с приближенными числами:

120. $645{,}27+102{,}324+715{,}645+10{,}2.$

121. $428{,}263+107{,}316+264{,}2+748{,}35.$

122. $15{,}283+4{,}04527+8{,}253741+17{,}52.$

123. $12030+645{,}29+748{,}5+1652{,}375.$

124. $26{,}35+1400+729{,}3+745{,}68.$

125. $428{,}56-170.$ **126.** $356{,}3295-16{,}2.$

127. $17200-1234{,}45.$ **128.** $651{,}0-79{,}8372.$

129. $16{,}27-0{,}64986.$ **130.** $745{,}428-112{,}34863.$

131. $428{,}3-17{,}642.$ **132.** $654-398{,}645.$

133. Найти сумму $318{,}7864+211{,}1246+76{,}1613+106{,}1914$ с точностью до 0,01.

Решение. Округляем все числа, оставляя запасной знак:

$$318{,}786+211{,}125+76{,}161+106{,}191=712{,}263.$$

Округляем запасной знак и получаем ответ: 712,26.

134—136. Найти с точностью до 0,01:

134. $564{,}375+7489{,}296+114{,}206+748{,}601.$

135. $172{,}350+113{,}215+712{,}305+546{,}554.$

136. $428{,}726+713{,}514+695{,}207+844{,}398.$

137—139. Найти с точностью 100:

137. $283{,}425+15\,627{,}321+17\,216{,}35.$

138. $563+14\,879+74\,596+23\,702.$

139. $7123+42\,596+7\,835\,516+2\,961\,023.$

140. Найти произведение двух приближенных чисел: $0{,}3862\times\times 0{,}85.$

Решение. Округляем первое число, оставляя один запасной знак, так как второе число содержит две значащих цифры. Таким образом,

$$0{,}3862\cdot 0{,}85=0{,}386\cdot 0{,}85=0{,}3281\approx 0{,}33.$$

141. Вычислить $x = \frac{2{,}48 \cdot 0{,}3665}{5{,}643}$.

Решение. Наименьшее количество значащих цифр, равное 3, содержит число 2,48; поэтому остальные числа округляем до трех значащих цифр (0,367 и 5,64). Следовательно,

$$x = \frac{2{,}48 \cdot 0{,}367}{5{,}64} = 0{,}16137 \approx 0{,}161.$$

142. Вычислить $3{,}27^3$.

Решение. Находим $3{,}27 \cdot 3{,}27 \cdot 3{,}27 = 34{,}965 \approx 35{,}0$. В результате оставлены три значащих цифры, так как столько значащих цифр содержит основание степени.

143. Вычислить $x = \frac{\sqrt{3{,}27} \cdot 0{,}4456}{3{,}284}$.

Решение. Извлекая квадратный корень из числа 3,27, получим $\sqrt{3{,}27} = 1{,}81$. Здесь оставлены три значащих цифры, так как столько значащих цифр содержит подкоренное выражение. Округляем остальные числа до трех значащих цифр. В результате находим

$$x = \frac{1{,}81 \cdot 0{,}446}{3{,}28} \approx 0{,}246.$$

144—149. Произвести вычисления:

144. $x = \frac{(0{,}17 + 0{,}2445)0{,}56}{1{,}424}$.

145. $x = \frac{0{,}26\sqrt{32{,}3}}{16{,}64}$.

146. $x = \frac{\sqrt{1{,}64}\sin 43°24'}{0{,}7}$.

147. $x = \frac{7{,}8\sin 36°12'}{\sin 73°42'}$.

148. $x = \frac{\sqrt{29{,}56}(37{,}2 - 17{,}4)}{13{,}2}$.

149. $x = \frac{(35{,}264 + 17{,}3)\sin 41°30'}{165{,}2 - 17{,}483}$.

7. Вычисления с помощью микрокалькулятора

Из предыдущих расчетов видно, что вычисления требуют большого количества времени, внимания и умения для выполнения арифметических действий. Эту работу значительно облегчает применение микрокалькуляторов.

Все микрокалькуляторы принято делить на три основные группы: простейшие (или бытовые), инженерные и программируемые.

Простейшие микрокалькуляторы предназначаются, как правило, для выполнения арифметических операций и последовательностей таких операций. Более совершенные модели микрокалькуляторов могут иметь одну-две встроенные микропрограммы (обычно вычисление обратных величин, процентов, извлечение квадратного корня), а самые совершенные модели этой группы имеют также дополнительные регистры памяти, что во многих случаях может облегчить выполнение усложненных вычислений.

8. Организация вычислительного процесса

Вычислениями принято называть нахождение нового числа, искомого результата с помощью выполнения операций над уже известными числами. Совокупность таких операций образует вычислительный процесс. Характер операций может быть различным, но преобладающими являются логические и арифметические операции.

Для вычисления надо располагать исходными числами (исходными данными). Целью любого вычислительного процесса является получение нового числа — результата вычислений. Операции вычислительного процесса выполняются вручную или с помощью различных технических средств.

Основными требованиями к любым вычислениям являются правильность, точность, быстрота и автоматизация.

Следует знать, что при выполнении массовых вычислений важно придерживаться определенных правил, выработанных практикой. Они экономят труд вычислителя, позволяют рационально использовать вычислительную технику и вспомогательные средства.

Основные этапы вычислительной работы таковы:

1^0. Записывают формулу, по которой будут вестись вычисления.

2^0. Заготавливают расчетный бланк, на котором будут записываться результаты всех промежуточных вычислений.

3^0. Определяют точность вычислений (т. е. число верных десятичных знаков или значащих цифр, которое должен иметь результат).

4^0. Выбирают средства вычислений (вычислительные машины, таблицы и т. п.) для каждого звена вычисления.

5^0. Устанавливают методы текущего контроля вычислений.

6^0. Производят вычисления.

7^0. Производят заключительный контроль вычислений.

Рассмотрим подробно первый этап.

Прежде всего вычислитель должен разработать подробную вычислительную схему, точно указывающую порядок действий и дающую возможность получить искомый результат наиболее простым способом, например серией однотипных вычислений. Кроме того, эта схема при необходимости позволит использовать труд менее квалифицированных вычислителей.

Составление вычислительной схемы проиллюстрируем на примере. Пусть требуется вычислить рентабельность производства по формуле

$$\text{Р} = \frac{\text{П}}{\text{О}_{\text{осн}} + \text{О}_{\text{об}}} \cdot 100\,\%.$$

До начала вычислений следует продумать последовательность всех промежуточных операций, определить удобное расположение записей. Рассматриваем данную формулу и устанавливаем, в какой последовательности и какие действия надо производить. В точном соответствии с порядком действий составляем таблицу, каждый столбец которой предназначен для записи результата определенной операции. Так, для вычисления рентабельности производства порядок вычислений должен быть следующим:

1. Записываем значение П (прибыль предприятия).

2. Записываем значение $О_{осн}$ (среднегодовую стоимость основных фондов).

3. Записываем значение $О_{об}$ (среднегодовую стоимость нормируемых оборотных средств).

4. Находим $О_{осн}+О_{об}$ (складываем результаты п. 2 и п. 3) и результаты записываем в столбец 4.

5. Находим $\frac{П}{О_{осн}+О_{об}}$ (делим результаты п. 1 и п. 4) и результат записываем в столбец 5.

6. Умножаем результат п. 5 на 100 % и записываем в столбец 6.

Теперь составим расчетный бланк.

П	$О_{осн}$	$О_{об}$	$О_{осн}+О_{об}$ (2+3)	$\frac{П}{О_{осн}+О_{об}}$ (1 : 4)	р (5×100 %)
1	2	3	4	5	6

Такую таблицу (расчетный бланк) следует начертить на листе бумаги и выполнять последовательно вычисления, записывая каждый полученный результат в соответствующую графу. Вычисления рекомендуется производить по столбцам, а не по строкам (последовательное выполнение однотипных операций позволяет использовать один и тот же вычислительный прибор).

Если по характеру задачи требуется производить приближенные вычисления, то следует установить, с какой точностью нужно производить промежуточные вычисления.

Так, в рассмотренном примере столбец 4 считается с точностью до 1000; столбец 5 — с точностью до 0,001; столбец 6 — с точностью до 0,1 %.

Все результаты вычислений должны контролироваться. Различают текущий и заключительный контроль. Хорошим методом текущего контроля являются вычисления «в две руки». Это означает, что вычисления должны вестись параллельно и независимо друг от друга двумя вычислителями. Результаты вычислений должны время от времени сверяться. Эффективно и использование контрольных соотношений. Заключительный контроль осуществляется различными методами, но во всех случаях и на всех этапах работы должно оставаться неизменным следующее требование — аккуратность и четкость записей в вычислительных бланках.

§ 2. Комплексные числа

Понятие мнимой единицы
Степени мнимой единицы
Определение комплексного числа
Действия над комплексными числами в алгебраической форме
Геометрическая интерпретация комплексного числа
Тригонометрическая форма комплексного числа
Показательная форма комплексного числа
Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

1. Понятие мнимой единицы

Допустим, что существует такое число, квадрат которого равен -1. Обозначим это число буквой i; тогда можно записать: $i^2=-1$.

Число i будем называть *мнимой единицей**, а предыдущее равенство будем считать определением мнимой единицы.

Из этого равенства находим $i=\sqrt{-1}$.

Введение мнимой единицы позволяет нам теперь извлекать корни квадратные из отрицательных чисел.

Например,

$$\sqrt{-36}=\sqrt{36(-1)}=\sqrt{36}\cdot\sqrt{-1}=6i;$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}}=\sqrt{\frac{1}{4}\cdot(-1)}=\sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{-1}=\frac{1}{2}i.$$

2. Степени мнимой единицы

Рассмотрим степени мнимой единицы:

$$\begin{aligned}
&i;\\
&i^2=-1;\\
&i^3=i^2\cdot i=(-1)i=-i;\\
&i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=-(-1)=1;\\
&i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i;\\
&i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=i^2=-1;\\
&i^7=i^6\cdot i=(-1)\cdot i=-i;\\
&i^8=i^7\cdot i=-i\cdot i=1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Если выписать все значения степеней числа i, то мы получим такую последовательность: $i, -1, -i, 1, i, -1, -i, 1$ и т. д. Легко

* i — начальная буква французского слова imaginaire — «мнимый».

видеть, что значения степеней числа i повторяются с периодом, равным 4.

Так, $i=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$; $i^5=i$, $i^6=-1$, $i^7=-i$, $i^8=1$; $i^9=i$, $i^{10}=-1$, $i^{11}=-i$, $i^{12}=1$.

Таким образом, если показатель степени числа i делится на 4, то значение степени равно 1; если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i; если при делении показателя степени на 4 получается остаток 2, то значение степени равно -1; наконец, если при делении на 4 остаток равен 3, то значение степени равно $-i$. Пользуясь этим, можно вычислять любую степень числа i.

150. Найти: i^{28}; i^{33}; i^{135}.

Решение. Имеем $28=4\cdot 7$ (нет остатка); $33=4\cdot 8+1$; $135=4\cdot 33+3$. Соответственно получим $i^{28}=1$; $i^{33}=i$; $i^{135}=-i$.

151—157. Вычислить:

151. i^{66}; i^{143}; i^{216}; i^{137}.

152. $i^{43}+i^{48}+i^{44}+i^{45}$.

153. $(i^{36}+i^{17})i^{23}$.

154. $(i^{133}+i^{115}+i^{200}+i^{142})(i^{17}+i^{36})$.

155. $i^{145}+i^{147}+i^{264}+i^{345}+i^{117}$.

156. $(i^{13}+i^{14}+i^{15})i^{32}$.

157. $(i^{64}+i^{17}+i^{13}+i^{82})(i^{72}-i^{34})$.

3. Определение комплексного числа

Мы знакомы с действительными числами и с мнимыми единицами. Рассмотрим теперь числа нового вида.

Определение 1. Числа вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, i — мнимая единица, будем называть *комплексными*.

Число a будем называть *действительной частью* комплексного числа, bi — *мнимой частью* комплексного числа, b — *коэффициентом при мнимой части*. Возможны случаи, когда действительные числа a и b могут быть равными нулю. Если $a=0$, то комплексное число bi называется *чисто мнимым*. Если $b=0$, то комплексное число $a+bi$ равно a и называется *действительным*. Если $a=0$ и $b=0$ одновременно, то комплексное число $0+0i$ равно нулю. Итак, мы получили, что действительные числа и чисто мнимые числа представляют собой частные случаи комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ условились считать *равными* тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т. е. $a+bi=c+di$, если $a=c$ и $b=d$.

158. Найти x и y из равенства:

а) $3y+5xi=15-7i$; б) $(2x+3y)+(x-y)i=7+6i$.

Решение. а) Согласно условию равенства комплексных чисел имеем $3y=15$, $5x=-7$. Отсюда $x=-7/5$, $y=5$.

б) Из условия равенства комплексных чисел следует

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ x-\ \ y=6. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 3 и сложив результат с первым уравнением, имеем $5x=25$, т. е. $x=5$. Подставим это значение во второе уравнение: $5-y=6$, откуда $y=-1$. Итак, получаем ответ: $x=5$, $y=-1$.

159—164. Найти значения x и y из равенств:

159. $7x+5i=1-10iy$.

160. $(2x+y)-i=5+(y-x)i$.

161. $x+(3x-y)i=2-i$.

162. $(1+2i)x+(3-5i)y=$ $=1-3i$.

163. $(2-i)x+(1+i)y=5-i$.

164. $(3i-1)x+(2-3i)y=$ $=2-3i$.

4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

165. Даны комплексные числа $z_1=2+3i$, $z_2=5-7i$. Найти: а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) z_1z_2.

Решение. а) $z_1+z_2=(2+3i)+(5-7i)=2+3i+5-7i=(2+5)+(3i-7i)=7-4i$;

б) $z_1-z_2=(2+3i)-(5-7i)=2+3i-5+7i=(2-5)+(3i+7i)=-3+10i$;

в) $z_1z_2=(2+3i)(5-7i)=10-14i+15i-21i^2=10-14i+15i+21=(10+21)+(-14i+15i)=31+i$, (здесь учтено, что $i^2=-1$).

166—173. Произвести сложение и вычитание комплексных чисел:

166. $(3+5i)+(7-2i)$.

167. $(6+2i)+(5+3i)$.

168. $(-2+3i)+(7-2i)$.

169. $(5-4i)+(6+2i)$.

170. $(3-2i)-(5+i)$.

171. $(4+2i)-(-3+2i)$.

172. $(-5+2i)-(5+2i)$.

173. $(-3-5i)-(7-2i)$.

174—181. Произвести умножение комплексных чисел:

174. $(2+3i)(5-7i)$.

175. $(6+4i)(5+2i)$.

176. $(3-2i)(7-i)$.

177. $(-2+3i)(3+5i)$.

178. $(1-i)(1+i)$.

179. $(3+2i)(1+i)$.

180. $(6+4i)3i$.

181. $(2-3i)(-5i)$.

При выполнении умножения можно использовать формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab\pm b^3$.

182. Выполнить действия: а) $(2+3i)^2$; б) $(3-5i)^2$; в) $(5+3i)^3$.

Решение. а) $(2+3i)^2=4+2\cdot2\cdot3i+9i^2=4+12i-9=-5+$ $+12i$;

б) $(3-5i)^2=9-2\cdot3\cdot5i+25i^2=9-30i-25=-16-30i$;

в) $(5+3i)^3=125+3\cdot25\cdot3i+3\cdot5\cdot9i^2+27i^3$;

так как $i^2=-1$, а $i^3=-i$, то получим $(5+3i)^3=125+225i-135-$ $-27i=-10+198i$.

183—190. Выполнить действия:

183. $(3+5i)^2$. **184.** $(2-7i)^2$. **185.** $(6+i)^2$. **186.** $(1-5i)^2$.

187. $(3+2i)^3$. **188.** $(3-2i)^3$. **189.** $(4+2i)^3$. **190.** $(5-i)^3$.

Рассмотрим теперь применение формулы $(a+b)(a-b)=$ $=a^2-b^2$.

191. Выполнить действия: а) $(5+3i)(5-3i)$; б) $(2+5i)(2-$ $-5i)$; в) $(1+i)(1-i)$.

Решение. а) $(5+3i)(5-3i)=5^2-(3i)^2=25-9i^2=25+9=34$;

б) $(2+5i)(2-5i)=2^2-(5i)^2=4+25=29$;

в) $(1+i)(1-i)=1^2-i^2=1+1=2$.

192—197. Выполнить действия:

192. $(3+2i)(3-2i)$. **193.** $(5+i)(5-i)$.

194. $(1-3i)(1+3i)$. **195.** $(7-6i)(7+6i)$.

196. $(a+bi)(a-bi)$. **197.** $(m-ni)(m+ni)$.

Обратим внимание на то, что при использовании этой формулы всегда получается частный случай комплексного числа — действительное число, а комплексные числа, которые мы умножаем, являются сопряженными.

Определение 2. Два комплексных числа называются *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Мы видим, что произведение двух сопряженных чисел всегда равно действительному числу. Воспользуемся этим свойством для выполнения деления двух комплексных чисел. Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

198. Выполнить деление: а) $\frac{2+3i}{5-7i}$; б) $\frac{3+5i}{2+6i}$.

Решение. а) Имеем

$$\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)}.$$

Произведем умножение для делимого и делителя в отдельности:

$$(2+3i)(5+7i)=10+14i+15i+21i^2=-11+29i;$$
$$(5-7i)(5+7i)=25-49i^2=25+49=74.$$

Итак,

$$\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)}=\frac{-11+29i}{74}=-\frac{11}{74}+\frac{29}{74}i;$$

б) $\frac{3+5i}{2+6i}=\frac{(3+5i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)}=\frac{6-18i+10i-30i^2}{4-36i^2}=\frac{36-8i}{40}=$
$=\frac{9}{10}-\frac{1}{5}i.$

199—210. Выполнить деление:

199. $\frac{5i}{3+2i}$. **200.** $\frac{-2i}{5-i}$. **201.** $\frac{2-3i}{5+2i}$.

202. $\frac{3-i}{5-3i}$. **203.** $\frac{3+2i}{1-5i}$. **204.** $\frac{3-7i}{3+2i}$.

205. $\frac{3+2i}{5i}$. **206.** $\frac{6-7i}{i}$. **207.** $\frac{2+3i}{2-3i}$.

208. $\frac{5-7i}{5+7i}$. **209.** $\frac{1-i}{1+i}$. **210.** $\frac{1+i}{1-i}$.

211—216. Выполнить действия:

211. $\frac{(2+3i)-(5+7i)}{2+3i}$. **212.** $\frac{3+2i}{3-2i}+\frac{5+2i}{3+2i}$.

213. $\frac{6+2i}{3-7i}-\frac{2+3i}{2+5i}$. **214.** $\frac{6+2i}{1-i}-i^{27}$.

215. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{12}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}$ **216.** $i^{123}+(1-i)^6-(1+i)^8$.

Рассмотрим решение квадратных уравнений, дискриминант которых отрицателен.

217. Решить уравнение: а) $x^2-6x+13=0$; б) $9x^2+12x+$ $+29=0$.

Решение. а) Найдем дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$. Так как $a=1$, $b=-6$, $c=13$, то $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot13=36-52=$ $=-16$; $\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=4i$. Корни уравнения находим по формулам $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$:

$$x_1=\frac{6-4i}{2}=\frac{2(3-2i)}{2}=3-2i;\ x_2=\frac{6+4i}{2}=\frac{2(3+2i)}{2}=3+2i.$$

б) Здесь $a=9$, $b=12$, $c=29$. Следовательно, $D^2=b^2-4ac=$ $=12^2-4\cdot9\cdot29=144-1044=-900$, $\sqrt{D}=\sqrt{-900}=\sqrt{900(-1)}=30i$. Находим корни уравнения:

$$x_1=\frac{-12-30i}{18}=\frac{6(-2-5i)}{18}=\frac{-2-5i}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i;$$

$$x_2=\frac{-12+30i}{18}=\frac{6(-2+5i)}{18}=\frac{-2+5i}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i.$$

Мы видим, что если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то квадратное уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.

218—221. Решить квадратные уравнения:

218. $x^2-4x+13=0$. **219.** $x^2+3x+4=0$.

220. $2{,}5x^2+x+1=0$. **221.** $4x^2-20x+26=0$.

5. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить точкой Z плоскости с координатами $(a;\ b)$ (рис. 7). Для этого выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют *действительной* (или *вещественной*) *осью*; чисто мнимые числа — точками оси ординат, которую будем называть *мнимой осью*.

Каждой точке плоскости с координатами $(a;\ b)$ соответствует один и только один вектор с началом $O(0;\ 0)$ и концом $Z(a;\ b)$. Поэтому комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить в виде вектора $\vec{z}$ с началом в точке $O(0;\ 0)$ и концом в точке $Z(a;\ b)$.

222. Изобразить на плоскости числа: $z_1=5$; $z_2=-3i$; $z_3=3+2i$; $z_4=5-2i$; $z_5=-3+2i$; $z_6=-1-5i$.

Решение. Заданные числа изображены на рис. 8.

6. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть комплексное число $z=a+bi$ изображено в виде вектора $\vec{r}$ с началом $O\ (0;\ 0)$ и концом $Z\,(a;\ b)$ (рис. 9).

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется длина вектора $\vec{z}$, которую можно найти по формуле $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Обозначив модуль комплексного числа буквой r, получим

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Аргументом комплексного числа называется угол φ, который образует вектор $\vec{z}$ с положительным направлением оси абсцисс. Величину угла φ можно найти с помощью формул

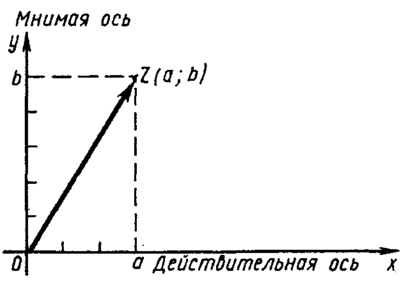

Рис. 7

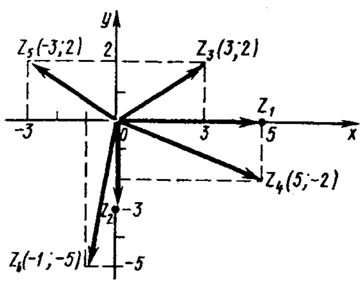

Рис. 8

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}. \qquad (2)$$

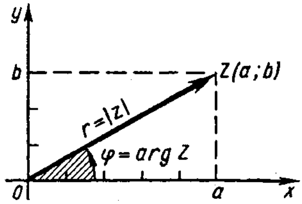

Рис. 9

Эта система имеет бесчисленное множество решений вида $\varphi + 2\pi k$, где k — любое целое число. Таким образом, любое комплексное число z имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Если $k = 0$, то мы получим главное значение аргумента φ, которое и будем называть аргументом комплексного числа.

Из соотношений $\cos\varphi = a/r$ и $\sin\varphi = b/r$ следует $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Если в запись комплексного числа z вместо a и b подставить эти значения, то получим

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Таким образом, мы получили новую форму записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (3)$$

которая называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Сформулируем правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.

1^0. Находят модуль комплексного числа r, для чего используют формулу $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2^0. Для нахождения φ сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка z.

3^0. Составляют уравнения $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ и по решению одного из них находят угол φ.

4^0. Записывают комплексное число z в тригонометрической форме.

223. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i$.

Решение. 1^0. Так как $a = 1$, $b = 1$, то $r = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

2^0. Изобразим число z геометрически (рис. 10). Мы видим, что числу z соответствует точка Z, лежащая в I четверти, и вектор $\vec{z}$.

3^0. Составим отношения $\cos\varphi = a/r$ и $\sin\varphi = b/r$, т. е.

$$\cos\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2, \quad \sin\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2.$$

Этим соотношениям соответствует в I четверти угол $\varphi = 45°$ или $\varphi = \pi/4$.

4^0. Так как $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 45°$ или $\varphi = \pi/4$, то тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид

$$z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos 45° + i\sin 45°) \text{ или } z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

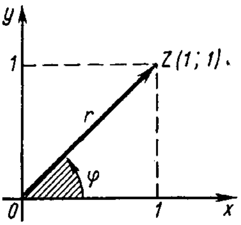

Рис. 10

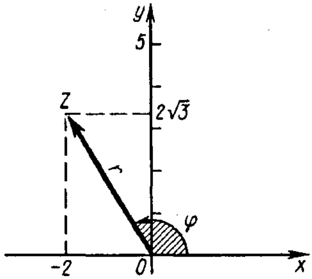

Рис. 11

224. Записать число $z=-2+2i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. 1^0. Здесь $a=-2$, $b=2\sqrt{3}$. Следовательно,

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4.$$

2^0. Изобразим число z геометрически (рис. 11). Мы видим, что числу z соответствует точка Z, лежащая во II четверти, и вектор $\vec{z}$.

3^0. Находим

$$\cos\varphi=a/r=-2/4=-1/2;\ \sin\varphi=b/r=2\sqrt{3}/4=\sqrt{3}/2.$$

Этим соотношениям соответствует угол $\varphi=180°-60°=120°$ или $\varphi=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

4^0. Запишем заданное число в тригонометрической форме:

$$z=-2+2i\sqrt{3}=4(\cos 120°+i\sin 120°)$$

или

$$z=-2+2i\sqrt{3}=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

225. Записать в тригонометрической форме чисто мнимое число $z=-3i$.

Решение. 1^0. Запишем данное число в виде $z=0-3i$. Значит, $a=0$, $b=-3$, откуда

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0+(-3)^3}=\sqrt{9}=3.$$

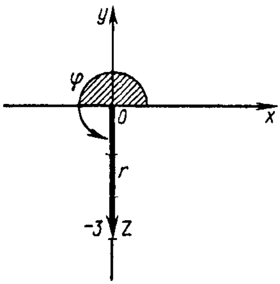

Рис. 12

2^0. Точка, соответствующая геометрически числу $z=-3i$, лежит на мнимой оси (рис. 12).

3^0. Аргумент этого числа равен $3\pi/2$, так как угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.

4^0. Запишем данное число в тригонометрической форме:

$$z=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

226—231. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

226. $z=\sqrt{3}+i$. **227.** $z=-3+3i$. **228.** $z=2\sqrt{2}-2i\sqrt{6}$.
229. $z=5$. **230.** $z=-10$. **231.** $z=6i$.

7. Показательная форма комплексного числа

Если комплексному числу $z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение $e^{i\varphi}$, то получим соотношение

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}, \qquad (4)$$

которое называется *формулой Эйлера.*

Любое комплексное число z можно записать в виде $z=re^{i\varphi}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной формой.*

Итак, существуют три формы записи комплексного числа:

$z=a+bi$ — алгебраическая форма;

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма;

$z=re^{i\varphi}$ — показательная форма.

232. Записать число $z=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ в показательной форме.

Решение. Здесь $r=3$, $\varphi=3\pi/2$. Следовательно, показательная форма числа имеет вид $z=3e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

233. Записать число $z=e^a(\cos b+i\sin b)$ в показательной форме.

Решение. Из заданной тригонометрической формы числа устанавливаем, что $r=e^a$ и $\varphi=b$. Подставив эти значения в показательную форму числа $z=re^{i\varphi}$, получим $z=e^ae^{bi}=e^{a+bi}$.

234. Записать число $z=-5i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Чтобы представить число z в виде $z=r(\cos\varphi+$ $+i\sin\varphi)$ и $z=re^{i\varphi}$, нужно найти модуль и аргумент числа z. Здесь $a=$ $=0$, $b=-5$; тогда $r=\sqrt{0+(-5)^2}=5$; $\varphi=3\pi/2$, так как точка z лежит на мнимой оси комплексной плоскости. Зная r и φ, получим $z=5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ и $z=$ $=5e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

235. Записать число $z=3-3i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Так как $a=3$, $b=-3\sqrt{3}$, то $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=$ $=\sqrt{9+9\cdot 3}=6$. Геометрически определяем, что числу z соответствует точка Z, лежащая в IV четверти (рис. 13). Составим отношения

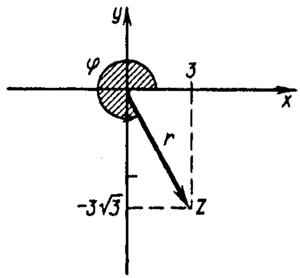

Рис. 13

$$\cos\varphi = a/r = 3/6 = 1/2,\ \sin\varphi = b/r = -3\sqrt{3}/6 = -\sqrt{3}/2.$$

Отсюда следует, что $\varphi = 360° - 60° = 300°$ или $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Значит, $r = 6$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$. Итак, $z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ — тригонометрическая форма, а $z = 6e^{\frac{5\pi}{3}i}$ — показательная форма данного числа.

236. Записать число $z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ в алгебраической и показательных формах.

Решение. Так как аргумент φ данного числа равен $4\pi/3$, то числу z соответствует на комплексной плоскости точка, расположенная в III четверти. Используя формулы приведения, находим

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},\ \sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставим в тригонометрическую форму числа полученные значения и раскроем скобки:

$$z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -4\cdot\frac{1}{2} + + 4i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 - 2i\sqrt{3}.$$

Итак, алгебраическая форма данного числа имеет вид $z = -2 - 2i\sqrt{3}$, а показательная форма — вид $z = 4e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

237—242. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах:

237. $z = 5i$. **238.** $z = -6$. **239.** $z = -2 - 2i$.

240. $z = 1 + i$. **241.** $z = 1 - i$. **242.** $z = -3\sqrt{3} + 3i$.

243—247. Записать комплексные числа в алгебраической и показательной формах:

243. $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

244. $z = 5\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

245. $z = 2{,}5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

246. $z = 8\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right)$.

247. $z = 6{,}3(\cos 10\pi + i\sin 10\pi)$.

248—253. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах:

248. $z = 2{,}6e^{\frac{5\pi}{4}i}$. **249.** $z = 4e^{-\frac{\pi}{4}i}$. **250.** $z = 1{,}8e^{\frac{11\pi}{3}i}$.

251. $z = 5e^{\frac{7\pi}{6}i}$. **252.** $z = 2{,}4e^{24\pi i}$. **253.** $z = 8{,}2e^{11\pi i}$.

8. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Произведение двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ находится по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (5)$$

Таким образом, *при умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:*

$$|z_1 z_2| = r_1 r_2, \quad \arg(z_1 z_2) = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Частное двух комплексных чисел $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)), \qquad (6)$$

т. е. *при делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2}, \quad \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Для возведения комплексного числа $z = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ в n-ю степень используется формула, которая называется *формулой Муавра:*

$$z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n). \qquad (7)$$

Следовательно, *при возведении в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, модуль числа нужно возвести в n-ю степень, а аргумент умножить на число n*:

$$|z^n| = r^n; \quad \arg(z^n) = \varphi n.$$

Корнем n-й степени из числа z (где n — натуральное число, большее или равное 2) называется такое комплексное число u, для которого справедливо равенство $u^n = z$.

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет ровно n значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \qquad (8)$$

где k может принимать n значений: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Если комплексные числа записаны в показательной форме, то умножение, деление, возведение в степень производятся по правилам действий со степенями.

Так, для произведения и частного комплексных чисел $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ и $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ справедливы формулы

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

а для n-й степени комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ — формула

$$z^n = r^n e^{i\varphi n}.$$

Для вычисления корня из комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ используется формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i},$$

где k принимает n значений: 0, 1, 2, ..., $n-1$.

254. Даны комплексные числа $z_1 = 3(\cos 330° + i\sin 330°)$ и $z_2 = 2(\cos 60° + i\sin 60°)$. Найти: а) $z_1 z_2$; б) z_1/z_2; в) z_2^4; г) $\sqrt[3]{z_1}$.

Решение. а) Согласно формуле (5) получим

$$z_1 z_2 = [3(\cos 330° + i\sin 330°)] \cdot [2(\cos 60° + i\sin 60°)] = 3 \cdot 2 [\cos (330° + 60°) + i\sin (330° + 60°)] = 6(\cos 390° + i\sin 390°) = 6(\cos 30° + i\sin 30°)$$

(мы воспользовались свойством периодичности тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ и отбросили полный период).

Итак,

$$z_1 z_2 = 6(\cos 30° + i\sin 30°) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = 3\sqrt{3} + 3i.$$

б) Используя формулу (6), находим

$$\frac{z_1}{z_2} = [3(\cos 330° + i\sin 330°)] : [2(\cos 60° + i\sin 60°)] = 1{,}5 [\cos (330° - 60°) + i\sin (330° - 60°)] = 1{,}5(\cos 270° + i\sin 270°).$$

Следовательно,

$$\frac{z_1}{z_2} = 1{,}5(\cos 270° + i\sin 270°) = 1{,}5(0 + i(-1)) = -1{,}5i.$$

в) Для нахождения комплексного числа z_2^4 воспользуемся формулой (7). Имеем

$$z_2^4 = [2(\cos 60° + i\sin 60°)]^4 = 2^4[\cos (60° \cdot 4) + i\sin (60° \cdot 4)] = 16 (\cos 240° + i\sin 240°).$$

Используя формулы приведения, находим

$$\cos 240° = \cos (180° + 60°) = -\cos 60° = -1/2, \ \sin 240° = \sin (180° + 60°) = -\sin 60° = -\sqrt{3}/2.$$

Таким образом,

$$z_2^4 = 16(\cos 240° + i\sin 240°) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

г) Для извлечения кубического корня из числа $z_1 = 3(\cos 330° + i\sin 330°)$ воспользуемся формулой (8), которая в данном случае примет вид

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}\left(\cos \frac{330° + 360°k}{3} + i\sin \frac{330° + 360°k}{3}\right),$$

где k принимает значения 0, 1 и 2.

Если $k=0$, то $z_1^{(1)}=\sqrt[3]{3}(\cos 110°+i\sin 110°)$;
если $k=1$, то $z_1^{(2)}=\sqrt[3]{3}(\cos 230°+i\sin 230°)$;
если $k=2$, то $z_1^{(3)}=\sqrt[3]{3}(\cos 350°+i\sin 350°)$.

255. Дано: $z_1=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, $z_2=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Найти: а) z_1z_2; б) z_1/z_2; в) z_1^5; г) $\sqrt{z_1}$.

Решение. а) Имеем $|z_1z_2|=3\cdot 5=15$; $\arg(z_1z_2)=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=$ $=\frac{7\pi}{4}$. Значит,

$$z_1z_2=15\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Воспользуемся формулами приведения:

$$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{7\pi}{4}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак,

$$z_1z_2=15\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=15\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=7{,}5\sqrt{2}-7{,}5\sqrt{2}\,i.$$

б) Находим $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{3}{5}=0{,}6$; $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$. Следовательно,

$$\frac{z_1}{z_2}=0{,}6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Воспользуемся формулами приведения:

$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак,

$$\frac{z_1}{z_2}=0{,}6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=0{,}6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-0{,}3\sqrt{2}+0{,}3\sqrt{2}i.$$

в) Имеем $z_1^5=\left[3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^5$. Так как $|z_1^5|=3^5=243$, $\arg(z_1^5)=\frac{5\pi}{4}\cdot 5=\frac{25\pi}{4}$, то

$$z_1^5=243\left(\cos\frac{25\pi}{4}+i\sin\frac{25\pi}{4}\right),$$

откуда, учитывая, что $\cos\frac{25\pi}{4}=\cos 6\frac{1}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{25\pi}{4}=\sin 6\frac{1}{4}\pi=$ $=\sin\frac{\pi}{4}$, окончательно получим

$$z_1^5=243\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=243\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=121{,}5\sqrt{2}+$$
$$+121{,}5\sqrt{2}i.$$

г) Для извлечения квадратного корня из числа $z_1=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ воспользуемся формулой

$$z_1=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\frac{5}{4}\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{5}{4}\pi+2\pi k}{2}\right),$$

где k принимает два значения: 0 и 1.

При $k=0$ получим

$$z_1^{(1)}=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}}{2}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}}{2}\right)=\sqrt{5}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right);$$

при $k=1$ получим

$$z_1^{(2)}=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{2}\right)=\sqrt{5}\left(\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}\right).$$

256—259. Найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2:

256. $z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; $z_2=0{,}4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

257. $z_1=(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$; $z_2=3(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$.

258. $z_1=0{,}6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $z_2=5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

259. $z_1=2{,}4(\cos\pi+i\sin\pi)$; $z_2=0{,}5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

260—263. Найти частное комплексных чисел z_1 и z_2:

260. $z_1=0{,}6(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$; $z_2=3(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)$.

261. $z_1=3(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$; $z_2=5(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$.

262. $z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

263. $z_1=0{,}6\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; $z_2=0{,}2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$.

Мы уже убедились, что легче, а поэтому целесообразнее выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

264. Найти $\sqrt[3]{z}$, если $z=1-i$.

Решение. Запишем комплексное число z в тригонометрической форме. Найдем $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Поскольку $a=1$ и $b=-1$, точка, соответствующая этому числу, расположена в IV четверти.

Составим отношения

$$\cos\varphi=a/r=1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2;\ \sin\varphi=b/r=-1/\sqrt{2}=-\sqrt{2}/2.$$

Учитывая, что точка z расположена в IV четверти, находим $\varphi=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$.

Теперь воспользуемся формулой

$$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),$$

где k принимает значения 0, 1 и 2. Тогда получим:

если $k=0$, то

$$z_1^{(1)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$$

если $k=1$, то

$$z_1^{(2)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4}+\right.$$
$$\left.+i\sin\frac{15\pi}{4}\right);$$

если $k=2$, то

$$z_1^{(3)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+\right.$$
$$\left.+i\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

265. Найти z^6, если $z=-\sqrt{3}+i$.

Решение. Запишем число z в тригонометрической форме, учитывая, что $a=-\sqrt{3}$, $b=1$. Найдем $r=\sqrt{a^2+b^2}$; $r=\sqrt{3+1}=2$. Точка z расположена во II четверти. Составим отношения

$$\cos\varphi=a/r=\sqrt{3}/2,\ \sin\varphi=b/r=1/2.$$

Учитывая, что точка z расположена во II четверти, находим $\arg z=$ $=\varphi=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Согласно формуле возведения в степень имеем $|z^6|=2^6$, $\arg(z^6)=$ $=\frac{5\pi}{6}\cdot 6$ и, значит,

$$z^6=2^6\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot 6+i\sin\frac{5\pi}{6}\cdot 6\right)=64(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=$$
$$=64(\cos\pi+i\sin\pi)=64(-1+i0)=-64.$$

266. Вычислить $z=\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Запишем число -16 в тригонометрической форме. Найдем $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-16)^2+0}=16$. Здесь $a=-16$, $b=0$ и, значит, точка расположена на отрицательной части оси Ox; поэтому $\varphi=\pi$.

Для нахождения корня воспользуемся формулой

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),$$

где $k=0$, $k=1$, $k=2$ и $k=3$. Соответственно получим

$$z^{(1)}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2};$$

$$z^{(2)}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi+\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$$
$$=-\sqrt{2}+i\sqrt{2};$$

$$z^{(3)}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=$$
$$=-\sqrt{2}-i\sqrt{2};$$

$$z^{(4)}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=$$
$$=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

267—273. Произвести действия, предварительно записав комплексные числа в тригонометрической форме:

267. Найти z_1z_2; z_1/z_2, если $z_1=1-i$, $z_2=-2-2i$.

268. Найти z_1z_2; z_1/z_2, если $z_1=2\sqrt{3}-2i$; $z_2=\sqrt{3}+i$.

269. Найти z_1z_2; z_1/z_2, если $z_1=0{,}5-0{,}5i\sqrt{3}$, $z_2=0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i$.

270. Найти z^5, если $z=3-3i$.

271. Найти $\sqrt[3]{z}$, если $z=-27$.

272. Найти $\sqrt[4]{z}$, если $z=-1$.

273. Найти z^3, если $z=-5+5i$.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Какое число называется приближенным?

2. Что называется истинной погрешностью и истинной абсолютной погрешностью?

3. Что называется границей абсолютной погрешности?

4. Какие цифры приближенного числа называются верными?

5. Какие цифры называются сомнительными?

6. Сформулируйте правило записи приближенных чисел. Приведите примеры.

7. Как округляются приближенные числа?

8. Что называется границей абсолютной погрешности приближенного числа?

9. Что называется границей относительной погрешности приближенного числа?

10. Перечислите правила действий с приближенными числами. Приведите примеры.

11. Выполните действия с приближенными числами:

а) $367{,}24+165{,}3749+171{,}5+16{,}2839$;

б) $17{,}352\times 1{,}447$ (с точностью до 0,1);

в) $643{,}5723:47{,}243$ (с точностью до 0,1).

12. Перечислите основные группы микрокалькуляторов и их основные отличия.

13. Назовите основные правила выполнения вычислительного процесса.

14. Дайте определение мнимой единицы.

15. Как вычисляют степени мнимой единицы?

16. Вычислите i^{35}; i^{42}; i^{144}.

17. Какое число называется комплексным?

18. Какие комплексные числа называются чисто мнимыми? Приведите примеры комплексных чисел, чисто мнимых чисел.

19. Какие комплексные числа называются равными?

20. Решите уравнения: а) $5x+3iy=17-12i$; б) $7x-2i=9+5iy$.

21. Какие комплексные числа называются сопряженными?

22. Как выполняются сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме?

23. Произведите действия: а) $(2+3i)+(2i-7)$; б) $(6+5i)-(2-3i)$; в) $(5+2i)(3-5i)$; г) $(6-2i)(6+2i)$; д) $(3-7i)^2$.

24. Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?

25. Выполните действия: а) $(6+i)/(17-2i)$; б) $(3+5i)/(2i)$; в) $(3+2i)/(5+i)$; г) $(6+4i)/(7i)$.

26. Как геометрически изображаются комплексные числа?

27. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?

28. Запишите формулы для модуля и аргумента комплексного числа.

29. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?

30. Запишите в тригонометрической форме: а) $z=5-5i$; б) $z=-3-3i\sqrt{3}$; в) $z=-1{,}5\sqrt{3}+1{,}5i$.

31. Как записывается комплексное число в показательной форме?

32. Как умножить комплексные числа, записанные в тригонометрической форме? в показательной форме?

33. Как разделить комплексные числа, записанные в тригонометрической форме? в показательной форме?

34. Как возвести в степень комплексное число, записанное в тригонометрической форме? в показательной форме?

35. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

36. Как найти все значения корня n-й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме? в показательной форме?

37. Произведите действия в тригонометрической форме:

а) $6(\cos 230°+i\sin 230°)\times 2(\cos 70°+i\sin 70°)$;

б) $3(\cos 310°+i\sin 310°):3(\cos 40°+i\sin 40°)$;

в) $5(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4)):6(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$.

38. Как решить квадратное уравнение, если дискриминант его отрицателен?

39. Какие корни и сколько корней имеет квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом?

40. Решите квадратные уравнения: а) $x^2-10x+34=0$; б) $x^2+4x+53=0$.

Ответы

11. а) 720,4; б) 25,2; в) 13,6. **16.** $-i$; -1; 1. **20.** а) $x=3{,}4$; $y=-4$; б) $x=9/7$; $y=-2/5$. **23.** а) $-5+5i$; б) $4+8i$; в) $25-19i$; г) 40; д) $-40-42i$. **25.** а) $100/293+29i/293$; б) $5/2-3i/2$; в) $17/26+7i/26$; г) $4/7-6i/7$. **30.** а) $5\sqrt{2}(\cos 315°+i\sin 315°)$; б) $6(\cos 240°+i\sin 240°)$; в) $3(\cos 150°+i\sin 150°)$. **37.** а) $12(\cos 300°+i\sin 300°)=6+6i\sqrt{3}$; б) $\cos 270°+i\sin 270°=-i$; в) $(5/6)(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))=-(5\sqrt{2}/12)+(5\sqrt{2}/12)i$. **40.** а) $x_1=5-3i$; $x_2=5+3i$; б) $x_1=-2-7i$, $x_2=-2+7i$.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Вычислите $x=\sqrt{11}-\sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами. Найдите ε_x.
2. Определите верные и сомнительные цифры числа $x=398{,}65\pm 0{,}03$ и запишите правильно это число.
3. Вычислите $x=(a+b)/c$, где $a=82{,}653$, $b=9{,}38$, $c=61{,}9$. Найдите границу абсолютной погрешности.
4. Выполните действия в алгебраической форме: $(5-2i)^2$; $(-1+3i)^3$; $\dfrac{(2-3i)^2}{-i+5}$.
5. Вычислите $i^{15}+i^{24}-i^{49}-i^{37}\cdot i^{51}$.
6. Решите уравнение $x^2+4x+5=0$.
7. Найдите z^{10} в тригонометрической форме, если $z=1-i\sqrt{3}$.
8. Найдите в показательной форме $\sqrt[4]{-i}$.

Вариант 2

1. Вычислите $x = 6{,}28^2 - 3{,}1^2$. Найдите ε_x.

2. Определите верные и сомнительные цифры числа $0{,}75 \pm 0{,}0005$ и запишите правильно это число.

3. Вычислите $x = ab/\sqrt{c}$, где $a = 6{,}24$, $b = 3{,}5$, $c = 5{,}8$. Найдите границу абсолютной погрешности.

4. Вычислите $(i^{13} + i^{17}) \cdot 2i - (i^4 + i^{24}) \cdot 6$.

5. Выполните действия в алгебраической форме: $(3-5i)(2-3i)$; $(5+3i) \times (5-2i)$; $\dfrac{(6-2i)^2}{-3+i} + i^{15}$.

6. Решите уравнение $2{,}5x^2 - x + 1 = 0$.

7. Найдите z в тригонометрической форме, если $z = (3 - 3i\sqrt{3})(5\sqrt{3} + 5i)$.

8. Найдите z^6 в показательной форме, если $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответы

Вариант 1. 1. $x = 0{,}67$; $\varepsilon_x = 0{,}15\ \%$. 2. $x = 398$. 3. $2{,}85 \pm 0{,}04$. 4. $21 - 20i$; $26 - 18i$; $-0{,}5 - 2{,}5i$. 5. $-2i$. 6. $x_1 = -2 + i$; $x_2 = -2 - i$. 7. $z = -512 + 512i\sqrt{3}$. 8. $z_1 = e^{\frac{3\pi i}{8}}$; $z_2 = e^{\frac{7\pi i}{8}}$; $z_3 = e^{\frac{11\pi i}{8}}$; $z_4 = e^{\frac{15\pi i}{8}}$. Вариант 2. 1. $x = 29{,}83$; $\varepsilon_x = 0{,}4\ \%$. 2. $0{,}750$. 3. $9{,}1 \pm 0{,}35$. 4. -16. 5. $-9 - 19i$; $31 + 5i$; $-12 + 3i$. 6. $x_1 = -0{,}2 - 0{,}6i$; $x_2 = -0{,}2 + 0{,}6i$. 7. $z = 60\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$. 8. $z = e^{\pi i}$.