Глава VII
Элементы теории вероятностей

§ 1. Основные понятия комбинаторики

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например, 345, 534, 1036, 5671, 45 и т. п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 345 и 534), другие — входящими в них цифрами (например, 1036 и 5671), третьи различаются и числом цифр (например, 345 и 45).

Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям. В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания. Рассмотрим их отдельно. Однако предварительно познакомимся с понятием факториала.

1. Понятие факториала

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют *n-факториалом* и пишут

$$n! = 1\cdot2\cdot3...(n-1)n.$$

1. Вычислить: а) $3!$; б) $7!-5!$; в) $\frac{7!+5!}{6!}$.

Решение. а) $3!=1\cdot2\cdot3=6$.

б) Так как $7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ и $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$, то можно вынести за скобки 5! Тогда получим

$$5!(6\cdot7-1)=5!\cdot41=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot41=120\cdot41=4920.$$

в) $\frac{5!(6\cdot 7+1)}{6!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 43}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{43}{6}$.

2. Упростить: а) $\frac{(n+1)!}{n!}$; б) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; в) $\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}$.

Решение. а) Учитывая, что $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3...n(n+1)$, а $n!=1\cdot 2\cdot 3...n$, сократим дробь; $\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$.

б) Так как $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3...(n-1)n(n+1)$, то после сокращения получим $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=n(n+1)$.

в) Имеем $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3...n(n+1)$, $n!=1\cdot 2\cdot 3...n$. Приведем дробь к общему знаменателю, за который примем $(n+1)!$. Тогда получим

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}=\frac{1+(n+1)}{(n+1)!}=\frac{n+2}{(n+1)!}.$$

3—5. Вычислить:

3. $\frac{6!-4!}{3!}$. **4.** $\frac{5!}{3!+4!}$. **5.** $\frac{5!\cdot 3!}{6!}$.

6—11. Упростить выражения:

6. $\frac{(n+1)!}{n}$. **7.** $\frac{n!}{n(n-1)}$. **8.** $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$.

9. $\frac{n!}{(n-2)!}$. **10.** $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$. **11.** $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$.

2. Перестановки

Пусть даны три буквы A, B, C. Составим все возможные комбинации из этих букв: ABC; ACB; BCA; CAB; CBA; BAC (всего 6 комбинаций). Мы видим, что они отличаются друг от друга только порядком расположения букв.

Комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются *перестановками.*

Перестановки обозначаются символом P_n, где n — число элементов, входящих в каждую перестановку.

Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n=n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1 \qquad (1)$$

или с помощью факториала:

$$P_n=n! \qquad (2)$$

Так, число перестановок из трех элементов согласно формуле (2) составляет $P_3=3!=3\cdot 2\cdot 1=6$, что совпадает с результатом рассмотренного выше примера.

Действительно, на первое место в комбинации (перестановке) можно поставить три буквы. На второе место уже можно поставить только две буквы из трех (одна заняла первое место), а на третьем окажется только одна из оставшихся. Значит, $3\cdot 2\cdot 1=6=P_3$.

12. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?

13. В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

14—16. Вычислить:

14. $\frac{P_6 - P_5}{5!}$. **15.** $\frac{P_{20}}{P_4 P_{16}}$. **16.** $\frac{P_x}{P_{(x-2)} P_2}$.

3. Размещения

Пусть имеются четыре буквы A, B, C, D. Составив все комбинации только из двух букв, получим:

$$\begin{array}{c} AB,\ AC,\ AD; \\ BA,\ BC,\ BD; \\ CA,\ CB,\ CD; \\ DA,\ DB,\ DC. \end{array}$$

Мы видим, что все полученные комбинации отличаются или буквами, или их порядком (комбинации BA и AB считаются различными).

Комбинации из m элементов по n элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются *размещениями*.

Размещения обозначаются символом A_m^n, где m — число всех имеющихся элементов, n — число элементов в каждой комбинации. При этом полагают, что $n \leqslant m$. Число размещений можно вычислить по формуле

$$A_m^n = \underbrace{m(m-1)(m-2)\ldots,}_{n\ \text{множителей}} \tag{3}$$

т. е. число всех возможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных целых чисел, из которых большее есть m.

Так, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, что совпадает с результатом приведенного примера: поскольку число строк соответствует числу всех имеющихся букв, т. е. $m = 4$, а число столбцов равно 3, всего имеется 12 различных комбинаций.

17. Вычислить: а) A_6^3; б) $\frac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5}$.

Решение. а) $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

б) Так как $A_{15}^3 = 15 \cdot 14 \cdot 13$, $A_{15}^4 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$, $A_{15}^5 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \times$ $\times 11$, то

$$\frac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 + 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13(1+12)}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{13}{132}.$$

18. Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна из них не повторяется?

Решение. Так как двузначные числа отличаются друг от друга или самими цифрами, или их порядком, то искомое количество равно числу размещений из пяти элементов по два: $A_5^2 = 5 \cdot 4 = 20$. Итак, можно составить 20 различных двузначных чисел.

При нахождении числа размещений мы перемножаем n последовательно убывающих целых чисел, т. е. до полного факториала не хватает $(m-n)$ последовательно убывающих целых множителей.

Поэтому формулу числа размещений можно записать в виде

$$A_m^n = \frac{\overbrace{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)(m-n-1)\ldots 2\cdot 1}^{m \text{ множителей}}}{(m-n)(m-n-1)\ldots 2\cdot 1}.$$

Отсюда, учитывая, что числитель равен $m!$, а знаменатель равен $(m-n)!$, запишем эту формулу в факториальной форме:

$$A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}. \qquad (4)$$

19. Вычислить в факториальной форме A_6^3.

Решение. $A_6^3 = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$

20—25. Вычислить любым способом:

20. A_{10}^3. **21.** A_{12}^5. **22.** A_6^4.

23. A_{25}^2. **24.** A_{13}^5. **25.** $\frac{A_8^5 - A_8^4}{A_8^3}$.

26. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?

27. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 8, 9?

28. Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 8 учебных предметов, а в расписание на день могут быть включены только три из них?

29. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

4. Сочетания

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n — натуральные числа, причем $n \leqslant m$).

Так, из четырех различных букв A, B, C, D можно составить следующие комбинации, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Значит, число сочетаний из четырех элементов по два равно 6. Это кратко записывается так: $C_4^2 = 6$.

В каждой комбинации сделаем перестановки элементов:

$$AB,\ AC,\ AD,\ BC,\ BD,\ CD;$$
$$BA,\ CA,\ DA,\ CB,\ DB,\ DC.$$

В результате мы получили размещения из четырех элементов по два. Следовательно, $C_4^2P_2=A_4^2$, откуда $C_4^2=\frac{A_4^2}{P_2}$.

В общем случае число из m элементов по n равно числу размещений из m элементов по n, деленному на число перестановок из n элементов:

$$C_m^n=\frac{A_m^n}{P_n}. \qquad (5)$$

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы $A_m^n=\frac{m!}{(m-n)!}$ и $P_n=n!$, получим формулу числа размещений в виде

$$C_m^n=\frac{m!}{(m-n)!n!}. \qquad (6)$$

30. Вычислить: а) C_8^3; б) C_{10}^8.

Решение. а) Применяя формулу (6) при $m=8$, $n=3$, находим

$$C_8^3=\frac{8!}{(8-3)!3!}=\frac{8!}{5!3!}=\frac{5!6\cdot7\cdot8}{5!3\cdot2\cdot1}=56.$$

б) $C_{10}^8=\frac{10!}{(10-8)!\cdot8!}=\frac{10!}{2!\cdot8!}=\frac{8!9\cdot10}{1\cdot2\cdot8!}=45.$

Отметим основное свойство числа сочетаний:

$$C_m^n=C_m^{m-n}. \qquad (7)$$

Действительно,

$$C_m^n=\frac{m!}{(m-n)!n!},\quad C_m^{m-n}=\frac{m!}{(m-m+n)!(m-n)!}=\frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Мы видим, что правые части этих равенств равны; следовательно, равны и левые части.

Это свойство числа сочетаний позволяет упростить нахождение числа сочетаний из m элементов по n, когда n превосходит $\frac{1}{2}m$.

31. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных, если в классе 30 учащихся?

32. Сколькими способами можно выбрать двух человек в президиум, если на собрании присутствует 78 человек?

33. Найти x, если известно, что $C_{x-2}^2=21$.

34. Найти x, если $C_x^2=153$.

35. Сколькими способами можно заполнить лотерейный билет «5 из 36»?

36. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

§ 2. Основные понятия теории вероятностей

1. Предмет теории вероятностей

В своей практической деятельности мы часто встречаемся с явлениями, исход которых невозможно предсказать, результат которых зависит от случая. Так, стрелок, участвуя в данных соревнованиях, может попасть или не попасть в мишень. Однако в серии, например, из ста выстрелов, проведенных в одних и тех же условиях (одна и та же винтовка, одинаковое расстояние до мишени, одинаковая погода и т. д.), мы говорим о том, что в среднем у него 92 попадания (и, значит, около 8 неудачных). Конечно, не в каждой сотне выстрелов окажется 92 удачных; иногда их будет 90 или 91, иногда 93 или 94; иногда число их может оказаться даже заметно меньше или заметно больше, чем 92; вместе с тем в среднем, при многократном повторении стрельбы в тех же условиях, это число попаданий будет оставаться неизменным.

Случайное явление можно охарактеризовать отношением числа его наступлений к числу испытаний, в каждом из которых при одинаковых условиях всех испытаний оно могло наступить или не наступить.

Теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Для того чтобы записывать и исследовать эти закономерности, введем некоторые основные понятия и определения.

2. Основные понятия и определения

Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, будем называть *испытанием*.

Например, многократное подбрасывание монеты, процесс изготовления какой-либо детали представляют собой испытания.

Результат этого действия или наблюдения будем называть *случайным событием*. Например, появление цифры при подбрасывании монеты является случайным событием, поскольку оно могло произойти или не произойти.

Если нас интересует какое-либо определенное событие из всех возможных событий, то будем называть его *искомым событием* (или искомым исходом).

Все рассматриваемые события будем считать *равновозможными*, т. е. такими, которые имеют равные возможности произойти. Так, при бросании кости могут появиться 1 очко, 2, 3, 4, 5 или 6 очков и эти исходы испытания являются равновозможными. Иными словами, равновозможность означает равноправность, симметрию отдельных исходов испытаний при соблюдении некоторых условий.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D.

События называются *несовместными*, если никакие два из них не могут произойти в данном опыте вместе. В противном случае события называются *совместными*.

Так, при подбрасывании монеты появление цифры исключает одновременное появление герба; это — пример несовместных событий.

Рассмотрим другой пример. Пусть на мишени нарисованы раздельно круг, ромб и треугольник. Произведен один выстрел. Событие A — попадание в круг, событие B — попадание в ромб, событие C — попадание в треугольник. Тогда событие A и B, A и C, C и B являются несовместными.

Событие называется *достоверным*, если оно происходит в данном испытании обязательно.

Например, выигрыш по билету беспроигрышной лотереи есть событие достоверное.

Достоверные события обозначаются буквой U.

Событие называется *невозможным*, если оно в данном опыте не может произойти.

Например, при бросании игральной кости невозможно получить 7 очков.

Невозможное событие обозначается буквой V.

Полной системой событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании.

Так, выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти, шести очков при бросании игральной кости есть полная система событий, поскольку все эти события несовместны и наступление хотя бы одного из них обязательно.

Если полная система состоит из двух несовместимых событий, то такие события называются *противоположными* и обозначаются A и $\bar{A}$.

37. Имеется один билет лотереи «6 из 45». Событие A состоит в том, что он выигрышный, а событие B — в том, что он невыигрышный. Являются ли эти события несовместными?

38. В коробке находится 30 пронумерованных шаров. Установить, какие из следующих событий являются невозможными, достоверными, противоположными: достали пронумерованный шар (A); достали шар с четным номером (B); достали шар с нечетным номером (C); достали шар без номера (D). Какие из них образуют полную группу?

39. Являются ли достоверными или невозможными события, состоящие в том, что при однократном бросании кости выпадет: 5 очков; 7 очков; от 1 до 6 очков? Какие события в этом испытании составляют полную группу?

3. Относительная частота события

Пусть производится некоторое испытание и A — случайное событие, которое может произойти или не произойти в этом испытании.

Если произведено N одинаковых испытаний и M — число испытаний, в котором событие A произошло, то отношение M/N называется *частотой* наступления события A в данной последовательности испытаний.

Частота случайна и зависит от числа N всех испытаний.

Если N достаточно велико, то при его дальнейшем увеличении частота обычно меняется мало, т. е. становится статистически устойчивой.

Случайные события со статистически устойчивой частотой широко распространены в физике, биологии, экономике и других областях знаний.

Статистически устойчивая частота позволяет объективно расценить вероятность наступления события A. Понятие вероятности связано в испытании с опытным понятием статистически устойчивой частоты, а формула $M/N \approx P(A)$ выражает статистический подход к определению понятия вероятности.

4. Определение вероятности события

Пусть имеется 100 деталей, из которых 97 стандартных и 3 бракованных. Очевидно, что если взять одну деталь, то событие A, состоящее в том, что эта деталь стандартная, и событие B, состоящее в том, что она бракованная, не равновозможны. Событие A более возможно, более вероятно, чем событие B.

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется *вероятностью* этого события и обозначается символом $P(A)$.

Определение. *Вероятность* события A равна отношению числа m исходов испытаний, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу n всех равновозможных несовместных исходов, т. е.

$$P(A) = m/n.$$

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы n, выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение m к n.

Так, в приведенном выше примере событие A — деталь стандартная; событие B — деталь бракованная; общее число деталей равно 100. Поэтому $P(A) = 97/100$; $P(B) = 3/100$.

Из этого определения вытекают следующие свойства:

1. *Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.*

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0 \leqslant m \leqslant n$. Разделив обе части неравенства на n, получим $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

2. *Вероятность достоверного события равна единице,* так как $n/n = 1$.

3. *Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку* $0/n = 0$.

40. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что: а) выпадет четное число очков (событие A); б) выпадет число очков, кратное 3 (событие B); в) выпадет любое число очков, кроме 5 (событие C).

Решение. а) На гранях игральной кости имеются три четные цифры (2, 4 и 6), т. е. число искомых исходов $m = 3$. Число всех возможных исходов равно 6 (выпадет любое число очков от 1 до 6). Значит, $P(A) = 3/6 = 1/2$.

б) Здесь имеются две цифры, кратные трем: 3 и 6. Следовательно, $m = 2$, а число всех возможных исходов $n = 6$, откуда $P(B) = 2/6 = 1/3$.

в) Искомыми исходами являются цифры 1, 2, 3, 4, 6 — всего их пять ($m = 5$). Число всех возможных исходов $n = 6$. Поэтому $P(C) = 5/6$.

41. В партии из 100 деталей имеется 5 бракованных. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

42. Выбирают наугад число от 1 до 100. Определить вероятность того, что в этом числе не окажется цифры 3.

43. Найти вероятность того, что наугад выбранное число от 1 до 60 делится на 60.

44. Даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Найти вероятность того, что, выбрав наугад две точки, учащийся получит нужную прямую.

Решение. Пусть событие A — выбор искомой прямой. Число всех возможных исходов равно количеству прямых, проходящих через заданные пять точек. Так как прямая определяется парой точек и порядок точек внутри этой пары не имеет значения, то каждая пара должна отличаться хотя бы одной точкой. Следовательно, мы должны найти число сочетаний из пяти элементов по два, т. е.

$$n = C_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!2!} = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

Значит, число всех возможных пар точек равно 10, а искомой является только одна пара точек; поэтому $P(A) = 1/10$.

45. В классе 17 девочек и 14 мальчиков. Определить вероятность того, что оба вызванных ученика окажутся: а) мальчиками; б) девочками.

46. В семизначном телефонном номере забыта последняя цифра. Определить вероятность того, что наугад выбранная цифра (от 0 до 9) окажется верной.

47. Из коробки, содержащей n пронумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Определить вероятность того, что номера шаров расположатся по порядку.

48. Из букв составлено слово «книга». Это слово рассыпали и произвольно собрали заново. Какова вероятность того, что снова получится слово «книга»?

§ 3. Операции над событиями

Теорема сложения вероятностей
Условная вероятность
Независимые события. Теорема умножения вероятностей
Формула полной вероятности

1. Теорема сложения вероятностей

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Сумму двух событий обозначают символом $A+B$ или $A\cup B$, а сумму n событий — символом $A_1+A_2+\ldots+A_n$ или $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Предположим, что в урне имеются 5 белых шаров, 3 черных, 2 в полоску и 7 в клетку. Найдем вероятность того, что из урны будет извлечен одноцветный шар.

Пусть A — событие, состоящее в извлечении белого шара; B — черного шара; $A+B$ — одноцветного шара. Так как событию $A+B$ благоприятствуют 8 исходов, а число всех шаров в урне равно 17, то $P(A+B)=\frac{8}{17}$.

Эту же вероятность можно найти по-другому: $P(A)=\frac{5}{17}$, $P(B)=\frac{3}{17}$ и, значит, $P(A)+P(B)=\frac{8}{17}$. Итак, $P(A+B)=P(A)+$ $+P(B)$.

После рассмотрения этого примера можно сформулировать следующую теорему.

▲ **Теорема 1** (т е о р е м а с л о ж е н и я в е р о я т н о с т е й). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть в результате опыта могут наступить n несовместных исходов, которые по соображениям симметрии будем считать равновероятными. Далее, пусть m_a — число равновозможных исходов, благоприятствующих событию A; m_b — число равновозможных исходов, благоприятствующих событию B.

Так как события A и B несовместны, то не существует таких исходов, которые одновременно благоприятствовали бы и A, и B. Поэтому событию $A+B$ благоприятствуют m_a+m_b исходов. Но $P(A)=\frac{m_a}{n}$, $P(B)=\frac{m_b}{n}$, $P(A+B)=\frac{m_a+m_b}{n}=\frac{m_a}{n}+\frac{m_b}{n}$, т. е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \qquad (1)$$

Доказанную теорему с помощью метода математической индукции можно распространить на случай нахождения вероятности суммы попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_k$:

$$P(A_1+A_2+\dots+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_k).$$

Следствие 1. *Если события A, B, ..., M образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.*

Действительно, по теореме о вероятности суммы несовместных событий имеем $P(A+B+\dots+M)=P(A)+P(B)+\dots+P(M)$. Так как эти события образуют полную систему, то их сумма представляет собой достоверное событие (т. е. наступит хотя бы одно из них); но вероятность достоверного события равна 1, т. е. $P(A)+P(B)+\dots+P(M)=1$.

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице.*

Вероятность события, противоположного событию A; равна разности между единицей и вероятностью события A, т. е. $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Действительно, события A и $\bar{A}$ образуют полную систему, а потому на основании следствия 2 можем записать: $P(\bar{A})+$ $+P(A)=1$, откуда $P(\bar{A})=1-P(A)$.

49. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20 руб., на 10 — по 15 руб., на 15 — по 10 руб., на 25 — по 2 руб. и на остальные — ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не меньше 10 руб.

Решение. Пусть A, B и C — события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20, 15 и 10 руб. Так как события A, B и C несовместны, то

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=0{,}3.$$

50. В корзине находятся 5 белых и 7 черных перчаток. Найти вероятность того, что пара, которую достали наугад, окажется одноцветной.

51. В коробке находятся 250 лампочек, из них 100 по 100 Вт, 50 — по 60 Вт, 50 — по 25 Вт и 50 — по 15 Вт. Вычислить вероятность того, что мощность любой взятой наугад лампочки не превысит 60 Вт.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мощность лампочки равна 60 Вт, B — 25 Вт, C — 15 Вт, D — 100 Вт. События A, B, C и D образуют полную систему, так как все они несовместны и одно из них обязательно наступит в данном испытании (выборе лампочки). Вероятность наступления одного из них есть достоверное событие, т. е. $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$.

События «мощность лампочки не более 60 Вт» и «мощность лампочки более 60 Вт» — противоположные. Согласно свойству противоположных событий, имеем $P(A)+P(B)+P(C)=1-P(D)$. Учитывая, что $P(A)+P(B)+P(C)=P(A+B+C)$, получим $P(A+B+C)=1-P(D)$, откуда $P(A+B+C)=1-\frac{100}{250}$, т. е. $P(A+B+C)=\frac{3}{5}$.

52. Из урны, содержащей белые, черные и синие шары, извлекают один шар. События A_1 и A_2 означают появление соответственно белого и черного шаров. Что означает событие A_1+A_2?

53. Дана электрическая цепь с элементами l_1 и l_2, соединенными последовательно. Событие A — выход из строя элемента l_1; событие B — выход из строя элемента l_2. Что означает событие $A+B$?

54. Событие A означает появление шести очков на верхней грани игрального кубика. Что означает событие $\bar{A}$?

55. Событие A состоит в том, что хотя бы одна из 15 имеющихся электрических лампочек нестандартная. Что означает событие $\bar{A}$?

56. В группе 5 человек учится на отлично, 7 человек — на хорошо и отлично, 15 человек имеют тройки и 3 человека — неудовлетворительные оценки. Определить вероятность того, что вызванный учащийся не имеет ни двоек, ни троек.

57. У продавца имеется 10 красных, 8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Вычислить вероятность того, что купленный шар окажется красным, синим или зеленым.

Произведением конечного числа событие называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдет.

Произведение двух событий обозначают символом AB или $A\cap B$, а произведение n событий — символом $A_1A_2...A_n$ или $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Согласно определениям суммы и произведения двух событий, сумма $A+\bar{A}$ представляет собой достоверное событие U, а произведение $\bar{A}A$ — невозможное событие V.

Событие B называется *частным случаем* события A, если из наступления B следует наступление события A.

Пусть A и B — произвольные события. Далее, пусть m — число равновозможных исходов, благоприятствующих событию

A, а k — число исходов, благоприятствующих событию B. Предположим, что среди упомянутых $m+k$ исходов содержится t таких, которые благоприятствуют и событию A, и событию B.

Если n — общее число равновозможных исходов, образующих полную систему событий, то $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B)=\frac{k}{n}$.

Так как t исходов состоят в том, что события A и B наступят одновременно, то можно записать $P(AB)=\frac{t}{n}$.

Рассмотрим событие $A+B$; ему благоприятствуют $m+k-t$ исходов. Поэтому

$$P(A+B)=\frac{m+k-t}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{t}{n},$$

т. е.

$$P(A+B)=P(A)+P(\text{Б})-P(AB). \tag{2}$$

Полученная формула представляет собой обобщение формулы вероятности суммы двух несовместных событий, поскольку если A и B несовместны, то $P(AB)=0$ и формула (2) примет вид (1).

Равенство (2) означает, что *вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность произведения этих событий.*

58. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 — волейболом, 5 — волейболом и баскетболом, а остальные — другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

59. Дано $P(AB)=1/4$, $P(\bar{A})=1/3$, $P(B)=1/2$. Найти $P(A+B)$.

60. Пусть $P(\bar{A})=1/2$ и $P(B)=2/3$. Совместны ли события A и B?

2. Условная вероятность

При совместном рассмотрении двух случайных событий A и B часто возникает вопрос: как связаны события A и B друг с другом, как наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Простейшим примером связи между двумя событиями служит причинная связь, когда наступление одного из событий обязательно приводит к наступлению другого, или наоборот, когда наступление одного исключает возможность наступления другого. Пусть, например, из ящика наугад выбрана деталь и событие A заключается в том, что эта деталь стандартна (не содержит брака), а событие B состоит в том, что эта деталь 1-го сорта. Тогда наступление события B (деталь 1-го сорта) влечет за собой наступление события A (деталь стандартная). Рассмотрим событие C — деталь не принял ОТК. В этом случае наступление события C исключает наступление события A. Однако кроме таких крайних случаев, существует и много промежуточных, когда непосредственная причинная зависимость одного события от другого отсутствует, но искомая зависимость все же имеется.

Рассмотрим такой пример. Пусть в корзине находится 30 последовательно пронумерованных шаров; событие A — извлечен шар с номером, кратным трем; событие B — извлечен шар с номером, бо́льшим 10. Очевидно, было бы неверно рассуждать, что наступление одного из этих событий влечет за собой наступление другого, или, что наоборот, одно из них исключает другое. В то же время между событиями A и B имеется какая-то зависимость. Действительно, из 20 случаев, к которым сводится событие B (номер больше 10), событию A (номер кратен числу 3) благоприятствуют 7; поэтому, если считать, что событие B наступило, то вероятность события A при этом условии есть $P(A) = \frac{7}{20}$. В то же время если событие B не наступило, то вероятность события A при этом условии составит $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.

Так как $\frac{7}{20} > \frac{1}{3}$, то следует признать, что наступление события B повышает вероятность события A.

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие условной вероятности.

Определение. Пусть A и B — два случайных события одного и того же испытания. Тогда *условной вероятностью* события A или вероятностью события A при условии, что наступило событие B, называется число $\frac{P(AB)}{P(B)}$.

Если обозначить условную вероятность $P(A/B)$, то получим формулу

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{3}$$

(предполагается, что $P(B) \neq 0$).

61. Вычислить вероятность того, что в семье, где есть один ребенок — мальчик, родится второй мальчик.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в семье два мальчика, а событие B — что один мальчик. Рассмотрим все возможные исходы: мальчик и мальчик; мальчик и девочка; девочка и мальчик; девочка и девочка. Тогда $P(AB) = 1/4$, $P(B) = 3/4$ и по формуле (3) находим $P(A/B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.

62. В ящике находятся 10 лампочек по 15 Вт, 10 — по 25 Вт, 15 — по 60 Вт и 25 — по 100 Вт. Определить вероятность того, что взятая наугад лампочка имеет мощность более 60 Вт, если известно, что число ватт на взятой лампочке — четное.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что лампочка имеет мощность более 60 Вт, а событие B — что число ватт является четным. Но «более 60 Вт» — это в данном случае 100 Вт и, значит, $P(AB) = 25/60 = 5/12$, а «четное число ватт» — это 60 и 100 Вт, т. е. $P(B) = 40/60 = 2/3$.

Итак, искомая вероятность $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5/12}{2/3} = \frac{5}{8}$.

63. На игральной кости грани 1, 2, 3 окрашены в красный цвет, а грани 4, 5, 6 — в черный. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на этой грани стоит четное число?

64. Какова вероятность того, что вытащенная наугад кость домино окажется «дублем», если известно, что сумма очков на этой кости является четным числом?

Из формулы (3) следует, что

$$P(AB) = P(B)P(A/B), \tag{4}$$

т. е. вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

Полученная формула имеет смысл, если существуют вероятности событий $P(A/B)$ или $P(B/A)$, т. е. если события A и B совместны.

3. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей

Из решения задач видно, что вероятности $P(A)$ и $P(A/B)$ различны. Однако возможен случай, когда $P(A/B) = P(A)$; тогда событие A называют независимым от B.

Событие A называется *независимым* от события B, если наступление события B не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события A.

Учитывая определение независимости событий и правило умножения событий $P(AB) = P(B)P(A/B)$, получим следующую формулу:

$$P(AB) = P(B)P(A). \tag{5}$$

▲ **Теорема 2** (теорема умножения вероятностей). *Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Легко доказать, что если выполняется равенство $P(AB) = P(A)P(B)$, то событие A не зависит от B. Действительно, так как $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ и согласно определению условной вероятности правую часть этого выражения можно заменить на $P(A/B)$, то $P(A) = P(A/B)$, а это и есть условие независимости событий A и B. Исходя из этого, в дальнейшем будем понимать независимость событий A и B как выполнение равенства $P(AB) = P(B)P(A)$.

Чаще всего для определения независимости событий пользуются интуицией; так, например, при бросании двух монет очевидно, что выпадение какой-либо стороны на одной из них не оказывает влияния на условия бросания другой и, следовательно, выпадения каких-либо сторон на каждой из них представляют собой независимые события.

Понятие независимости обобщается на любое число событий. События $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ называются *независимыми*, если:

1) любые два из них попарно независимы:

$$P(A_iA_j) = P(A_i)P(A_j) \quad (i \neq j);$$

2) выполняется равенство

$$P(A_1A_2...A_n) = P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

65. В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй — 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Решение. Пусть A_1 — из первой урны извлечен белый шар; A_2 — из второй урны также извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 независимы. Так как $P(A_1) = 4/10 = 2/5$, $P(A_2) = 7/12$, то по формуле (5) находим

$$P(A_1A_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{7}{12} = \frac{14}{60} = \frac{7}{30}.$$

66. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работать.

Решение. Пусть событие A — выход из строя первого элемента, событие B — выход из строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).

а) Одновременное появление A и B есть событие AB. Следовательно, $P(AB) = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06$.

б) Если работает первый элемент, то имеет место событие $\bar{A}$ (противоположное событию A — выходу этого элемента из строя); если работает второй элемент — событие B. Найдем вероятности событий $\bar{A}$ и $\bar{B}$:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8; \quad P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\bar{A}\bar{B}$ и, значит,

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\bar{A})P(\bar{B}) = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56.$$

67. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и по одной задаче. Всего составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, учащийся ответит на все вопросы, если он подготовил 50 теоретических вопросов и 22 задачи.

Решение. Полный ответ на билет состоит из произведения двух событий: учащийся одновременно ответит на два вопроса (событие A) и решит задачу (событие B). Вычислим вероятности этих событий.

Число всех возможных комбинаций из 56 вопросов по два составляет

$$C_{56}^2 = \frac{56!}{54!\cdot 2!} = \frac{54!55\cdot 56}{54!2\cdot 1} = 1540.$$

Так как учащийся подготовил только 50 вопросов, то число исходов, благоприятствующих событию A, есть

$$C_{50}^2 = \frac{50!}{48!\cdot 2!} = \frac{48!\cdot 49\cdot 50}{48!\cdot 1\cdot 2} = 1225.$$

Вычислим вероятность события A:

$$P(A) = \frac{C_{50}^2}{C_{56}^2} = \frac{1225}{1540}.$$

Вероятность события B определяется тем, что учащийся знает 22 задачи из 28 возможных:

$$P(B) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}.$$

Поскольку события A и B независимы и должны выполняться одновременно, имеем

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1225\cdot 11}{1540\cdot 14} = 0{,}625.$$

68. Вероятность сдачи зачета учащимся равна 0,8, а вероятность сдачи экзамена равна 0,9. Какова вероятность того, что учащийся сдаст экзамен?

69. Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность того, что цифра 5 выпадет три раза?

70. Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность того, что ни разу не выпадет цифра 6?

71. Электрическая схема состоит из пяти последовательно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,5; 0,8; 0,1; 0,2. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

72. Электрическая схема состоит из трех параллельно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,7; 0,85. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

73. Имеется две урны. В первой урне находятся 1 белый, 3 черных и 4 красных шара; во второй — 3 белых, 2 черных и 3 красных шара. Из каждой урны достают по одному шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что цвета обоих шаров совпадают.

4. Формула полной вероятности

Предположим, что событие A может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$, называемых *гипотезами*. Тогда справедлива следующая *формула полной вероятности*:

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+\ldots+P(A/H_n)P(H_n), \tag{6}$$

т. е. вероятность события A равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Докажем это. По условию, событие A может произойти лишь вместе с одним из событий $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Следовательно,

$$A=AH_1+AH_2+\ldots+AH_n.$$

Так как события $H_1 \ldots H_n$ попарно несовместны, то несовместны и события $AH_1, AH_2, \ldots, AH_n$. Поэтому, применяя теорему сложения, находим

$$P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+\ldots+P(AH_n).$$

Заменив каждое слагаемое $P(AH_i)$ на $P(A/H_i)P(H_i)$, получим

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+\ldots+P(A/H_n)P(H_n).$$

74. Имеется три партии ламп по 20, 30, 50 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равна для каждой партии соответственно 0,7; 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из ста данных ламп проработает заданное время?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что взятая наугад лампа проработает заданное время, а H_1, H_2 и H_3 — гипотезы, что лампа принадлежит соответственно первой, второй или третьей партии. Тогда $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}3$, $P(H_3)=0{,}5$. Вероятности того, что лампа проработает заданное время, составляют $P(A/H_1)=0{,}7$, $P(A/H_2)=0{,}8$, $P(A/H_3)=0{,}9$ (по условию). По формуле полной вероятности находим

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+P(A/H_3)P(H_3)=$$
$$=0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}5=0{,}83.$$

75. Имеется две одинаковых урны. Первая содержит 2 черных и 3 белых шара, вторая — 2 черных и 1 белый шар. Сначала произвольно выбирают урну, а затем из нее наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что будет выбран белый шар?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что белый шар извлечен из произвольной урны, а H_1 и H_2 — гипотезы, что он принадлежит соответственно первой или второй урне. Тогда вероятность $P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}$, вероятность того, что белый шар принадлежит первой урне, $P(A/H_1)=\frac{3}{5}$, а вероятность того, что белый шар принадлежит второй урне, $P(A/H_2)=\frac{1}{3}$. По формуле полной вероятности получим

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{7}{15}.$$

76. С первого станка на сборку поступает 40 % изготовленных деталей, со второго — 30 %, а с третьего — 30 %. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка равна соответственно 0,01; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь оказалась бракованной.

77. Стрельбу в цель ведут 10 солдат. Для пяти из них вероятность попадания 0,6, для трех — 0,5 и для остальных — 0,3. Какова вероятность поражения цели?

78. Имеется пять винтовок, три из которых с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; без оптического прицела — 0,8. Найти вероятность попадания в цель, если стрелок сделает один выстрел из наудачу взятой винтовки.

§ 4. Случайные величины

Формула Бернулли
Закон распределения случайной величины
Биномиальное распределение

1. Формула Бернулли

Рассмотрим задачу, в которой проводятся повторные независимые испытания с двумя исходами.

79. Стрелок выполняет три попытки. Успех (попадание в цель) и неуспех (промах) каждой из них не зависит от исходов других попыток, а вероятность успешного завершения каждой попытки постоянна и равна p. Найти вероятность успешного завершения двух попыток из трех.

Решение. Пусть A_1, A_2 и A_3 — соответственно успех в первой, второй и третьей попытке. Тогда две удачные попытки отвечают следующим событиям: $A_1A_2\bar{A}_3$ — две первые попытки удачны, третья нет; $A_1\bar{A}_2A_3$ — удачны первая и третья попытка, вторая неудачна; $\bar{A}_1A_2A_3$ — удачны две последние попытки, первая неудачна.

Интересующее нас событие можно записать как сумму $A_1A_2\bar{A}_3+$ $+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$. Так как события, входящие в эту сумму, несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы, то по формулам сложения и умножения находим

$$P(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)=$$
$$=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3).$$

Но вероятность попадания в цель в каждой попытке есть p, поэтому вероятность промаха равна $q=1-p$. Подставив эти значения, получим

$$P(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3)=p\cdot p(1-p)+p(1-p)p+(p-1)p\cdot p=$$
$$=3p^2(1-p).$$

На этом примере мы познакомились с общей схемой, которая впервые была рассмотрена швейцарским математиком Я. Бернулли, и называется *схемой Бернулли*.

В общем случае эта схема приводит к формуле

$$P(A_{n,k}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (1)$$

которая называется *формулой Бернулли*.

80. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность, что при этом герб выпадет ровно три раза?

Решение. Пусть $A_{10,3}$ — событие, состоящее в том, что при 10-кратном подбрасывании монеты герб выпадет три раза. При этом вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$, т. е. $p = \frac{1}{2}$. Тогда $q = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Подставляя эти значения в формулу Бернулли, получим

$$P(A_{10,3}) = C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10!}{3! \cdot 7!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{7! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2^{10}} = \frac{8 \cdot 3 \cdot 5}{1024} = \frac{15}{128}.$$

81. Вероятность того, что лампа останется неисправной после 1000 ч работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что из пяти ламп не менее трех останутся исправными после 1000 ч работы?

Решение. Будем рассматривать горение каждой лампы в течение 1000 ч как отдельный опыт. Тогда можно сказать, что проведено 5 опытов. Нас интересуют события «горят 3 лампы из 5», «горят 4 лампы из 5» и «горят 5 ламп из 5», т. е. мы можем найти вероятность каждого из этих событий по формуле Бернулли, учитывая, что $p = 0{,}2$ и $q = 0{,}8$:

$$A_{5,3} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!2!} \cdot 0{,}2^3 \cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512;$$

$$A_{5,4} = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot 0{,}2^4 \cdot 0{,}8 = 0{,}0084;$$

$$A_{5,5} = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5!} \cdot 0{,}2^5 \cdot 1 = 0{,}00032.$$

Тогда искомая вероятность составит $0{,}0512 + 0{,}0084 + 0{,}00032 = 0{,}0579$.

82. Самолет имеет 4 двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя равна 0,95. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном из двигателей.

83. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение 5 дней из 7 перерасхода электроэнергии не произойдет?

84. Для нормальной работы на линии должно быть не менее 8 автобусов, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы в ближайший день.

85. В цехе имеется три резервных мотора, работающих независимо друг от друга. Для каждого мотора вероятность того, что он включен в данный момент, равна 0,2. Какова вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один мотор?

86. При испытаниях по схеме Бернулли вероятность ровно двух успехов в трех испытаниях в 12 раз больше, чем вероятность трех успехов. Найти вероятность успеха в каждом испытании.

2. Закон распределения случайной величины

В примерах, с которыми мы встречались ранее, случайные события характеризуются с помощью чисел (число случаев брака, число попаданий при стрельбе, число родившихся мальчиков). Такое положение типично для теории вероятностей. При этом случайный характер исхода влечет за собой случайность числа; это означает, что при повторении опыта оно меняется непредвиденным образом.

Случайной величиной называется переменная величина, которая может принимать те или иные значения в зависимости от случая. Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита (X, Y, Z), и их значения — соответствующими строчными буквами.

Случайные величины делятся на прерывные (или дискретные) и непрерывные.

Дискретными случайными величинами называются случайные величины, принимающие лишь конечное или счетное множество значений.

Функция, связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, называется *законом распределения* дискретной случайной величины. Его удобно задавать в виде следующей таблицы:

Значения x_i	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
Вероятности p_i	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

События $X=x_i$ ($i=1, 2, 3, \ldots, n$) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1+p_2+p_3+\ldots+p_n=\sum_{i=1}^{n} p_i=1.$$

87. Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.

Решение. Искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать три значения: 0, 5 и 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату — два случая и третьему — один случай. Найдем их вероятности:

$$P(x_1)=47/50=0{,}94;\ P(x_2)=2/50=0{,}04;\ P(x_3)=1/50=0{,}02.$$

Закон распределения случайной величины имеет вид

Значения x_i	0	5	30
Вероятности p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)=0{,}94+$ $+0{,}04+0{,}02=1$.

88. Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

89. Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X — сумма очков при обоих бросаниях. Составить таблицу распределения вероятностей.

90. В коробке находятся 7 карандашей, из которых 4 — красные. Наудачу извлекают 3 карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?

3. Биномиальное распределение

Пусть производится определенное число n независимых опытов, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие p. Рассмотрим случайную величину X, представляющую собой число наступлений событий A в n опытах. Закон ее распределения имеет вид

Значения x_i	0	1	2	$\cdots$	n
Вероятности p_i	$P(A_{n,0})$	$P(A_{n,1})$	$P(A_{n,2})$	$\cdots$	$P(A_{n,n})$

где $P(A_{n,k})$ вычисляются по формуле Бернулли.

Закон распределения, который характеризуется такой таблицей, называется *биномиальным*.

91. Монету подбрасывают пять раз. Составить закон распределения случайной величины X — числа выпадения герба.

Решение. Возможны следующие значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Зная, что вероятность выпадения герба в одном испытании равна 1/2, найдем вероятности значений случайной величины X по формуле Бернулли:

$$P(A_{5,0})C_5^0p^0q^5 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32};$$

$$P(A_{5,1}) = C_5^1p^1q^4 = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32};$$

$$P(A_{5,2}) = C_5^2p^2q^3 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32};$$

$$P(A_{5,3}) = C_5^3p^3q^2 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32};$$

$$P(A_{5,4}) = C_5^4p^4q^1 = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32};$$

$$P(A_{5,5}) = C_5^5p^5q^0 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

Закон распределения имеет вид

Значения x_i	0	1	2	3	4	5
Вероятности p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Произведем проверку: $\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=1$.

92. По одному и тому же маршруту в один и тот же день совершают полет три самолета. Вероятность посадки по расписанию для каждого равна 0,7. Составить закон распределения случайного числа самолетов, отклонившихся от расписания.

93. Устройство состоит из трех взаимно независимых деталей. Вероятность отказа каждой детали в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших деталей в одном опыте.

94. Составить закон распределения вероятностей для случайного числа страниц с опечатками, если в статье 8 страниц, а вероятность, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,01.

§ 5. Математическое ожидание

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины
Понятие о законе больших чисел
Понятие о задачах математической статистики

1. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Мы знаем, что наиболее исчерпывающей характеристикой случайной величины является ее закон распределения вероятностей. Однако не всегда обязательно знать весь закон распределения. Иногда можно обойтись одним или несколькими числами, отражающими наиболее важные особенности закона распределения, например числом, имеющим смысл «среднего значения» случайной величины, или же числом, показывающим средний размер отклонения случайной величины от своего среднего значения. Такого рода числа называются *числовыми характеристиками* случайной величины. Оперируя числовыми характеристиками, можно решать многие задачи, не пользуясь законом распределения.

Одна из самых важных числовых характеристик случайной величины есть математическое ожидание.

Если известна дискретная случайная величина X, закон распределения которой имеет вид

Значения x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Вероятности p_i	p_1	p_2	$\dots$	p_n

то *математическим ожиданием* (или средним значением) дискретной величины X называется число

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины X равно сумме произведений возможных значений этой величины на их вероятности.

95. Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение. Случайная величина X числа очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон ее распределения:

Значения x_i	1	2	3	4	5	6
Вероятности p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда математическое ожидание есть

$$M(X) = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{1}{6} + 3\cdot\frac{1}{6} + 4\cdot\frac{1}{6} + 5\cdot\frac{1}{6} + 6\cdot\frac{1}{6} = 3{,}5.$$

Различные случайные величины могут иметь одно и то же математическое ожидание. Поэтому необходимо ввести еще одну числовую характеристику для измерения степени рассеивания, разброса значений, принимаемых случайной величиной X, около ее математического ожидания.

Рассмотрим разность $x - m$, где m — математическое ожидание величины X.

Случайную величину $x - m$ называют *отклонением* величины от ее математического ожидания.

Дисперсией случайной величины X называется число

$$D(X) = M[(x-m)^2].$$

Другими словами, дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

96. Пусть X — число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение. Закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание $M(X) = 3{,}5$ были найдены в предыдущем примере. Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

$$x_1^0 = 1-3{,}5;\ x_2^0 = 2-3{,}5;\ x_3^0 = 3-3{,}5;\ x_4^0 = 4-3{,}5;\ x_5^0 = 5-3{,}5;\ x_6^0 = 6-3{,}5.$$

Вычислим дисперсию:

$$D(x) = \frac{1}{6}[(1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+ +(6-3{,}5)^2] = \frac{35}{12}.$$

97. Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию случайной величины X — выпадения герба.

2. Понятие о законе больших чисел

Теория вероятностей, как мы знаем, изучает закономерности, свойственные массовым случайным явлениям. Простейшая из них — устойчивость частоты — лежит в основе всех приложений теории вероятностей к практике. Если попытаться в немногих словах отразить общий смысл подобных закономерностей, то придем к такому заключению. Пусть производится большая серия однотипных опытов. Исход каждого отдельного опыта является случайным, неопределенным. Однако, несмотря на это, средний результат всей серии опытов утрачивает случайный характер и становится закономерным. Под *законом больших чисел* в теории вероятностей понимается ряд теорем, в каждой из которых устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

Если число случайных величин достаточно велико и они удовлетворяют некоторым весьма общим условиям, то, как бы они ни были распределены, практически достоверно, что их средняя арифметическая сколь угодно мало отклоняется от постоянной величины — средней арифметической их математических ожиданий, т. е. является практически постоянной величиной. Таково содержание теорем, относящихся к закону больших чисел. Следовательно, закон больших чисел — одно из выражений диалектической связи между случайностью и необходимостью.

Можно привести различные примеры возникновения новых качественных состояний как проявления закона больших чисел, в первую очередь — среди физических явлений. Рассмотрим один из них. По современным представлениям, газы состоят из отдельных частиц — молекул, которые находятся в хаотическом движении, и нельзя точно сказать, где в данный момент находится и с какой скоростью движется та или иная молекула. Однако наблюдения показывают, что суммарное действие молекул, например давление газа на стенку сосуда, проявляется с поразительным постоянством. Оно определяется числом ударов и силой каждого из них. Хотя первое и второе являются делом случая, приборы не улавливают колебаний давления газа, находящегося в нормальных условиях. Это объясняется тем, что благодаря огромному числу молекул даже в самых небольших объемах изменение давления на заметную величину практически невозможно. Следовательно, физический закон, утверждающий постоянство давления газа, является проявлением закона больших чисел.

Закон больших чисел лежит в основе различных видов страхования (страхование жизни человека на всевозможные сроки, имущества, скота, посевов и др.).

При планировании ассортимента товаров широкого потребления учитывается спрос на них населения. В этом спросе проявляется действие закона больших чисел.

Широко применяемый в статистике выборочный метод находит свое научное обоснование в законе больших чисел. Например, о качестве привезенной из колхоза на заготовительный пункт пшеницы судят по качеству зерен, случайно захваченных в небольшую мерку. Зерна в мерке немного по сравнению со всей партией, но во всяком случае мерку выбирают такой, чтобы зерен в ней было вполне достаточно для проявления закона больших чисел с точностью, удовлетворяющей потребности практики. Тогда мы вправе принять за показатели засоренности, влажности и средней массы зерен всей партии поступившего зерна соответствующие показатели в выборке.

В изучение общих условий применимости закона больших чисел к последовательности случайных величин большой вклад внесли русские и советские ученые П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. Н. Колмогоров и А. Я. Хинчин.

3. Понятие о задачах математической статистики

Известно, какое значение в экономике, сельском хозяйстве, биологии, медицине и т. д. имеют статистические методы изучения случайных явлений. Обычно к этим методам прибегают в тех случаях, когда требуется изучить распределение большой совокупности предметов (явлений, индивидуумов) по некоторому признаку. Например, можно интересоваться распределением множества людей по возрасту, множества животных данного вида по массе, распределением пахотных земель по урожайности, изделий определенного наименования по сортности, распределением больных гриппом по их реакции на данное лекарство. Так как практически любой признак допускает количественную оценку, то вместо того чтобы говорить о распределении предметов по признаку, говорят о распределении некоторой случайной величины X; опыт, с которым связана величина X, заключается в выборе наугад одного представителя данной совокупности, а значение, принимаемое X, есть значение признака для этого представителя.

Понятно, что исчерпывающее описание такого распределения можно было бы получить, выяснив значения признака для всех без исключения представителей данной совокупности. Однако такой способ трудно осуществим ввиду большого объема совокупности. В некоторых случаях ему препятствует еще и то обстоятельство, что сама рассматриваемая совокупность не существует в готовом виде, а является лишь воображаемой. Например, если нас интересует распределение ошибки, допускаемой измерительным прибором, то изучаемая совокупность представляет собой совокупность всех мыслимых измерений, которые можно произвести с помощью данного прибора. Ясно, что обследовать все элементы такой совокупности невозможно.

Выход из создавшегося положения разумно искать в том, чтобы заменить обследование всей совокупности обследованием лишь небольшой (притом выбранной наугад) ее части. Такую часть обычно называют *выборкой*; в противоположность ей вся совокупность называется *генеральной совокупностью*. Разумеется, при этом желательно, чтобы результаты обследования выборки отражали характерные, основные черты изучаемого признака; для этого объем выборки не должен быть чрезмерно мал. Например, о распределении жителей Москвы по размерам носимой ими одежды нельзя судить по результатам обследования одной квартиры; в этом смысле данные, относящиеся к целому дому, более показательны. Вообще, точные указания относительно объема выборки сформулировать довольно трудно; в каждой конкретной ситуации этот вопрос решается по-своему, с учетом таких факторов, как объем всей совокупности, предполагаемый характер распределения признака и т. д.

Разработка методов, позволяющих по результатам обследования выборки делать обоснованные заключения о распределении признака по всей совокупности, и является одной из важнейших задач математической статистики.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Что называется n-факториалом?

2. Вычислите 5!; 7!.

3. Запишите, чему равен n!.

4. Вычислите $\frac{n!}{(n-2)!}$.

5. Вычислите $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.

6. Вычислите $\frac{(n+1)!}{(n-3)!}$.

7. Перечислите основные задачи комбинаторики.

8. Что называется перестановками?

9. Запишите формулу для числа перестановок из m элементов.

10. Вычислите число перестановок из 5 предметов.

11. Что называется размещениями?

12. Запишите формулу числа размещений из m элементов по n.

13. Вычислите A_5^2; A_7^3; A_{10}^8.

14. Что называется сочетаниями?

15. Запишите формулу для числа сочетаний из m элементов по n.

16. Вычислите C_8^2; C_{10}^3; C_5^5.

17. Какие события называются достоверными? Приведите примеры.

18. Какие события называются невозможными? Приведите примеры.

19. Что называется вероятностью события?

20. В партии имеется 100 деталей, пять из которых бракованные. Определите вероятность того, что взятая наугад деталь окажется бракованной.

21. Что называется относительной частотой события?

22. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.

23. Чему равна сумма несовместных событий?

24. Какие события называются противоположными?

25. Как формулируется теорема сложения вероятностей?

26. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

27. В корзине 5 черных, 3 белых и 7 полосатых шаров. Чему равна вероятность достать наугад одноцветный шар?

28. Что называется условной вероятностью?

29. Какова вероятность извлечь из корзины, где лежат 10 пронумерованных шаров, шар с четным номером, если известно, что его номер больше 5?

30. Как формулируется теорема умножения вероятностей?

31. Имеются три урны. В первой находится 5 белых и 3 черных шара, во второй — 4 белых и 4 черных шара, в третьей — 8 белых шаров. Наугад выбирают одну из урн из нее наугад извлекают шар. Какова вероятность того, что он окажется черным?

32. Какая величина называется случайной?

33. Какая случайная величина называется дискретной?

34. Опишите схему Бернулли. Какие элементарные события повторяются в этих опытах?

35. Запишите формулу Бернулли.

36. Из урны, в которой находятся 6 белых и 9 черных шаров, извлекают шар, фиксируют его цвет, после чего возвращают шар в урну. Опыт повторяют трижды. Какова вероятность того, что из трех извлеченных при этом шаров ровно два окажутся белыми?

37. Что называется законом распределения случайной величины?

38. Какой закон распределения называется биномиальным?

39. По мишени стреляют 5 раз, причем вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Составьте закон распределения случайной величины X — попадания в цель.

40. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величиной?

41. Что называется дисперсией случайной величины?

42. Что понимается под законом больших чисел?

Ответы

2. 120; 5040. **4.** $(n-1)n$. **5.** $(n+1)n$. **6.** $(n-2)(n-1)n(n+1)$. **13.** 20; 210; 1 814 400. **16.** 28; 120; 1. **20.** 0,05. **27.** 8/15. **29.** 3/5. **31.** 7/24. **36.** 30/125. **39.**

Значения x_i	0	1	2	3	4	5
Вероятности p_i	0,16807	0,36015	0,3087	0,1323	0,02835	0,00243

Контрольное задание

Вариант 1

1. На 6 карточках было записано слово «победа». Их рассыпали и взяли снова только 4 карточки. Какова вероятность того, что получится слово «обед»?

2. В лотерее из 100 билетов имеются 5 выигрышей по 3 руб., 10 выигрышей по 2 руб. и 55 выигрышей по 1 руб. Какова вероятность на один купленный билет выиграть не менее двух рублей?

3. В ящике находятся 4 детали. Каждую деталь осматривают, выбирая стандартную. Если обнаружится дефект, то вынимают следующую. Найдите математическое ожидание для номера стандартной детали, если вероятность дефекта каждой равна 0,3.

Вариант 2

1. Собрание сочинений из четырех томов нужно поставить на полку по порядку. Вычислите вероятность того, что нужный порядок будет достигнут.

2. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей получится грань с цифрой, кратной трем?

3. Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида.

Ответы

Вариант 1. **1.** 1/360. **2.** 0,15. **3.** 1/3846. Вариант 2. **1.** 1/24. **2.** 2/3. **3.**

Значения x_i	1	2	3	4
Вероятности p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$