Элементы теории вероятности. Элементы математической статистики.

Лекция. Событие. Вероятность события.

С решением задач на событие и нахождение вероятности события Вы встречались неоднократно в школьном курсе математики.

Для решения задач используются комбинаторные конструкции.

Главный принцип — не пытаться применить готовую формулу, не выяснять, «на что» дана задача (размещения, перестановки). Следует проанализировать конструкцию, способ составления и перечисления вариантов.

1. Двоичные ответы. Человеку задают 10 вопросов. На каждый из них он отвечает «**да**» или «**нет**». Сколько имеется различных вариантов ответов на все 10 вопросов?

Для ответа на первый вопрос есть 2 варианта. Если уже построены ответы на несколько вопросов, то ответ на следующий удвоит число вариантов.

Ответ: $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^{10} = 1024$. Разумеется, в этой задаче встретилась конструкция построения слов в алфавите из двух букв.

2. Тесты с выбором ответа. Человеку предложили тест из 6 вопросов. На каждый вопрос надо дать один из предложенных 5 вариантов ответа. Сколько имеется различных ответов на все 6 вопросов теста?

Для ответа на первый вопрос есть 5 вариантов ответа. При переходе к очередному вопросу число вариантов будет увеличиваться в 5 раз.

Ответ: $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^6 = 15625$. Конструкция сохранилась. Изменилось число букв в алфавите — теперь их стало 5.

Примеры

Размещение

$$A_n^k = \frac{P_n}{P_{n-k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

$$A_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

3. Слова с различными буквами. В алфавите 10 букв. Сколько можно построить слов длиной 3 с неповторяющимися буквами?

На первое место ставим любую из 10 букв, на второе — любую, кроме той, которая уже взята первой. Получаем $10 \cdot 9$ вариантов. На третье место можно поставить любую из 8 неиспользованных букв.

Ответ: $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$. Использована конструкция размещений — на трех местах размещали (без повторений) 10 букв.

Примеры

Перестановка

$$P_n = n!$$

$$P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-m)!}}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Основным понятием теории вероятностей является понятие случайного события.

Случайным событием называется событие, которое при осуществлении некоторых условий может произойти или не произойти. Например, попадание в некоторый объект или промах при стрельбе по этому объекту из данного орудия является случайным событием.

1. Пространство событий. Рассмотрим некоторое явление (эксперимент, игру, **испытание**). Будем считать, что с явлением можно связать **элементарные события** (**исходы испытания**), из которых можно составлять более сложные события.

Примеры

1. **Бросание монеты.** У этого испытания два исхода — монета падает «орлом» или «решкой». Их можно считать элементарными событиями. Более сложные события составить трудно, но в пространство событий можно включить одно **невозможное** событие — при бросании не выпал ни «орел», ни «решка» (монета стала на ребро), и одно событие, которое произойдет наверняка, — выпадет «орел» или «решка» (такое событие называют **достоверным**).

2. **Бросание игрального кубика с шестью цифрами.** Можно выделить 6 элементарных событий — на верхней грани кубика оказывается определенная цифра. Если нас интересует событие, при котором выпадает не фиксированная цифра, а любая из каких-то заранее выбранных (например, четная цифра или цифра, бóльшая 4), то такое событие можно считать сложным.

3. **Выбор одной карты из колоды в 32 карты.** Этот пример аналогичен предыдущему. С помощью 32 элементарных событий (выбор конкретной карты) можно сформировать события, задавая свойство, которому должна удовлетворять карта (например, она должна быть картой бубновой масти).

В совокупности все рассматриваемые элементарные и сложные события составляют некоторое множество, которое будем называть **пространством событий**. В пространство событий попадет и невозможное событие (пустое множество), и достоверное событие (хоть что-нибудь произошло).

В примере 2 невозможное событие в результате бросания кости — никакая цифра не появилась, а достоверное событие — выпала любая из 6 цифр.

2. Классическое определение вероятности. Рассмотрим явление, имеющее конечное число исходов n (элементарных событий). Будем считать, что все эти исходы равноправны (равновозможны или **равновероятны**). Припишем каждому из них дробь $\frac{1}{n}$ — вероятность этого события.

Теперь возьмем сложное событие, которое определяется некоторым набором возможных исходов. Исходы, которые входят в этот набор, часто называют **благоприятными**. Пусть число благоприятных исходов равно m ($0 \leqslant m \leqslant n$). Припишем этому событию число $\frac{m}{n}$, которое и считают вероятностью данного события.

Если событию соответствует m благоприятных исходов, а всего в результате испытания может быть n равновероятных исходов, то **вероятностью** p этого события называется число $\frac{m}{n}$.

Вероятность события

$$p = \frac{m}{n},$$

где m — число благоприятных исходов; n — общее число испытаний.

Примеры

1. Вычислить вероятность выпадения четной цифры при бросании игрального кубика:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

2. Вычислить вероятность выбора карты бубновой масти:

$$\frac{8}{32} = \frac{1}{4}.$$

Вы знакомы с 3 основными свойствами вероятности:

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице

Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

3. Свойства вероятности. На примере классической вероятности легко рассмотреть многие понятия теории вероятностей, которые затем обобщаются и применяются в более сложных ситуациях.

Итак, у нас есть множество S из n равновероятных элементарных событий и множество M всех связанных с S событий. Каждый элемент множества M определяется набором благоприятных для него элементарных событий, т. е. подмножеством множества из n элементов.

Ясно, что M состоит из 2^n событий (каждое элементарное событие может произойти, а может и не произойти в результате испытания).

Если $A \in M$, т. е. A — какое-то сложное событие, то его вероятность

$$p(A) = \frac{m}{n},$$

где m — число благоприятных для него элементарных событий, которое часто обозначают так: $|A| = m$; n — число всех элементарных событий.

Два события A и B (т. е. два подмножества S) называются **несовместными**, если у этих подмножеств нет общих элементов: $A \cap B = \varnothing$. Ясно, что любые два элементарных события несовместны. В примере с бросанием кубика такие события, как «выпало четное число» и «выпало 1 или 3», несовместны. В примере с картами несовместными будут события «выпала карта бубновой масти» и «выпала карта черной масти».

Пусть A — некоторое событие. **Противоположным** ему событием называется событие не A, т. е. «не произошло A». Обозначим его через $\bar{A}$. Ясно, что $|A| + |\bar{A}| = n$, т. е. $\bar{A}$ как подмножество S состоит из всех элементов, не входящих в A (дополнение к A):

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

Действительно, если $m = |A|$, то $|\bar{A}| = n - m$ и $\frac{n-m}{n} = 1 - \frac{m}{n}$.

В итоге получим таблицу свойств вероятности

Свойства вероятности события A

1. $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
2. $p(A) = 0 \Leftrightarrow A = \varnothing$ (событие невозможно).
3. $p(A) = 1 \Leftrightarrow A = S$ (достоверное событие).
4. Если $A \cap B = \varnothing$, то $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ (несовместные события).
5. $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$ (противоположное событие).

Рассмотрим примеры вычисления вероятности.

1. Произвольно используя буквы *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е*, случайным образом пишут слово, состоящее из четырех букв (буквы могут повторяться). Какова вероятность того, что все буквы в этом слове гласные?

Общее число n возможных слов: $n = 6^4$. По условию, на каждом из четырех мест слова **независимо** пишется любая из шести букв. Благоприятное событие — слово состоит только из гласных букв (их в списке две: буквы *а* и *е*). Число «благоприятных слов»: $m = 2^4$ — на каждом из четырех мест слова пишется какая-либо из двух гласных букв.

Искомая вероятность: $p = \frac{m}{n} = \frac{2^4}{6^4} = \frac{1}{3^4} = \frac{1}{81} \approx 0{,}012$.

Алгоритм вычисления вероятности

- **Шаг 1**. Перечисление всех элементарных равновероятных событий и нахождение их числа n.
- **Шаг 2**. Выявление всех благоприятных событий и подсчет их числа m.
- **Шаг 3**. Составление дроби $p = \frac{m}{n}$.

Первые два шага являются задачами комбинаторики.

2. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что на них в сумме выпадет 6 очков?

Возможные исходы события таковы: может выпасть в сумме 2, 3, ..., 12 очков, т. е. общее количество исходов равно 11. Однако, если в первом примере все перечисленные исходы были равновероятны (это подчеркивалось тем, что каждая буква слова пишется независимо от предыдущих), то сейчас, конечно, нет. Совершенно ясно, что сумму 2 или 12 получить труднее, чем сумму 6. Разобьем событие (сумма очков на двух костях) иначе, т. е. выделим иные элементарные события, которые будут равновероятными. Представим себе, что мы различаем между собой кости (например, покрасим их в разные цвета) и запишем исход события в виде упорядоченной пары чисел от 1 до 6, показывающей, сколько очков выпало на каждой кости. Ясно теперь, что эти исходы равноправны, равновероятны, и их количество равно $6^2 = 36$. Для нахождения числа благоприятных исходов (таких пар $(a; b)$, что $a + b = 6$) придется перебрать все 36 комбинаций (см. **табл.**).

Таблица благоприятных исходов

Исход		***b***					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
a	**1**	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Из таблицы видно, что сумма 6 встречается 5 раз. Искомая вероятность равна $\frac{5}{36} \approx 0{,}14$.

Выпишем вероятности p_x для всех сумм x от 2 до 12:

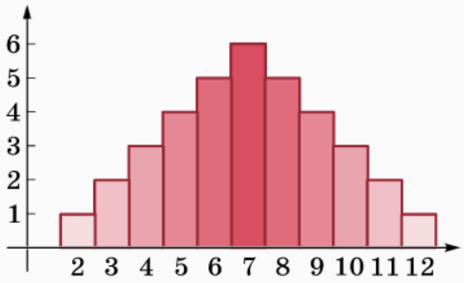
$$p_2 = p_{12} = \frac{1}{36},\ p_3 = p_{11} = \frac{2}{36},\ p_4 = p_{10} = \frac{3}{36},\ p_5 = p_9 = \frac{4}{36},\ p_6 = p_8 = \frac{5}{36},\ p_7 = \frac{6}{36}.$$

3. Бросают две игральные кости. Какова вероятность, что в сумме на них выпадет не больше четырех очков?

Сложное событие (выпадает не больше четырех очков) можно разбить на более простые: выпадает 2, 3 или 4 очка. При этом важно следующее: если произошло сложное событие (выпало не более четырех очков), то произошло хотя бы одно из более простых событий (выпало 2, или выпало 3, или выпало 4 очка); никакие два из них не могут произойти одновременно (эти события **несовместны**). В таком случае говорят, что событие A (выпало не более четырех очков) представлено в виде **суммы несовместных событий** A_2 (выпало 2 очка), A_3 (выпало 3 очка) и A_4 (выпало 4 очка).

Ясно, что $p_A = p_2 + p_3 + p_4 = \frac{1}{36} + \frac{2}{36} + \frac{3}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Диаграмма изменения вероятности



Количество вариантов, откладываемое на вертикальной оси, пропорционально вероятности выпадания определенной суммы очков, откладываемой на горизонтальной оси.

Диаграмму изменения вероятности называют также **рядом распределения** вероятностей.

Глава 11 «Элементы теории вероятности и математической статистики», учебник Башмаков М.И. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия: учеб. для студ. учреждений сред.проф. образования/ М.И. Башмаков. – 4-е изд.,стер. – М. : ИЦ «Академия», 2017, - 256 с.

В случае отсутствия печатного издания, Вы можете обратиться к Электронно-библиотечной системе.

Список использованных интернет-ресурсов:

1. https://23.edu-reg.ru/
2. https://urait.ru/