Предисловие

Настоящее пособие предназначено для учащихся техникумов и может быть с успехом использовано учащимися 10—11-х классов средней школы.

Оно начинается с вводной главы, в которую включено несколько тем для повторения школьного курса математики. Задачи и примеры этой главы помогут учащимся восстановить навыки в алгебраических и тригонометрических преобразованиях. Это дает возможность использовать книгу абитуриентам для подготовки к вступительным экзаменам в вузы.

Остальные главы разбиты на параграфы и содержат программный материал. Каждый параграф представляет собой конкретную тему курса и включает задачи, которые расположены в порядке возрастания трудности решения. Приводятся подробные решения типовых задач. В начале параграфа даются краткие теоретические сведения и формулы, необходимые для решения задач, что позволяет не отвлекаться на дополнительную литературу.

Имеется большое количество примеров и задач для самостоятельного решения. Ко всем задачам в конце книги даны ответы, а ко многим — указания и решения. В конце каждой главы даны вопросы для конспектирования. Кроме того, каждая глава содержит два варианта контрольных заданий, которые позволяют учащимся самостоятельно проверять усвоение программного материала по математике.

Предлагаемое пособие составлено на основе многолетнего опыта практической работы авторов с учащимися техникумов.

Авторы

Практические советы учащемуся

Чтобы прочно усвоить материал и овладеть умениями и навыками, нужно научиться выполнять практические задания по всем вопросам каждой темы.

Перед решением задачи необходимо внимательно разобрать ее условие, проанализировать содержание, определить исходные данные и требования данной задачи, выяснить закономерности и правила, лежащие в основе ее решения.

На такой подробный и тщательный анализ не надо жалеть ни времени, ни сил. Все это окупится умением легко и без ошибок решать задачи.

Для многих математических задач разработаны общие положения, или алгоритмы их решения. Такие задачи называются стандартными. Их решение особых трудностей не представляет. Оно сводится к распознаванию вида данной задачи по ее условию и применению соответствующего алгоритма.

Значительно труднее решать нестандартные задачи, для которых в математике нет готовых правил. Решение таких задач состоит в том, чтобы свести их к решению одной или нескольких стандартных задач. Конечно, общих рецептов для решения разнообразных задач не существует, однако рекомендуем придерживаться следующих советов.

1. Начинайте изучение условия задачи с тщательного выполнения рисунков, графиков, чертежей или таблиц. Это не только придаст наглядность условию задачи, но и в немалой степени будет способствовать ее верному решению.

2. Величины, данные в условии задачи, переведите в одну систему единиц; нарушение этого правила является распространенным источником ошибок.

3. Внимательно изучите цель, поставленную в задаче; выясните, какие теоретические положения связаны с данной задачей в целом или с некоторыми ее элементами.

4. Попытайтесь соотнести данную задачу с каким-либо типом задач, способ решения которых вам известен.

5. Попробуйте расчленить данную задачу на серию вспомогательных, последовательное решение которых может составить решение исходной задачи.

6. Если сразу не видно хода решения, то последовательно отвечайте на вопросы: что дано? что нужно найти? в чем состоит

условие задачи? достаточно ли данных, чтобы найти неизвестное? какая связь между неизвестными величинами?

7. Не следует приступать к решению задачи, не обдумав ее условия и не составив план решения.

8. Составив план решения, выполните его, убедитесь в необходимости и правильности каждого шага, проведите проверку решения и, если нужно, его исследование.

9. При вычислении окончательного числового результата обратите внимание на степень точности, чтобы точность ответа не превышала точности исходных величин.

10. Подумайте, нельзя ли было решить задачу иначе; известно, что задача может иметь несколько решений, поэтому следует выделить наиболее рациональное.

11. Если решить задачу не удается, отыщите в учебной (или популярной) литературе уже решенную задачу, похожую на данную, изучите внимательно это «готовое» решение и постарайтесь извлечь из него пользу для решения данной задачи.

12. Решив задачу, проанализируйте решение, отметьте, что нового при этом вы узнали и приобрели. Постарайтесь запомнить и усвоить те приемы, которые вы использовали. Все это пригодится при решении других задач.

13. Необходимо приучить себя к постоянному самоконтролю в процессе всей работы над задачей: приучиться проверять каждый свой шаг, оценивать его разумность, рациональность, необходимость и полезность.

В конце каждой главы пособия приводятся вопросы и задачи для конспектирования.

В самостоятельной домашней подготовке большое значение имеет умение конспектировать изучаемый материал. Предлагаем несколько советов по составлению конспекта.

Необходимо стремиться по возможности вести запись кратко и своими словами. Чем короче и отчетливее запись, чем меньше в ней механически записанных фраз, тем она лучше.

В конспект следует включать определения, чертежи, формулировки теорем и схемы их доказательств, выводы основных формул и их объяснения.

Записи следует вести аккуратно; не нужно забывать, что они делаются для того, чтобы впоследствии пользоваться ими.

Следует применять различные приемы, облегчающие пользование записями: оставлять поля или свободные строки для примечаний; красным цветом выделять самые важные места конспекта; заключать основные формулы в рамки; располагать сравниваемый материал и справочные сведения не подряд, а столбцом.

Конспект — это основное пособие при подготовке к экзамену.

После изучения темы нужно проверить и оценить проделанную вами работу, установить, с какими результатами вы пришли к концу изучения темы. С этой целью следует решить контрольные задания, предлагаемые в конце каждой главы.

Вводная глава

§ 1. Формулы сокращенного умножения и их применение

1. Формулы сокращенного умножения

Запишем все формулы сокращенного умножения:

I. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
II. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
III. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
IV. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
V. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
VI. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.
VII. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

В следующих пунктах мы рассмотрим применение этих формул.

2. Квадрат суммы и разности двух чисел

Сначала рассмотрим формулы I и II, которые можно объединить следующим образом:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

т. е. *квадрат суммы* (соответственно *разности*) *двух чисел равен квадрату первого числа, плюс (минус) удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.*

1—10. Выполнить действия:

1. а) $(x+3y)^2$; б) $(2x+3y)^2$; в) $(m^3+n^5)^2$; г) $(5x+3y)^2$; д) $(3m^5-4n^2)^2$.

Решение. а) $(x+3y)^2=x^2+2(x\cdot 3y)+(3y)^2=x^2+6xy+9y^2$;

б) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x\cdot 3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$;

в) $(m^3+n^5)^2=(m^3)^2+2(m^3n^5)+(n^5)^2=m^6+2m^3n^5+n^{10}$.

Напомним, что при возведении степени числа в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются: $(m^3)^2=m^6$, $(n^5)^2=n^{10}$;

г) $(5x-3y)^2=(5x)^2-2\cdot 5x\cdot 3y+(3y)^2=25x^2-30xy+9y^2$;

д) $(3m^5-4n^2)^2=(3m^5)^2-2\cdot 3m^5\cdot 4n^2+(4n^2)^2=9m^{10}-24m^5n^2+16n^4$.

2. $(x+3)^2$. **3.** $(5x-2y)^2$. **4.** $(a^2-b^2)^2$.

5. $(a^2+1)^2$. **6.** $(c^3-1)^2$. **7.** $(a-0{,}5)^2$.

8. $(m^2n^3-mn)^2$. **9.** $\left(\frac{1}{2}xy^2+x\right)^2$. **10.** $(2x^m-3y^n)^2$.

11—15. Представить в виде квадрата двучлена следующие трехчлены:

11. а) x^2+2x+1; б) $m^2-4mn+4n^2$.

Решение. а) $x^2+2x+1=(x)^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=(x+1)^2$;

б) $m^2-4mn+4n^2=(m)^2-2(m\cdot 2n)+(2n)^2=(m-2n)^2$.

12. $m^2-6mn+9n^2$. **13.** $4a^2+4ab+b^2$.

14. $m^6+2m^3n^4+n^8$. **15.** $25x^2+20xy+4y^2$.

16—21. Дополнить до полного квадрата двучлена следующие выражения:

16. $m^2-2mn+?$. **17.** $25x^2+?+49b^2$.

18. $4a^2+12ab+?$. **19.** $1-2a+?$

20. $?-10b+25b^2$. **21.** $a^6-?+b^4$.

22—26. Выделить квадрат суммы или разности:

22. $a^2+6a+13$.

Решение. $a^2+6a+13=a^2+6a+9+4=(a+3)^2+4$.

23. x^2+8x. **24.** x^2-2x+3.

25. $x^2-10x+27$. **26.** x^2+6x-3.

27—33. Используя формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, вычислить:

27. а) 51^2; б) 39^2.

Решение. а) $51^2=(50+1)^2=50^2+2\cdot 50\cdot 1+1=2500+100+1=$ $=2601$;

б) $39^2=(40-1)^2=40^2-2\cdot 40\cdot 1+1^2=1600-80+1=1521$.

28. 103^2. **29.** 99^2. **30.** 78^2. **31.** 33^2.

32. $10{,}5^2$. **33.** $5{,}1^2$. **34.** $6{,}9^2$. **35.** $10{,}2^2$.

3. Куб суммы и разности двух чисел

Рассмотрим теперь формулы III и IV:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

т. е. *куб суммы* (соответственно *разности*) *двух чисел равен кубу первого числа, плюс (минус) утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс (минус) куб второго числа.*

36—45. Выполнить действия:

36. а) $(a+2b)^3$; б) $(5a-b)^3$; в) $(2a+3b)^3$; г) $(m^3-n^2)^3$.

Решение.

а) $(a+2b)^3=a^3+3a^2(2b)+3a(2b)^2+(2b)^3=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$;

б) $(5a-b)^3=(5a)^3+3(5a)^2(-b)+3\cdot 5a(-b)^2+(-b)^3=125a^3-$ $-75a^2b+15ab^2-b^3$;

в) $(2a+3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2\cdot 3b+3\cdot 2a(3b)^2+(3b)^3=8a^3+36a^2b+$ $+54ab^2+27b^3$;

г) $(m^3-n^2)^3=(m^3)^3+3(m^3)^2(-n^2)+3m^3(-n^2)^2+(-n^2)^3=m^9-$ $-3m^6n^2+3m^3n^4-n^6$.

37. $(2+a)^3$. **38.** $(x-2)^3$. **39.** $(x+3)^3$.

40. $(c-3d)^3$. **41.** $(3x+5y)^3$. **42.** $(a^2+b^2)^3$.

43. $(a^3-b^3)^3$. **44.** $(2m^2-3n^4)^3$. **45.** $(x^n-1)^3$.

46. Доказать, что:

$a^3+3ab(a+b)+b^3=(a+b)^3$; $a^3-3ab(a-b)-b^3=(a-b)^3$.

4. Разность квадратов двух чисел

Рассмотрим формулу V:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

т. е. *произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.*

47—55. Выполнить действия:

47. а) $(a+1)(a-1)$; б) $(2a+3)(2a-3)$; в) $(m^3-n^5)(n^5+m^3)$; г) $(3m^2-5n^2)(3m^2+5n^2)$.

Решение. а) $(a+1)(a-1)=a^2-1^2=a^2-1$;

б) $(2a+3)(2a-3)=(2a)^2-3^2=4a^2-9$;

в) $(m^3-n^5)(n^5+m^3)=(m^3)^2-(n^5)^2=m^6-n^{10}$;

г) $(3m^2-5n^2)(3m^2+5n^2)=(3m^2)^2-(5n^2)^2=9m^4-25n^4$.

48. $(5x-y)(5x+y)$. **49.** $(2a+3b)(2a-3b)$.

50. $(3y+5x)(5x-3y)$. **51.** $(c^3+d^3)(c^3-d^3)$.

52. $(2xy-1)(2xy+1)$. **53.** $(1+3ab)(1-3ab)$.

54. $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$. **55.** $(a^n+b^n)(a^n-b^n)$.

56—65. Используя формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, вычислить:

56. а) $29\cdot 31$; б) 86^2-14^2.

Решение. а) $29\cdot 31=(30-1)(30+1)=30^2-1^2=900-1=899$; б) $86^2-14^2=(86+14)(86-14)=100\cdot 72=7200$.

57. $61\cdot 59$. **58.** $19{,}9\cdot 20{,}1$. **59.** $15{,}2\cdot 14{,}8$.

60. $7{,}2\cdot 6{,}8$ **61.** $4{,}01\cdot 3{,}99$. **62.** $33\cdot 27$.

63. 35^2-25^2. **64.** 64^2-36^2. **65.** 37^2-23^2.

5. Сумма и разность кубов двух чисел

Рассмотрим, наконец, формулы VI и VII:

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3,$$

т. е. *произведение суммы* (соответственно *разности*) *двух чисел на неполный квадрат разности* (*суммы*) *этих чисел равно сумме* (*разности*) *кубов этих чисел.*

66—72. Применяя формулы суммы и разности кубов, вычислить:

66. а) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$; б) $(x+3)(x^2-3x+9)$; в) $(x-1)(x^2+$ $+x+1)$; г) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$.

Решение. а) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$;

б) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+27$;

в) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$;

г) $(2x-3)(4x^2+6x+9)=(2x)^3-3^3=8x^3-27$.

67. $(a+1)(a^2-a+1)$. **68.** $(2a+3)(4a^2-6a+9)$.

69. $(x-2)(x^2+2x+4)$. **70.** $(1+m^2)(1-m^2+m^4)$.

71. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$. **72.** $\left(\frac{1}{2}a-2b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+ab+4b^2\right)$.

73—76. Упростить выражения:

73. $2x^3+9-(x+1)(x^2-x+1)$.

74. $a(a+2)(a-2)-(a-3)(a^2+3a+9)$.

75. $3(m-1)^2+(m-2)(m^2-2m+4)-(m+1)^3$.

76. $3(x+2)^2+(2x-1)^2-7(x+3)(x-3)$.

6. Решение примеров на все формулы сокращенного умножения

77. Упростить выражение

$$\frac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\frac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}.$$

Решение. В числителе и знаменателе каждой дроби вынесем за скобки общий множитель:

$$\frac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\frac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}=\frac{3(a^2+ab+b^2)}{4(a+b)}\cdot\frac{2(a^2-b^2)}{9(a^3-b^3)}.$$

Используя формулы разности квадратов и разности кубов, получим

$$\frac{3(a^2+ab+b^2)\cdot 2(a-b)(a+b)}{4(a+b)\cdot 9(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 9}=\frac{1}{6}$$

78. Выполнить действия:

$$2n-\left(\frac{2n-3}{n+1}-\frac{n+1}{2-2n}-\frac{n^2+3}{2n^2-2}\right)\frac{n^3+1}{n^2-n}.$$

Решение. Сначала выполним действия в скобках:

$$\frac{2n-3}{n+1}-\frac{n+1}{2-2n}-\frac{n^2+3}{2n^2-2}=\frac{2n-3}{n+1}-\frac{n+1}{2(1-n)}-\frac{n^2+3}{2(n^2-1)}=$$

$$=\frac{2n-3}{n+1}+\frac{n+1}{2(n-1)}-\frac{n^2+3}{2(n^2-1)}=\frac{(2n-3)(n-1)\cdot 2+(n+1)(n+1)-(n^2+3)}{2(n^2-1)}=$$

$$=\frac{4n^2-6n-4n+6+n^2+2n+1-n^2-3}{2(n^2-1)}=\frac{4n^2-8n+4}{2(n^2-1)}=\frac{4(n-1)^2}{2(n-1)(n+1)}=\frac{2(n-1)}{n+1}.$$

Затем произведем умножение:

$$\frac{2(n-1)}{n+1}\cdot\frac{n^3+1}{n^2-n}=\frac{2(n-1)(n+1)(n^2-n+1)}{(n+1)n(n-1)}=\frac{2(n^2-n+1)}{n}.$$

Наконец, выполним вычитание:

$$2n-\frac{2(n^2-n+1)}{n}=\frac{2(n^2-(n^2-n+1))}{n}=\frac{2(n^2-n^2+n-1)}{n}=\frac{2(n-1)}{n}.$$

79—85. Выполнить указанные действия:

79. $\left[\left(\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{x^3-y^3}\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right):\frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right]\frac{3}{x+y}.$

80. $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1-c)-a}{bc}.$

81. $\left[\frac{a^2}{a^2-b^2}-(a^2-ab+b^2):\frac{a^3+b^3}{a}\right]\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}.$

82. $\frac{1-ax+(a+x)x}{2ax-a^2x^2-1}:\left[1-\frac{a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2}\right].$

83. $\left(\frac{a}{a+2n}-\frac{a+2n}{2n}\right)\left(\frac{a}{a-2n}-1+\frac{8n^3}{8n^3-a^3}\right).$

84. $1+\left(a-\frac{1}{1-a}\right):\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}.$

85. $-\frac{x^2}{x+y}-\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{y-x}\right).$

§ 2. Степень числа

Возведение в степень. Правило знаков
Действия со степенями
Нулевой показатель степени
Отрицательный показатель степени
Дробный показатель степени
Решение примеров на все действия со степенями
Показательные уравнения

1. Возведение в степень. Правило знаков

Степень действительного числа a с натуральным показателем n есть произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^1=a;\quad a^2=a\cdot a;\quad a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a.}_{n\ \text{раз}}$$

Например,

$$2^5=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{5\ \text{раз}}=32;\qquad(-3)^4=\underbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)}_{4\ \text{раза}}=81.$$

Действительное число a называют *основанием степени*, а натуральное число n — *показателем степени.*

Справедливы следующие правила:

Чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень каждый сомножитель отдельно, а результаты перемножить:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

Чтобы возвести в степень дробь, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель отдельно и первый результат разделить на второй, т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

86—97. Возвести в степень следующие одночлены:

86. $(-3)^5$. **87.** $(0,1)^4$. **88.** 5^3. **89.** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

90. $(3ab)^2$. **91.** $(0,2x)^3$. **92.** $(3a^2b^4)^3$. **93.** $\left(-\frac{x^2y}{z^3}\right)^4$.

94. $(5a^4b^2c)^4$. **95.** $\left(-\frac{0,2a^3bc}{d^2}\right)^3$. **96.** $\left(1\frac{1}{4}a^2b\right)^3$. **97.** $\left(-\frac{2}{3}a^2b^3c\right)^6$.

Имеют место следующие свойства степеней, которые мы в дальнейшем будем называть *правилом знаков.*

1. *Любая степень положительного числа есть число положительное.* Например,

$$2^4 = 16;\ 5^3 = 125;\ \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27};\ (0,1)^5 = 0,00001.$$

2. *Четная степень отрицательного числа есть число положительное.* Так,

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4;\ \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}.$$

3. *Нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное.* Например,

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27;\ \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) \times$$
$$\times \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}.$$

2. Действия со степенями

Сформулируем следующие правила действий со степенями, имеющими одинаковые основания:

I. *При умножении степеней основание остается прежним, а показатели степеней складываются:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Например,

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7;\ a^3 \cdot a = a^{3+1} = a^4;\ b^5 \cdot b^{-3} = b^{5-3} = b^2;\ x \cdot x^{-3} =$$
$$= x^{1-3} = x^{-2}.$$

II. *При делении степеней основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются:*

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Например,

$$a^8 : a^3 = a^{8-3} = a^5;\quad a^3 : a = a^{3-1} = a^2;\quad a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2};$$
$$a : a^4 = a^{1-4} = a^{-3}.$$

III. *При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются:*

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Например,

$$(2^3)^2 = 2^6;\quad (a^2)^3 = a^6;\quad (b^{-3})^6 = b^{-18};\quad (b^{-1/3})^6 = b^{-2};\quad (x^{-1/2})^{-8} = x^4;$$
$$(x^{2\sqrt{2}})^3 = x^{6\sqrt{2}}.$$

IV. *При извлечении корня из степени основание остается прежним, а показатель степени делится на показатель корня:*

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

Например,

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{6/3} = a^2;\quad \sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3;\quad \sqrt[5]{x^{15}} = x^{15/5} = x^3;$$
$$\sqrt[5]{x^2} = x^{2/5};\quad \sqrt[3]{x^7} = x^{7/3};\quad \sqrt{x} = x^{1/2}.$$

98—104. Произвести указанные действия:

98. $7a^3b^{-1}\cdot 2ab^3$.

99. $4\frac{1}{2}a^4x^{-3}y^{-2}\cdot 2a^{-4}x^3y^5$.

100. $a^8 : a^{-1};\ x^{-2} : x;\ x^2 : x^2;\ x^{-2} : x^2$.

101. $10a^3b^{-2} : 5ab^{-5};\ 25a^{-3}b^{-2}x^2 : 5a^{-4}b^{-2}x^3$.

102. $(a^{-2})^4;\ (a^2)^{-4};\ (a^{-2})^{-4}$.

103. $(2a^2b^{-3})^3;\ \left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2}\right)^{-2}$

104. $\sqrt[3]{25a^2c^3};\quad \sqrt{\sqrt{\sqrt{a^5}}}$.

3. Нулевой показатель степени

При делении степеней одного и того же числа в случае равенства показателей степеней делимого и делителя получается нулевой показатель степени: $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$.

Однако нуль в качестве показателя степени не имеет того значения, которое мы придаем нулю в обычном понимании, так как нельзя повторить число сомножителем нуль раз. Поэтому условились считать, что $a^0 = 1$, т. е. по определению всякое число в нулевой степени равно единице (при $a \neq 0$).

Перечисленные выше правила I—IV применимы к нулевому показателю: $a^m \cdot a^0 = a^m$; $a^m : a^0 = a^m$; $(a^m)^0 = a^{m\cdot 0} = a^0 = 1$.

105—107. Возвести в нулевую степень:

105. $(-1)^0$; 1227^0; $(3{,}75)^0$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^0$.

106. $\left(\frac{6{,}5a^2b^3}{x^3y^5}\right)^0$; $(-1{,}2a^3b^4c^{-3})^0$.

107. $(1-3{,}6)^0$; $\left[\frac{(7{,}2)^{3/4}-1}{6{,}28^3}\right]^0$; $\left[\left[(6{,}2-a^3)^{-2}\right]^0\right]^{-3/4}$.

4. Отрицательный показатель степени

При делении степеней одного и того же числа в случае, когда показатель делимого меньше показателя делителя, получается отрицательный показатель степени; например, $a^5:a^8=a^{5-8}=a^{-3}$.

За степень с отрицательным показателем принимается дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель — тому же числу, но с положительным показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя. Следовательно,

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad (a\neq 0).$$

108—110. Возвести в отрицательную степень:

108. а) 2^{-3}; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; г) $(-0{,}2)^{-3}$.

Решение. а) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=9$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$;

г) $(-0{,}2)^{-3}=\frac{1}{(-0{,}2)^3}=\frac{1}{-0{,}008}=-125$.

109. 5^{-3}; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; $(0{,}3)^{-3}$. **110.** 8^{-1}; $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $(0{,}5)^{-3}$.

Заметим, что всякое дробное алгебраическое выражение можно представить в виде целого алгебраического выражения с отрицательным показателем. Для этого нужно все сомножители знаменателя записать в числителе, взяв их с отрицательными показателями.

111—113. Записать без знаменателя выражения:

111. а) $\frac{1}{a^3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{a^2b}$.

Решение. а) $\frac{1}{a^3}=a^{-3}$; б) $\frac{1}{3}=3^{-1}$; в) $\frac{2}{a^2b}=2a^{-2}b^{-1}$.

112. $\frac{1}{x^4}$; $\frac{1}{x^7}$; $\frac{3}{x}$; $\frac{5}{x^3}$; $-\frac{7}{x^2}$.

113. $\frac{1}{a^3b^2c}$; $\frac{3}{a(a-b)^2}$; $\frac{1}{2^6}$; $\frac{1}{3a^2(b-c)^3}$; $\frac{1}{5a^3(b+c)}$.

5. Дробный показатель степени

Из правила IV действий со степенями следует, что при извлечении корня из степени может получиться дробный показатель степени: $\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$ $(a>0)$.

Степень положительного числа с дробным показателем означает корень, показатель степени которого равен знаменателю, а показатель степени подкоренного числа равен числителю дробного показателя, т. е. $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$.

Например,

$$a^{3/4}=\sqrt[4]{a^3};\ a^{1/3}=\sqrt[3]{a};\ a^{7/5}=\sqrt[5]{a^7};\ a^{-3/2}=\frac{1}{a^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{a^3}}.$$

114—119. Произвести указанные действия:

114. $\sqrt[4]{a}:a^{3/4}$. **115.** $\sqrt[3]{3a^2b}:4ab^3$.

116. $\sqrt[12]{x^3}:x^{1/4}$. **117.** $\sqrt{a^{1/2}}:\sqrt{a^{-1/3}}$.

118. $2a^{1/2}x^{1/2}\cdot 5a^{1/3}x^{1/2}$.

119. $20a^{-2}b^{1/2}c^{2/3}:4a^{-3}b^{1/2}c^{3/4}$.

6. Решение примеров на все действия со степенями

120. Вычислить $\left(\frac{9}{16}\right)^{-1/10}:\left(\frac{25}{36}\right)^{-3/2}-\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-1/2}\right]^{-2/5}\left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$.

Решение. Выполним последовательно действия:

1) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-1/10}=\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-1/10}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-1/5}=\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}$;

2) $\left(\frac{25}{36}\right)^{-3/2}=\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^{-3/2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}=\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{216}{125}$;

3) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-1/2}\right]^{-2/5}=\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}$; 4) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.

Используя полученные результаты, находим

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}\cdot\frac{125}{216}-\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}\cdot\frac{125}{216}=0.$$

121. Вычислить $0{,}5^0\cdot\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0{,}25}\cdot 0{,}36^{-0{,}5}\cdot 0{,}1^{-2}$.

Решение. Имеем:

1) $0{,}5^0=1$; 2) $\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0{,}25}=\left(\frac{6}{5}\right)^1=\frac{6}{5}$;

3) $(0{,}36)^{-0{,}5}=[(0{,}6)^2]^{-0{,}5}=(0{,}6)^{-1}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$; 4) $(0{,}1)^{-2}=10^2=100$.

Подставив найденные значения, получим

$$1\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot 100=200.$$

122—128. Выполнить действия:

122. $\left[4^{-1/4}+\left(\frac{1}{2^{-3/2}}\right)^{-4/3}\right]\left[4^{-0{,}25}-(2\sqrt{2})^{-4/3}\right]$.

123. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-3/4}+343^{1/3}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-2/3}\cdot 0{,}81^{-0{,}5}$.

124. $(0{,}04)^{-1{,}5}\cdot(0{,}125)^{-1/3}+125^{2/3}\cdot 3{,}8^{0}$.

125. $32^{2/5}\cdot 0{,}5-(\sqrt{25^3})^0-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$.

126. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-3/4}\cdot\left[-(3,6)^0+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$.

127. $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-0{,}5}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^0\cdot 0{,}1^{-2}:(0{,}81)^{-0{,}5}$.

128. $4^{-0{,}5}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-4/3}+(0{,}25)^{-1{,}5}-\left[\left(-\frac{5}{7}\right)^{-6}\right]^0$.

129. Сократить дробь $\frac{x^{3/4}-25x^{1/4}}{x^{1/2}+5x^{1/4}}$.

Решение. Разложив числитель и знаменатель дроби на множители и сократив ее, получим

$$\frac{x^{3/4}-25x^{1/4}}{x^{1/2}+5x^{1/4}}=\frac{x^{1/4}(x^{1/2}-25)}{x^{1/4}(x^{1/4}+5)}=\frac{(x^{1/4}-5)(x^{1/4}+5)}{(x^{1/4}+5)}=x^{1/4}-5.$$

130—136. Упростить выражения:

130. $\frac{a}{a^{1/2}b^{1/2}+b}+\frac{b}{a^{1/2}b^{1/2}+a}-\frac{a+b}{a^{1/2}b^{1/2}}$.

131. $\frac{x^{1/2}}{x^{1/2}-6}-\frac{3}{x^{1/2}+6}+\frac{x}{36-x}$.

132. $\left(\frac{1-y^{1,5}}{1-y^{0,5}}+y^{0,5}\right)\left(\frac{1+y^{1,5}}{1+y^{0,5}}-y^{0,5}\right)$.

133. $\frac{2}{p^{1/2}-q^{1/2}}-\frac{2p^{1/2}}{p^{3/2}+q^{3/2}}\cdot\frac{p-p^{1/2}q^{1/2}+q}{p^{1/2}-q^{1/2}}$

134. $\left[(a^{1/3}-x^{1/3})^{-1}(a-x)-\frac{a+x}{a^{1/3}+x^{1/3}}\right]\cdot 2(ax)^{-1/3}$.

135. $\left[\frac{(a^{3/4}-b^{3/4})(a^{3/4}+b^{3/4})}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\sqrt{ab}\right]\cdot\frac{2\sqrt{2,5}(a+b)^{-1}}{\sqrt{10}}$.

136. $\left[x(1-x)^{-2/3}+\frac{x}{(1-x)^{5/3}}\right]:[(1-x)^{1/3}(1-2x+x^2)^{-1}]$.

7. Показательные уравнения

Показательными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестное входит в показатель степени.

Показательные уравнения решаются после преобразований по правилам I—IV с использованием дробных, нулевых и отрицательных показателей степеней.

Сначала рассмотрим простейшие показательные уравнения, т. е. такие, левую и правую части которых сразу можно привести к одному основанию.

137—178. Решить показательные уравнения:

137. $5^x=625$.

Решение. Записав 625 в виде 5^4, получим $5^x=5^4$, откуда $x=4$.

138. $8^x=32$.

Решение. Имеем $32=2^5$; $8^x=(2^3)^x=2^{3x}$. Следовательно, $2^{3x}=2^5$, откуда $3x=5$, т. е. $x=5/3$.

139. $16^x=1/4$.

Решение. Так как $16=2^4$, $1/4=2^{-2}$, то уравнение примет вид $2^{4x}=2^{-2}$, откуда $4x=-2$, т. е. $x=-1/2$.

140. $\sqrt{5^x}=\sqrt[3]{25}$.

Решение. Имеем $\sqrt{5^x}=5^{x/2}$; $\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5^2}=5^{2/3}$; следовательно, $5^{x/2}=5^{2/3}$; $x/2=2/3$; $x=4/3$.

141. $5{,}2^{(x+2)(x+3)}=1$.

Решение. Любое отличное от нуля число в нулевой степени равно единице; поэтому можно записать $1=5{,}2^0$. Таким образом, $5{,}2^{(x-2)(x+3)}=5{,}2^0$, откуда $(x-2)(x+3)=0$. Согласно свойству произведения, $x-2=0$ или $x+3=0$, т. е. $x=2$, $x=-3$.

142. $3^x=243$. **143.** $2^{-x}=16$. **144.** $9^{-x}=27$.

145. $25^x=\frac{1}{5}$. **146.** $7^x=\frac{1}{49}$. **147.** $2^{x+1}=32$.

148. $\sqrt{7^x}=\sqrt[3]{343}$. **149.** $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^8$. **150.** $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^5$.

151. $2^{x-1}=1$. **152.** $8^{x^2-9x+20}=1$. **153.** $a^{(x+5)(x-3)}=1$.

В более сложных случаях применяют правила I—IV.

154. $(0{,}25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+3}}$.

Решение. Приведем все степени к основанию 2: $0{,}25=1/4=2^{-2}$; $256=2^8$. Значит, $(2^{-2})^{2-x}=\frac{2^8}{2^{x+3}}$. Применяя правило деления степеней, имеем

$$2^{-4+2x}=2^{8-x-3};\ 2^{-4+2x}=2^{5-x};\ -4+2x=5-x;\ 2x+x=5+4;$$
$$3x=9;\ x=3.$$

155. $0{,}25^{2-\sqrt{5x+1}}=4\cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$. **156.** $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0{,}04^x$.

157. $2^{5x^2-14x+1}=16^{x^2-x-5}$. **158.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{2-x}=\frac{243}{32}$.

159. $8^{\frac{5}{3}x-4}-4^{6-\frac{3}{2}x}=0$. **160.** $27^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}\cdot 9^{-x}=\frac{81^x}{9\sqrt{3}}$.

Следующий тип показательных уравнений решается вынесением множителя с наименьшим показателем степени за скобки.

161. $2^x+2^{x-1}-2^{x-3}=44$.

Решение. Так как наименьшим показателем степени является $x-3$, то вынесем 2^{x-3} за скобки:

$$2^{x-3}\cdot(2^3+2^2-1)=44;\ 2^{x-3}(8+4-1)=44;\ 2^{x-3}\cdot 11=44.$$

Разделив обе части уравнения на 11, получим

$$2^{x-3}=4;\ 2^{x-3}=2^2;\ x-3=2;\ x=5.$$

162. $7^x-3\cdot7^{x-1}+7^{x+1}=371.$

Решение. Наименьшим показателем степени является $x-1$; поэтому вынесем за скобки 7^{x-1}:

$$7^{x-1}\cdot(7^1-3\cdot1+7^2)=371;\ 7^{x-1}(7-3+49)=371;$$
$$7^{x-1}\cdot53=371;\ 7^{x-1}=7;\ x-1=1;\ x=2.$$

163. $9\cdot5^{x+1}-5^x=5500.$ **164.** $3^x-3^{x-2}=72.$
165. $3^{3x+1}-2\cdot3^{3x}=27.$ **166.** $3\cdot2^x-2^{x-1}+5\cdot2^{x-2}=120.$
167. $5^{2x}+5^{2x+1}=150.$ **168.** $3^{x+1}+3^x=108.$
169. $7^x-7^{x-1}=6.$ **170.** $3^{2z-1}+3^{2z-2}-3^{2z-4}=315.$

Рассмотрим еще один тип показательных уравнений. Это — уравнение, которое с помощью подстановки $a^x=y$ сводится к квадратному уравнению.

171. $7^{2x}-48\cdot7^x=49.$

Решение. Полагая $7^x=y$, получим квадратное уравнение $y^2-48y-49=0$. Решим его. Здесь $a=1$, $b=-48$, $c=-49$; $D=b^2-4ac=(-48)^2-4\cdot1(-49)=2304+196=2500$; $\sqrt{D}=50$. Используя формулу $y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, находим

$$y_1=\frac{48-50}{2}=\frac{-2}{2}=-1;\quad y_2=\frac{48+50}{2}=\frac{98}{2}=49.$$

Так как $7^x=y$, то $7^x=-1$ (это равенство невозможно, поскольку показательная функция может принимать только положительные значения); $7^x=49$; $7^x=7^2$, т. е. $x=2$. Итак, получаем ответ: $x=2$.

172. $5\cdot5^{2x}-6\cdot5^x+1=0.$

Решение. Положим $5^x=y$; тогда получим $5y^2-6y+1=0$. Здесь $a=5$, $b=-6$, $c=1$; $D=b^2-4ac=36-4\cdot5\cdot1=36-20=16$, $\sqrt{D}=4$. Следовательно, $y_1=\frac{6-4}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $y_2=\frac{6+4}{10}=\frac{10}{10}=1$.

Поскольку $y_1=1/5$, $y_2=1$, имеем $5^x=1/5$, $5^x=1$; тогда $5^x=1/5$, $5^x=5^{-1}$, т. е. $x=-1$; $5^x=1$, $5^x=5^0$, т. е. $x=0$. Итак, получаем ответ: $x=-1$, $x=0$.

173. $4\cdot2^{2x}-33\cdot2^x+8=0.$ **174.** $5\cdot5^{2x}+43\cdot5^x+24=0.$
175. $8^{2x}+6\cdot8^x-7=0.$ **176.** $3^{2x}-4\cdot3^x=45.$
177. $7^{2x}-8\cdot7^x+7=0.$ **178.** $3^{2x+1}-18=25\cdot3^x.$

§ 3. Логарифмы

Определение логарифма
Свойства логарифмов
Теоремы о логарифмах произведения, частного, степени и корня
Логарифмические уравнения

1. Определение логарифма

Определение. *Логарифмом* числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить заданное (логарифмируемое) число.

Логарифм обозначается так: $\log_a N = x$, где a — основание логарифма, N — заданное (логарифмируемое) число.

Из определения логарифма можно записать показательное уравнение

$$a^x = N.$$

179—183. Записать с помощью знака логарифма следующие равенства:

179. $5^2 = 25$.

Решение. Так как основание степени есть 5, показатель степени (логарифм) равен 2, а степень равна 25, то $\log_5 25 = 2$.

180. $7^3 = 343$. **181.** $8^{-3} = \frac{1}{512}$. **182.** $10^{-2} = 0{,}01$. **183.** $10^0 = 1$.

184—188. Записать без знака логарифма следующие равенства:

184. $\log_{10} 1000 = 3$.

Решение. Здесь основание степени равно 10, показатель степени равен 3, а логарифмируемое число есть 1000. Поэтому $10^3 = 1000$.

185. $\log_{10} 0{,}001 = -3$. **186.** $\log_{16} 4 = \frac{1}{2}$.

187. $\log_5 \frac{1}{25} = -2$. **188.** $\log_b p = y$.

189—198. Найти логарифмы данных чисел по известным основаниям:

189. а) $\log_2 16$; б) $\log_6 36$; в) $\log_8 1$.

Решение. а) Здесь нужно найти такой показатель степени x, что $2^x = 16$. Решая это уравнение, получаем $2^x = 2^4$, откуда $x = 4$. Итак, $\log_2 16 = 4$.

б) Из уравнения $6^x = 36$ находим $6^x = 6^2$, т. е. $x = 2$. Значит, $\log_6 36 = 2$.

в) В данном случае имеем уравнение $8^x = 1$. Это возможно только при условии, что $x = 0$, откуда $\log_8 1 = 0$.

190. $\log_5 125$. **191.** $\log_{1/3} 27$. **192.** $\log_3 \frac{1}{81}$.

193. $\log_3 1$. **194.** $\log_5 5\sqrt[3]{5}$. **195.** $\log_{1/2} 16$.

196. $\log_{\sqrt{2}} 4$. **197.** $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$. **198.** $\log_{0{,}04} 5$.

Определение логарифма позволяет найти не только сам логарифм, но и логарифмируемое число и основание степени.

199—205. Определить x по заданным условиям:

199. а) $\log_4 x = -3$; б) $\log_x \frac{1}{8} = \frac{3}{2}$.

Решение. а) По определению логарифма, запишем $4^{-3}=x$, откуда $x=\frac{1}{64}$.

б) Согласно определению логарифма получаем уравнение $x^{3/2}=\frac{1}{8}$. Так как $\frac{1}{8}=2^{-3}$ и $x^{3/2}=\sqrt{x^3}$, то оно примет вид $\sqrt{x^3}=2^{-3}$. Возведем обе части в квадрат:

$$(\sqrt{x^3})^2=(2^{-3})^2;\quad x^3=2^{-6};\quad x=2^{-2};\quad x=\frac{1}{4}.$$

200. $\log_x 0{,}125=2$. **201.** $\log_x \frac{1}{27}=-2$.

202. $\log_{3\sqrt{3}} x=-\frac{2}{3}$. **203.** $\log_{3,5} x=0$.

204. $\log_{2\sqrt{2}} x=4$. **205.** $\log_x 9=-4$.

206—209. Используя определение логарифма, вычислить:

206. $2\log_5 25+3\log_2 64$. **207.** $\log_4(\log_2 16)^2$.

208. $5\cdot 3^{\log_3 4}$. **209.** $\log_3(\log_2(\log_{10}100))$.

2. Свойства логарифмов

Отметим основные свойства логарифмов.

1. *Отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов.*
2. *При любом основании a ($a>0$, $a\neq 1$) логарифм единицы равен нулю.*
3. *Логарифм числа, равного основанию, всегда есть единица.*

Логарифмы чисел по основанию 10 принято обозначать $\lg x$, а логарифмы чисел по основанию e, где $e=2{,}7182...$, принято обозначать $\ln x$. Таким образом, $\log_{10} x=\lg x$, $\log_e x=\ln x$.

3. Теоремы о логарифмах произведения, частного, степени и корня

▲ **Теорема 1.** *Логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов сомножителей по тому же основанию:*

$$\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2.$$

▲ **Теорема 2.** *Логарифм частного двух чисел равен разности логарифмов делимого и делителя по тому же основанию:*

$$\log_a\frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2.$$

▲ **Теорема 3.** *Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания:*

$$\log_a(N^m)=m\log_a N.$$

▲ **Теорема 4** (следствие из теоремы 3). *Логарифм корня равен* *логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель степени корня:*

$$\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{\log_a N}{m} = \frac{1}{m}\log_a N.$$

Прологарифмировать некоторое выражение, заданное в виде произведения, частного, степени или корня, — значит выразить логарифм этого выражения через логарифмы составляющих его чисел. Это позволяют сделать теоремы 1—4.

Так как в приведенных теоремах не рассматриваются логарифмы суммы или разности, то логарифмировать сумму или разность будем как единое целое (не рассматривая логарифмы отдельных чисел).

210—220. Прологарифмировать следующие выражения:

210. $x = \frac{ab}{c^3}$.

Решение. Применив сначала теорему 2, а затем теоремы 1 и 3, получим

$$\log x = \log(ab) - \log(c^3) = \log a + \log b - 3\log c.$$

Здесь и в следующих примерах основание логарифма мы не пишем, так как полученные равенства справедливы при любом основании.

211. $x = \sqrt{\frac{3a^2b}{c^5}}$.

Решение. Применим последовательно теоремы 2, 1 и 3. Находим

$$\log x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3a^2b}{c^5}\right) = \frac{1}{2}[\log(3a^2b) - \log(c^5)] = \frac{1}{2}\log(3a^2b) - \\ - \frac{1}{2}\log(c^5) = \frac{1}{2}(\log 3 + 2\log a + \log b) - \frac{5}{2}\log c = \frac{1}{2}\log 3 + \log a + \\ + \frac{1}{2}\log b - \frac{5}{2}\log c.$$

212. $x = \frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^2c^3}$.

Решение. Применив теоремы 2, 1 и 3, получим

$$\log x = \log[a^2(a+b)^3] - \log[(a-b)^2c^3] = \log a^2 + \log(a+b)^3 - \log(a-b)^2 - \\ - \log c^3 = 2\log a + 3\log(a+b) - 2\log(a-b) - 3\log c.$$

213. $x = a^3b^3$. **214.** $x = \frac{5a^3c^2}{b^4}$.

215. $x = \frac{2a^2(a+b)}{3b^3}$. **216.** $x = 7a^3b\sqrt[8]{c}$.

217. $x = \sqrt[3]{7a^3b}$. **218.** $x = \frac{a^3\sqrt{2b}}{8c^3y^2}$.

219. $x = \sqrt[5]{\frac{a^2b}{(a-b)^3}}$. **220.** $x = \frac{a^5\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

По данному результату логарифмирования мы можем найти исходное выражение. Это действие называется *потенцированием*.

221—228. По известному логарифму числа x найти это число:

221. $\log x = \log a + \log b - \log c$.

Решение. В силу утверждений, обратных теоремам 1 и 2, запишем $\log x = \log \frac{ab}{c}$, откуда $x = \frac{ab}{c}$.

222. $\log x = 3\log a + 2\log(a+b) - \frac{1}{2}\log c$.

Решение. Согласно утверждениям, обратным теоремам 3, 4, 1 и 2, получим

$$\log x = \log a^3 + \log(a+b)^2 - \log\sqrt{c} = \log\frac{a^3(a+b)^2}{\sqrt{c}};\quad \log x = \log\frac{a^3(a+b)}{\sqrt{c}};$$

$$x = \frac{a^3(a+b)}{\sqrt{c}}.$$

223. $\log x = \frac{1}{3}(\log a + \log b) - \frac{1}{2}\log(a+c)$.

Решение. Используя утверждения, обратные теоремам 1, 3, 4 и 2, имеем

$$\log x = \frac{1}{3}\log(ab) - \frac{1}{2}\log(a+c) = \log\sqrt[3]{ab} - \log\sqrt{a+c} = \log\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}};$$

$$\log x = \log\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}};\quad x = \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}}.$$

224. $\log x = 3\log a - 2\log b + \log(a+c)$.

225. $\log x = 2\log 2 + \log(a+b) + \log(a-b)$.

226. $\log x = \frac{\log m + \log n}{5}$.

227. $\log x = \frac{1}{2}\left[\log a + \frac{1}{3}(\log b - \log(b-c))\right]$.

228. $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{3}{2}\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(a-b) - \frac{5}{3}\log c$.

4. Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то равны и их логарифмы при данном основании и, обратно, если равны логарифмы чисел при данном основании, то равны и соответствующие им числа.

При этом необходимо учитывать, что при любом a ($a>0$, $a\neq 1$) логарифмы отрицательных чисел и нуля не существуют.

229—240. Решить логарифмические уравнения:

229. $\log_3(12x+4) - \log_3(x-7) = \log_3 9$.

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$\log_3 \frac{12x+4}{x-7} = \log_3 9.$$

Так как равны логарифмы и их основания, то равны и логарифмируемые числа:

$$\frac{12x+4}{x-7} = 9.$$

Полагая $x-7 \neq 0$, приведем дробь к общему знаменателю и решим полученное уравнение:

$$12x+4 = 9x-63; \quad 3x = -67; \quad x = -22\frac{1}{3}.$$

Подставив значение $x = -22\frac{1}{3}$ в уравнение, видим, что при этом значении x выражения $12x+4$ и $x-7$ отрицательны. Так как логарифмы отрицательных чисел не существуют, то $x = -22\frac{1}{3}$ — посторонний корень, а само уравнение не имеет решений.

230. $\lg(x-1) + \lg(x+1) = \lg 2.$

Решение. Имеем

$$\lg((x-1)(x+1)) = \lg 2,$$

откуда

$$(x-1)(x+1) = 2; \quad x^2 - 1 = 2; \quad x^2 = 3; \quad x_1 = \sqrt{3}; \quad x_2 = -\sqrt{3}.$$

Корень x_2 является посторонним, поскольку при $x_2 = -\sqrt{3}$ имеем $-\sqrt{3}-1<0$ и $-\sqrt{3}+1<0$ и, следовательно, логарифмы этих выражений не существуют. Итак, получаем ответ: $x = \sqrt{3}$.

231. $\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = 2 - 3\log_4 2.$

Решение. Представив число 2 как логарифм числа 16 по основанию 4, перепишем данное уравнение в виде

$$\log_4(x+3) - \log_4(x-1) = \log_4 16 - 3\log_4 2.$$

Отсюда получаем

$$\log_4 \frac{x+3}{x-1} = \log_4 \frac{16}{8}, \quad \text{или} \quad \frac{x+3}{x-1} = 2.$$

Решаем это уравнение:

$$x+3 = 2(x-1); \quad x+3 = 2x-2; \quad x = 5.$$

Для проверки подставим значение $x = 5$ в данное уравнение:

$\log_4(5+3) - \log_4(5-1) = 2 - 3\log_4 2;$

$\log_4 8 - \log_4 4 = \log_4 16 - \log_4 8; \quad \log_4 \frac{8}{4} = \log \frac{16}{8}; \quad \log_4 2 = \log_4 2.$

Итак, $x = 5$.

Рассмотрим еще один тип логарифмических уравнений.

232. $\frac{1}{12}\lg^2 x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}\lg x.$

Решение. Это — логарифмическое уравнение, приводимое к квадратному. Полагая $\lg x = z$, получим уравнение

$$\frac{1}{12}z^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}z \quad \text{или} \quad z^2 + 3z - 4 = 0.$$

Здесь $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1(-4) = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{D} = 5$. Используя формулу $z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, находим $z_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$, $z_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$.

Так как $\lg x = z$, то $\lg x = -4$ или $\lg x = 1$. Следовательно, $x_1 = 10^{-4} = 0{,}0001$, $x_2 = 10$.

233. $\lg x = 3 - \lg(2x + 10)$.

234. $\lg(x - \sqrt{3}) + \lg(x + \sqrt{3}) = 0$.

235. $\lg(127 + x^3) - 3\lg(x + 1) = 0$.

236. $\frac{1}{2}\lg(x - 3) + \lg\sqrt{2x + 2} = \lg(x + 1)$.

237. $\log_2(2^x + 3) + \log_2(2^x - 3) = \log_2 7$.

238. $\log_3(5^x - 1) + \log_3(5^x + 1) = 1 + 3\log_3 2$.

239. $1 + \log_3(8^{\sqrt{x}} + 1) = \log_3 15$.

240. $\frac{1}{2}\lg(3x - 2) + \lg\sqrt{11 - x} = \frac{1}{2}\lg(35x - 4x^2 + 3)$.

§ 4. Иррациональные выражения

1. Основное свойство корня

Корнем n-й степени (n — натуральное число) из действительного числа a называется такое действительное число x, при возведении которого в степень n получается число a, т. е. $x = \sqrt[n]{a}$, если $x^n = a$.

Например, $\sqrt[5]{32} = 2$, так как $2^5 = 32$; $\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$, так как $(b^{1/n})^n = b$.

Неотрицательное значение корня n-й степени из неотрицательного числа называется *арифметическим корнем*.

Например, $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt{(a+1)^2} = a + 1$ при условии $a + 1 \geqslant 0$.

Следует помнить, что при решении иррациональных уравнений их корни всегда рассматриваются как арифметические.

Иррациональным выражением относительно какой-либо переменной называется выражение, в котором эта переменная находится под знаком корня (радикала).

В этом параграфе мы будем рассматривать только арифметические значения корня (т. е. неотрицательные значения).

Основное свойство корня заключается в следующем: *величина корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить (или разделить) одновременно на одно и то же отличное от нуля число,* т. е.

$$\sqrt[m]{x^n}=\sqrt[am]{x^{an}}.$$

Это свойство позволяет производить преобразования иррациональных выражений.

Корни разных степеней можно привести к одинаковым показателям.

241. Привести к одному показателю: а) $\sqrt[5]{a^2}$ и $\sqrt[3]{a}$; б) $\sqrt[5]{2a^3}$ и $\sqrt[10]{a^4b}$.

Решение. а) Наименьшим общим кратным показателей корней 5 и 3 является число 15. Дополнительный множитель к первому числу равен 3, а ко второму равен 5. Умножив показатель степени и показатель корня на дополнительный множитель, находим

$$\sqrt[5]{a^2}=\sqrt[5\cdot 3]{a^{2\cdot 3}}=\sqrt[15]{a^6};\quad \sqrt[3]{a}=\sqrt[3\cdot 5]{a^{1\cdot 5}}=\sqrt[15]{a^5}.$$

б) Наименьшее общее кратное показателей корней 5 и 10 равно 10, а дополнительные множители равны соответственно 2 и 1. Тогда получим $\sqrt[5]{2a^3}=\sqrt[5\cdot 2]{(2a^3)^2}=\sqrt[10]{4a^6}$.

Если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем степени корня, то оба показателя можно разделить на этот множитель.

242. Преобразовать: а) $\sqrt[6]{a^2}$; б) $\sqrt[8]{(a+1)^6}$; в) $\sqrt[6]{8a^6x^3}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$; б) $\sqrt[8]{(a+1)^6}=\sqrt[4]{(a+1)^3}$; в) $\sqrt[6]{8a^6x^3}=$ $=\sqrt[6]{2^3a^6x^3}=\sqrt{2a^2x}$.

243—247. Привести к общему показателю корни:

243. $\sqrt{2}$ и $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[3]{4}$.

244. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$.

245. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ и $\sqrt[6]{\frac{3}{4}}$.

246. $\sqrt[3]{a^2}$ и $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt{3m}$ и $\sqrt[3]{3m}$.

247. $\sqrt{2ab}$ и $\sqrt[3]{4ab^2}$.

248—252. Сократить показатели корней и показатели подкоренных выражений:

248. $\sqrt[4]{a^2}$; $\sqrt[8]{x^4}$; $\sqrt[6]{m^3}$; $\sqrt[10]{x^5}$.

249. $\sqrt[6]{b^4}$; $\sqrt[12]{n^4}$; $\sqrt[16]{a^{12}}$; $\sqrt[20]{x^{15}}$.

250. $\sqrt[4]{25x^2y^2}$; $\sqrt[6]{27m^3n^3}$; $\sqrt[6]{9a^4b^2}$.

251. $\sqrt[6]{64x^9y^3z^{12}}$; $\sqrt[16]{a^{4n}b^{8n}}$; $\sqrt[3n]{x^{2n}y^{4n}}$.

252. $\sqrt[8]{16x^{12}y^4}$; $\sqrt[4]{\dfrac{4m^6}{9n^2}}$; $\sqrt[9]{\dfrac{8a^3b^{12}}{27c^3d^9}}$.

2. Извлечение корня из произведения, дроби, степени

I. *Чтобы извлечь корень из произведения, нужно извлечь его из каждого сомножителя отдельно и результаты перемножить:*

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}.$$

II. *Чтобы извлечь корень из дроби, нужно извлечь корень из числителя и знаменателя отдельно и первый результат разделить на второй:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

III. *Чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, нужно разделить показатель степени на показатель корня:*

$$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m.$$

253. Извлечь корень: а) $\sqrt{4\cdot 9}$; б) $\sqrt{\dfrac{49}{36}}$; в) $\sqrt[3]{a^6}$; г) $\sqrt{9a^2}$.

Решение. а) Согласно правилу I, $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$.

б) Используя правило II, находим $\sqrt{\dfrac{49}{36}}=\dfrac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}}=\dfrac{7}{6}$.

в) В силу правила III, $\sqrt[3]{a^6}=a^2$.

г) Согласно правилам I, III, $\sqrt{9a^2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{a^2}=3a$.

254—257. Извлечь корень из произведения:

254. $\sqrt{25\cdot 64}$; $\sqrt{100\cdot 4}$; $\sqrt{81\cdot 36}$.

255. $\sqrt{16\cdot 25\cdot 9}$; $\sqrt{49\cdot 36\cdot 100}$.

256. $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; $\sqrt[3]{64\cdot 125}$; $\sqrt[3]{27\cdot 125\cdot 8}$.

257. $\sqrt[4]{16\cdot 81}$; $\sqrt[5]{32\cdot 243}$.

258—259. Извлечь корень из дроби:

258. $\sqrt{\dfrac{49}{25}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{\dfrac{64}{729}}$; $\sqrt[4]{\dfrac{1}{16}}$.

259. $\sqrt{3\dfrac{1}{16}}$; $\sqrt[3]{2\dfrac{10}{27}}$; $\sqrt[4]{\dfrac{16}{81}}$.

260—261. Извлечь корень из степени:

260. $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{5^3}$; $\sqrt[3]{\left(\dfrac{2}{3}\right)^6}$; $\sqrt[4]{3^8}$.

261. $\sqrt{x^4}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[5]{m^{10}}$; $\sqrt[6]{y^{18}}$.

262—265. Извлечь корень:

262. $\sqrt[3]{8x^6}$; $\sqrt{\frac{1}{4}x^2y^4}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{27}a^3b^9}$.

263. $\sqrt[4]{a^4b^8c^{12}}$; $\sqrt[3]{64a^3y^6z^3}$; $\sqrt[5]{32m^5n^{20}}$.

264. $\sqrt{\frac{4a^2b^2}{25c^4d^6}}$; $\sqrt[3]{\frac{8a^6b^3c^9}{27x^{12}}}$; $\sqrt[3]{\frac{64a^3b^9}{27x^3y^6}}$.

265. $\sqrt{\frac{25(a+b)^2}{(c-d)^4}}$; $\sqrt[3]{\frac{(a+b)^{3n}}{(x+y)^{6n}}}$; $\sqrt[n]{\frac{(a+b)^{2n}}{a^{3n}(a-b)^n}}$.

3. Преобразование корней

Используя перечисленные выше правила, можно преобразовать (упростить) корни.

Если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что из некоторых извлекается корень, то можно вынести множитель за знак корня.

266—273. Вынести множитель за знак корня:

266. а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{a^8}$; в) $\sqrt[3]{16x^4}$.

Решение. а) $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[3]{a^8}=\sqrt[3]{a^6\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{a^2}=a^2\sqrt[3]{a^2}$;

в) $\sqrt[3]{16x^4}=\sqrt[3]{8x^3\cdot 2x}=\sqrt[3]{8x^3}\cdot\sqrt[3]{2x}=2x\sqrt[3]{2x}$.

267. $\sqrt{27}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{60}$.

268. $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{250}$; $\sqrt[3]{72}$.

269. $\sqrt{9a}$; $\sqrt{2a^2}$; $\sqrt{5a^4}$.

270. $\sqrt[3]{8m^2}$; $\sqrt[3]{5n^3}$; $\sqrt[3]{2x^6}$; $\sqrt[3]{16y^3}$.

271. $\sqrt{9a^2bc^3}$; $\sqrt[3]{27x^4y^2z^3}$; $\sqrt[4]{81c^6d^5}$.

272. $\sqrt[n]{a^{2n}b^5}$; $\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

273. $\sqrt{\frac{3(x+y)^2}{4}}$; $\sqrt{\frac{5(a+b)^2}{9(a-b)}}$; $\sqrt{\frac{a+b}{4(a-b)^2}}$.

Иногда бывает полезно ввести под знак корня множители, стоящие перед ним. Для этого необходимо возвести множитель в степень корня, а затем умножить на него подкоренное выражение.

274—277. Ввести множитель под знак корня:

274. а) $2\sqrt{3}$; б) $a^2\sqrt[3]{a}$.

Решение. а) $2\sqrt{3}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{12}$; б) $a^2\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^6\cdot a}=\sqrt[3]{a^7}$.

275. $2\sqrt{2}$; $7\sqrt{10}$; $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; $a\sqrt{a}$.

276. $2ab\sqrt{\frac{1}{2}a}$; $\frac{1}{2}\sqrt{4x}$; $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54a}$.

277. $(a+b)\sqrt{a+b}$; $2a^2\sqrt[3]{3ab^2}$.

Следует уметь освобождаться от знаменателя в подкоренном выражении. Для этого числитель и знаменатель подкоренного выражения нужно умножить на такой множитель, чтобы в знаменателе получилось выражение, из которого можно извлечь корень.

278—283. Освободиться от дроби в подкоренном выражении:

278. а) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt{\frac{5}{a}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{b}{a^2}}$.

Решение. а) $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sqrt{\frac{5}{a}}=\sqrt{\frac{5a}{a\cdot a}}=\sqrt{\frac{5a}{a^2}}=\frac{\sqrt{5a}}{\sqrt{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{5a}$;

в) $\sqrt[5]{\frac{b}{a^2}}=\sqrt[5]{\frac{ba^3}{a^2\cdot a^3}}=\sqrt[5]{\frac{a^3b}{a^5}}=\frac{\sqrt[5]{a^3b}}{\sqrt[5]{a^5}}=\frac{1}{a}\sqrt[5]{a^3b}$.

279. $\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$.

280. $\sqrt{\frac{5}{12}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$; $\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$.

281. $\sqrt{\frac{m}{2n}}$; $\sqrt{\frac{3m}{2a}}$; $\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}$.

282. $\sqrt[5]{\frac{b}{a^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{c}{a^2}}$; $\sqrt[5]{\frac{3}{8}}$.

283. $\sqrt[6]{\frac{a}{(a+b)^2}}$; $\sqrt{\frac{2}{a-b}}$; $\sqrt[5]{\frac{5c}{(a-b)^2}}$.

284—287. Привести корни к простейшему виду:

284. $\sqrt{\frac{12}{xy}}$; $\sqrt{\frac{49b^3}{5a}}$; $\sqrt{\frac{4c^3}{9a^5b}}$; $\sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}$.

285. $\sqrt[3]{\frac{b^2}{8a}}$; $\sqrt[3]{\frac{3y}{2x^2}}$; $\sqrt{25m^2-50n^2}$.

286. $\sqrt{4x^6y^2+12x^4y^3}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}}$.

287. $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}-\frac{b^8}{a^6}}$; $\sqrt[5]{\frac{x^3}{a^3}+\frac{y}{a}}$.

4. Действия с корнями

Чтобы сложить или вычесть иррациональные выражения, нужно записать их соответственно со знаком плюс или минус и привести подобные корни (подобными корнями называются корни одной степени, имеющие одинаковые подкоренные выражения).

Чтобы умножить корни одинаковой степени, нужно перемножить подкоренные выражения и из произведения извлечь корень той же степени:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}.$$

Чтобы разделить корни одинаковой степени, нужно разделить подкоренные выражения и из частного извлечь корень той же степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Чтобы возвести корень в степень, нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив корень той же степени:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

Чтобы извлечь корень из корня, нужно перемножить показатели степеней корней, оставив прежним подкоренное выражение:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}.$$

288—307. Выполнить действия:

288. $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}$.

Решение. Преобразуем корни: $2\sqrt{8}=2\sqrt{4\cdot 2}=4\sqrt{2}$; $7\sqrt{18}=7\sqrt{9\cdot 2}=7\cdot 3\sqrt{2}=21\sqrt{2}$; $5\sqrt{72}=5\sqrt{36\cdot 2}=5\cdot 6\sqrt{2}=30\sqrt{2}$; $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$.

Подставим полученные выражения и приведем подобные члены:

$$2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}=4\sqrt{2}-21\sqrt{2}+30\sqrt{2}-5\sqrt{2}=8\sqrt{2}.$$

289. а) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$; б) $(\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt{x})^{10}$; в) $(\sqrt[3]{a^2b})^4$.

Решение. а) Имеем $\sqrt{a}=\sqrt[6]{a^3}$; $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}$; следовательно, $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a^5}$.

б) Возведем подкоренные выражения в степень:

$$(\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt{x})^{10}=\sqrt[5]{x^{20}}\cdot\sqrt{x^{10}}=x^4\cdot x^5=x^9.$$

в) $(\sqrt[3]{a^2b})^4=\sqrt[3]{a^8b^4}=\sqrt[3]{a^6a^2b^3b}=a^2b\sqrt[3]{a^2b}$.

290. $(2\sqrt{18}+3\sqrt{8})+(3\sqrt{32}-\sqrt{50})$.

291. $(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40})-(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000})$.

292. $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{16a})+(\sqrt[4]{81a}-\sqrt[4]{625a})$.

293. $(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y})-(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x})$.

294. $\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$.

295. $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{y}\cdot\sqrt[3]{y}$.

296. $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}$.

297. $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$; $\sqrt{3m}\cdot\sqrt[4]{3m}\cdot\sqrt[8]{3m^3}$.

298. $\sqrt{90}:\sqrt{18}$; $\sqrt{360}:\sqrt{60}$; $\sqrt{60}:\sqrt{15}$.

299. $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}$; $\sqrt[4]{9a^3}:\sqrt[4]{\frac{a}{9}}$; $\sqrt[5]{m^4}:\sqrt[15]{m^2}$.

300. $\sqrt[4]{8}:\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{81}:\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$.

301. $(\sqrt{3})^4$; $(\sqrt[5]{7})^{10}$; $(\sqrt[4]{5})^8$.

302. $(\sqrt[4]{x^3})^3$; $(\sqrt[5]{y^2})^3$; $(\sqrt[6]{n^5})^7$.

303. $(\sqrt[3]{a^2b^2})^2$; $(\sqrt[3]{xy^2})^4$; $(\sqrt[5]{a^4b^2})^2$.

304. $\sqrt{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$.

305. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}b^5}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4y^8}}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{m^2n^6}}$.

306. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6b^3c}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^3a^6}}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{4m}b^{6n}}}$.

307. $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$; $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\sqrt{m}}}$.

5. Освобождение знаменателя дроби от корня

При вычислении дробных выражений, знаменатели которых содержат корни, в некоторых случаях полезно предварительно преобразовать дробь так, чтобы ее знаменатель не содержал корней. Это достигается умножением числителя и знаменателя дроби на одно и то же специально подобранное выражение.

308—317. Освободиться от корня в знаменателе:

308. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{40}}$; в) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$; г) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$.

Решение. а) Чтобы освободиться от корня, умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{10}$ и учитывая, что $\sqrt{40}=$ $=\sqrt{4\cdot 10}=2\sqrt{10}$, получаем

$$\frac{3}{\sqrt{40}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

в) Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt[5]{3^3}$:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2}{3}\sqrt[5]{27}.$$

г) Умножив числитель и знаменатель на сопряженный двучлен $3-\sqrt{5}$, получим

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

309. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{18}{\sqrt{6}}$; $\frac{5}{\sqrt{10}}$.

310. $\frac{a}{\sqrt{a}}$; $\frac{m}{\sqrt{m}}$; $\frac{2x^2}{\sqrt{x}}$; $\frac{5n}{3\sqrt{n}}$.

311. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; $\frac{5}{2\sqrt[3]{25}}$; $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; $\frac{5}{\sqrt[5]{125}}$.

312. $\frac{a}{\sqrt[7]{x^4}}$; $\frac{a}{\sqrt[6]{a}}$; $\frac{a}{\sqrt[n]{x^{n-2}}}$.

313. $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$; $\frac{a+b}{2\sqrt{a-b}}$; $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$.

314. $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; $\frac{18}{\sqrt{7}-1}$; $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$.

315. $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; $\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt{x+2}-2}$

316. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}+1}$.

317. $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$; $\frac{b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$.

6. Иррациональные уравнения

Иррациональными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестная величина находится под знаком корня.

Чтобы решить иррациональное уравнение, нужно предварительно освободиться от корней, подкоренные выражения которых содержат неизвестное. Чаще всего этого добиваются возведением обеих частей уравнения в квадрат. Однако при этом могут появиться так называемые «посторонние» решения, т. е. такие, которые не удовлетворяют данному уравнению. Поэтому необходимо выполнять проверку полученных результатов с помощью их подстановки в первоначальное уравнение.

318—335. Решить уравнения:

318. $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{x^2-1})^2=(\sqrt{3})^2;\ x^2-1=3;\ x^2=4;\ x_1=2,\ x_2=-2.$$

Получили два решения. Проверим каждое из них: если $x=2$, то $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, т. е. $\sqrt{3}=\sqrt{3}$; если $x=-2$, то $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, т. е. $\sqrt{3}=\sqrt{3}$. Таким образом, значения $x=2$ и $x_2=-2$ являются корнями данного уравнения.

319. $\sqrt{5-x}+2=7$.

Решение. Обособим радикал и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{5-x}=7-2;\ (\sqrt{5-x})^2=5^2;\ 5-x=25;\ -x=20;\ x=-20.$$

Производим проверку: $\sqrt{5-(-20)}+2=7$; $\sqrt{25}+2=7$; $5+2=7$. Следовательно, $x=-20$ — решение уравнения.

320. $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$.

Решение. Выполним сначала умножение корней:

$$\sqrt{(x-1)(2x+6)}=x+3;\ \sqrt{2x^2-2x+6x-6}=x+3;\ \sqrt{2x^2+4x-6}=x+3.$$

Возведем теперь обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{2x^2+4x-6})^2=(x+3)^2;\ 2x^2+4x-6=x^2+6x+9;\ x^2-2x-15=0.$$

Решаем квадратное уравнение. Здесь $a=1$, $b=-2$, $c=-15$, $D=b^2-4ac=4-4\cdot1\cdot(-15)=64$, $\sqrt{D}=8$; поэтому

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ x_1=\frac{2-8}{2}=-3;\ x_2=\frac{2+8}{2}=5;\ x_1=-3,\ x_2=5.$$

Проверим оба корня.

При $x=-3$ имеем $\sqrt{(-3)-1}\cdot\sqrt{2(-3)+6}=-3+3$. Мы видим, что первый радикал не имеет смысла в области действительных чисел; поэтому $x=-3$ — посторонний корень.

При $x=5$ имеем $\sqrt{5-1}\cdot\sqrt{5\cdot 2+6}=5+3$; $\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}=8$; $2\cdot 4=8$. Итак, корнем данного уравнения является $x=5$.

321. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$.

Решение. Обособим один из радикалов и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$(\sqrt{2x+5})^2=(8-\sqrt{x-1})^2;\ 2x+5=64-16\sqrt{x-1}+(x-1).$$

Перенесем $16\sqrt{x-1}$ в левую часть, а все остальные члены — в правую часть:

$$16\sqrt{x-1}=64+x-1-2x-5;\ 16\sqrt{x-1}=58-x.$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(16\sqrt{x-1})^2=(58-x)^2;\ 256x-256=3364-116x+x^2;\ x^2-372x+3620=0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение. Так как $a=1$, $b=-372$, $c=3620$, $D=b^2-4ac=(-372)^2-4\cdot 1\cdot 3620=138\,384-14\,480=123\,904$; $\sqrt{D}=352$, то

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{372-352}{2}=10;\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{372+352}{2}=362.$$

Проверим оба значения $x_1=10$; $x_2=362$.

Если $x=10$, то $\sqrt{2\cdot 10+5}+\sqrt{10-1}=8$; $\sqrt{25}+\sqrt{9}=8$; $5+3=8$; $8=8$.

Если $x=362$, то $\sqrt{2\cdot 362+5}+\sqrt{362-1}=8$; $\sqrt{729}+\sqrt{361}=8$; $27+19\neq 8$; следовательно, $x=362$ — посторонний корень.

Корнем данного уравнения служит $x=10$.

322. $x-5=\sqrt{x+1}$.

323. $\sqrt{3x-5}-4=5$.

324. $\sqrt{x^2-3x-1}+7=2x$.

325. $x-\sqrt{25-x^2}=7$.

326. $\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x}$.

327. $5\sqrt{x}-7=3\sqrt{x}-1$.

328. $\dfrac{15}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{3x+5}=\sqrt{10-x}$.

329. $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=-2$.

330. $\sqrt{4x-3}\cdot\sqrt{3x-5}=3x-1$.

331. $7x-2=3\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{3x-8}$.

332. $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$.

333. $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$.

334. $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}-9=0$.

335. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$.

§ 5. Тригонометрия

Обобщение понятия угла. Определение и основные свойства тригонометрических функций

Основные тригонометрические тождества

Формулы сложения аргументов

1. Обобщение понятия угла. Определение и основные свойства тригонометрических функций

Из геометрии мы знаем, что *углом* называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки, называемой вершиной угла.

Рассмотрим новое определение угла. Пусть одна из сторон угла на плоскости совпадает с положительным направлением оси Ox (луч l_1), а вершина угла — с началом координат. На луче l_2 на расстоянии $R=1$ от начала возьмем точку A. Тогда при вращении луча l_2 точка A опишет окружность с радиусом $R=1$, которую мы будем называть *единичной окружностью* (рис. 1).

Угол, полученный при повороте отрезка OA, можно охарактеризовать двумя способами — радианной и градусной мерой.

При градусном измерении за 1° принимается 1/360 полного угла. Тогда полный угол равен 360°, развернутый 180°, прямой угол 90°. В радианной мере величина угла измеряется длиной соответствующей ему дуги. Например, величина полного угла равна длине окружности, т. е. в данном случае* 2π, величина развернутого угла есть π, величина прямого угла равна $\pi/2$. Часто вместо записи величины угла в виде бесконечной десятичной дроби ее записывают в долях π. Так, величину прямого угла записывают $\pi/2$ вместо 1,57.

Градусный и радианный способы измерения углов равноправны и используются достаточно широко.

В некоторых случаях используют доли градуса — минуты и секунды. Минута — это 1/60 доля градуса и записывается так: $1'=(1/60)^\circ$; секунда — это 1/60 доля минуты и записывается так: $1''=(1/60)'$.

Отметим, что при градусном измерении обозначения нужно обязательно записывать (знаки °, ′, ″), а радианное обозначение всегда пропускают, записывая просто число радианов: 1; 0,75; 4,5; π.

Часто приходится переходить от градусного измерения к радианному и обратно. При этом используют следующие формулы:

$$\alpha^\circ=\frac{180^\circ\cdot\alpha_{\text{рад}}}{\pi}; \tag{1}$$

$$\alpha_{\text{рад}}=\frac{\pi\cdot\alpha^\circ}{180^\circ}. \tag{2}$$

* Здесь $\pi=3{,}141596$ — отношение длины окружности к диаметру. При вычислениях будем пользоваться значением $\pi\approx3{,}14$.

336. Записать в градусной мере углы: а) $\pi/6$; б) $\pi/8$; в) $3\pi/4$.

Решение. Применяя формулу (1), получим:

а) $\alpha=\frac{180°(\pi/6)}{\pi}=\frac{180°}{6}=30°$;

б) $\alpha=\frac{180°(\pi/8)}{\pi}=\frac{180°}{8}=22°30'$;

в) $\alpha=\frac{180°(3\pi/4)}{\pi}=\frac{180°\cdot 3\pi}{\pi\cdot 4}=135°$.

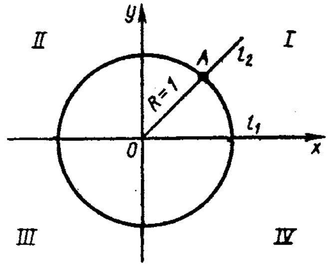


Рис. 1

337. Записать в радианной мере углы: а) 30°; б) 45°; в) 315°; г) 540°.

Решение. Используя формулу (2), находим:

а) $\alpha=\frac{\pi\cdot 30°}{180°}=\frac{\pi}{6}$; б) $\alpha=\frac{\pi\cdot 45°}{180°}=\frac{\pi}{4}$;

в) $\alpha=\frac{\pi\cdot 315°}{180°}=\frac{\pi\cdot 7}{4}=\frac{7\pi}{4}$; г) $\alpha=\frac{\pi\cdot 540°}{180°}=3\pi$.

338. Перевести из градусной меры в радианную: 60°, 120°, 150°, 225°, 240°, 300°, 345°.

339. Перевести из радианной меры в градусную: $\pi/3$; $5\pi/6$; $7\pi/3$; $11\pi/4$; $5\pi/2$.

Луч l_2 единичной окружности можно вращать в двух направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки. При движении луча l_2 против часовой стрелки будем считать полученный угол положительным, а при движении этого луча по часовой стрелке — отрицательным (рис. 2).

340. Построить на единичной окружности углы: $\alpha=45°$; $\alpha=-60°$; $\alpha=150°$; $\alpha=-210°$, $\alpha=-315°$.

341. Отметить на единичной окружности углы: $\beta=3{,}14$; $\beta=3$; $\beta=4$; $\beta=-4$; $\beta=-6$.

При построении угла на единичной окружности луч l_1 всегда совпадает с положительным направлением оси Ox, а луч l_2 вращается в соответствии с заданным условием. При этом луч l_2

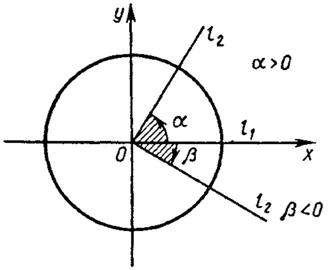


Рис. 2

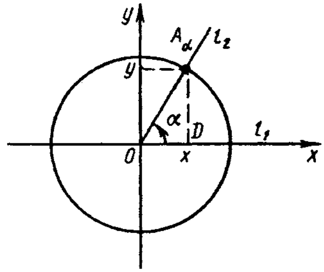


Рис. 3

пересечется с единичной окружностью в точке A_α (рис. 3). Точка A_α, как всякая точка плоскости, имеет свои координаты $(x; y)$.

Определение 1. *Синусом* угла α называется ордината точки A_α пересечения подвижного луча и единичной окружности;

косинусом угла α называется абсцисса точки A_α;

тангенсом угла α называется отношение ординаты точки A_α к ее абсциссе;

котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки A_α к ее ординате.

Если угол α оканчивается в I четверти, то абсцисса и ордината точки $A_\alpha(x; y)$ являются длинами катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1. В этом случае определения тригонометрических функций угла α совпадают с определениями тригонометрических функций острого угла треугольника.

Если угол α оканчивается в любой другой четверти, то при нахождении значений тригонометрических функций необходимо учитывать знаки координат точки $A_\alpha(x; y)$.

342. Найти значения всех тригонометрических функций угла, если точка A_α единичной окружности имеет координаты (5/13; 12/13).

Решение. Имеем $\sin\alpha = 12/13$; $\cos\alpha = 5/12$; $\operatorname{tg}\alpha = 2/5$; $\operatorname{ctg}\alpha = 5/12$.

343. Найти значения всех тригонометрических функций угла, если точка A_β единичной окружности имеет координаты (0,6; —0,8).

Решение. Находим $\sin\beta = -0{,}8$; $\cos\beta = 0{,}6$; $\operatorname{tg}\beta = -1{,}33$; $\operatorname{ctg}\beta = -0{,}75$.

344. Найти значения тригонометрических функций углов для следующих точек единичной окружности: а) $A(-4/5; -3/5)$; б) $B(-9/41; 40/41)$.

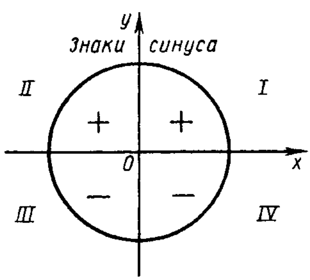


Рис. 4

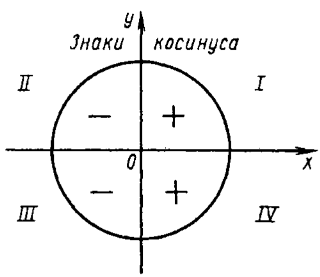


Рис. 5

Знаки тригонометрических функций зависят от того, в какой четверти оканчивается заданный угол.

Так как синусом угла называется ордината точки A_α, то синус положителен в I и II четвертях и отрицателен в III и IV четвертях (рис. 4).

Поскольку косинусом угла называется абсцисса точки A_α, косинус положителен в I и IV четвертях и отрицателен во II и III четвертях (рис. 5).

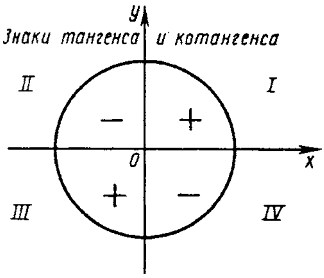


Рис. 6

Так как тангенс угла есть отношение ординаты точки A_α к ее абсциссе, то тангенс положителен, когда знаки координат совпадают, и отрицателен, когда знаки координат различны (рис. 6). Такие же знаки имеет и котангенс. Следовательно, тангенс и котангенс положительны в I и III четвертях и отрицательны во II и IV четвертях.

345—357. Определить знаки следующих выражений:

345. $\sin 35°$; $\cos 167°$; $\operatorname{tg} 3$; $\operatorname{ctg}(-1{,}5)$.

Решение. Так как 35° — угол I четверти, то $\sin 35° > 0$; далее, 167° — угол, оканчивающийся во II четверти, и, значит, $\cos 167° < 0$; 3 радиана — угол, лежащий во II четверти, поэтому $\operatorname{tg} 3 < 0$; наконец, $-1{,}5$ радиана — угол, оканчивающийся в IV четверти (отсчитываем его по оси Ox по часовой стрелке), т. е. $\operatorname{ctg}(-1{,}5) < 0$.

346. $\sin 167°$; $\cos 215°$, $\operatorname{tg} 135°$; $\operatorname{ctg} 240°$.

347. $\sin\frac{5\pi}{4}$; $\cos\frac{11\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

348. $\sin 1$; $\cos 2$; $\operatorname{tg} 3{,}5$; $\operatorname{ctg} 6$.

349. $\sin(-115°)$; $\cos(-265°)$; $\operatorname{tg}(-179°)$; $\operatorname{ctg}(-272°)$.

350. $\sin(-1{,}5)$; $\cos(-1)$; $\operatorname{tg}(-0{,}5)$; $\operatorname{ctg}(-5{,}5)$.

351. $\sin 5° \cos 115° \operatorname{tg} 225° \operatorname{ctg} 235°$.

352. $\cos 68° \sin 246° \operatorname{tg} 135° \operatorname{ctg} 72°$.

353. $\operatorname{tg} 35° \operatorname{tg} 135° \operatorname{tg} 235° \operatorname{tg} 335°$.

354. $\sin 179° \cos 271° \operatorname{tg} 365° \operatorname{ctg}(-5°)$.

355. $\operatorname{tg} 3 \operatorname{ctg} 2 \sin 1 \cos 0{,}5$.

356. $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$.

357. $\cos(-3{,}5) \operatorname{tg} 7 \sin(-4) \cos(-6)$.

Значения тригонометрических функций некоторых углов приведены в следующей таблице:

Углы α / Функции	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не сущ.	0	Не сущ.	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не сущ.	0	Не сущ.

358—370. Вычислить значения следующих выражений:

358. $3\sin\frac{\pi}{3}-2\cos\frac{\pi}{6}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

Решение. Из таблицы берем значения $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$ и подставляем в данное выражение:

$$3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}-4\cdot 0=\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

359. $4a^2\sin^4\frac{\pi}{6}-6ab\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+\left(b\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^2$.

Решение. Поскольку $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$, получаем

$$4a^2\sin^4\frac{\pi}{6}-6ab\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+\left(b\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^2=4a^2\left(\frac{1}{2}\right)^4-6ab\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(b\cdot 1)^2=$$
$$=4a^2\cdot\frac{1}{16}-6ab\cdot\frac{1}{3}+b^2=\frac{a^2}{4}-2ab+b^2.$$

360. $\sin 0+\cos 60^\circ+3\operatorname{tg}45^\circ$.

361. $2\sin 30^\circ-\operatorname{tg}45^\circ+2\operatorname{ctg}45^\circ+\cos 90^\circ$.

362. $3-\sin^2\pi-2\cos\frac{\pi}{6}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

363. $3\sin^2\frac{\pi}{2}-2\cos^2\frac{\pi}{3}-3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$.

364. $\dfrac{4-2\operatorname{tg}^2 45^\circ+\operatorname{ctg}^4 60^\circ}{3\sin^3 90^\circ-4\cos^2 60^\circ+4\operatorname{ctg}45^\circ}$.

365. $\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)^4-\left(2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^4$.

366. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$ при $\alpha=\pi/6$.

367. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$ при $\alpha=\pi/6$.

368. $\sin 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha-4\cos\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha$ при $\alpha=\pi/4$.

369. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$ при $\alpha=60°$, $\beta=120°$.

370. $2\sin(45°+\alpha)+3\cos(180°-2\alpha)-4\operatorname{ctg}(90°-\alpha)$ при $\alpha=45°$.

Напомним понятия периодичности, четности и нечетности функций.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется *периодической,* если существует такое число T (называемое *периодом*), что для всех x выполняются равенства $f(x)=f(x+T)$ и $f(x)=f(x-T)$.

Все тригонометрические функции являются периодическими. Так как при вращении точки A она, сделав полный оборот или несколько полных оборотов, займет первоначальное положение, ее координаты не изменятся. Следовательно, функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ являются периодическими и их наименьший период равен 2π (или 360°), а функции $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ являются периодическими и их наименьший период равен π (или 180°). Итак,

$$\sin(x+2\pi k)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi k)=\cos x$$

(k — целое число);

$$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg}x,\quad \operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg}x$$

(k — целое число).

Вследствие того, что значение периодических функций не меняется от прибавления к аргументу целого числа периодов, для удобства вычислений можно добавлять или отбрасывать любое целое число периодов.

371. Вычислить: а) $\sin 1110°$; б) $\operatorname{tg}945°$; в) $\cos\frac{25\pi}{4}$.

Решение. а) Период функции $y=\sin x$ равен 360°; поэтому можем опустить целое число периодов:

$$\sin 1110°=\sin(360°\cdot 3+30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}.$$

б) Так как период функции $y=\operatorname{tg}x$ равен 180°, то

$$\operatorname{tg}945°=\operatorname{tg}(180°\cdot 5+45°)=\operatorname{tg}45°=1.$$

в) Находим

$$\cos\frac{25\pi}{4}=\cos 6\frac{1}{4}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

372—374. Вычислить значения функций следующих углов:

372. $\sin 750°$; $\cos 1125°$; $\operatorname{tg}570°$; $\operatorname{ctg}3660°$.

373. $\sin 4\frac{1}{3}\pi$; $\cos\frac{7\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

374. $\sin 18\pi$; $\cos 6\pi$; $\operatorname{tg}11\pi$; $\operatorname{ctg}28\pi$.

375—377. Вычислить:

375. $\sin 1560° + \cos 2730° - \operatorname{tg} 1740°$.

376. $\dfrac{\operatorname{tg} 585° \cos 1500°}{\sin 2940°}$. **377.** $\dfrac{\sin 2190° + \cos 1860°}{\operatorname{tg} 2385°}$.

Определение 3. *Четной* функцией называется функция, для которой при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Нечетной функцией называется функция, для которой при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Среди тригонометрических функций имеется только одна четная $y = \cos x$. Для нее справедливо равенство $\cos(-x) = \cos x$.

Все остальные функции $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ являются нечетными. Для них справедливы равенства $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

378. Вычислить: а) $\sin(-60°)$; б) $\cos(-45°)$; в) $\operatorname{tg}(-945°)$.

Решение. а) Так как $\sin x$ — нечетная функция, то $\sin(-60°) = -\sin 60°$. Итак, $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\sqrt{3}/2$.

б) Функция $\cos x$ — четная; поэтому знак минус можно опустить, т. е. $\cos(-45°) = \cos 45°$. Итак, $\cos(-45°) = \cos 45° = \sqrt{2}/2$.

в) Воспользуемся свойствами периодичности и нечетности. Так как функция $\operatorname{tg} x$ — нечетная, то $\operatorname{tg}(-945°) = -\operatorname{tg} 945°$. Далее, период функции $\operatorname{tg} x$ равен $180°$ и, следовательно, $\operatorname{tg}(-945°) = -\operatorname{tg} 945° = -\operatorname{tg}(180° \cdot 5 + 45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$.

379—382. Упростить выражения:

379. $a \sin(-30°) - 2a \operatorname{tg}(-45°) + b \cos(-60°) - b \operatorname{ctg}(-90°)$.

380. $\dfrac{\sin^2(-30°) - 2\operatorname{ctg}(-30°) - 1}{2 - \operatorname{tg} 45° + 4\cos^2(-60°)}$.

381. $[2a \cos(-\pi/3)]^2 - 4[a \operatorname{ctg}(-\pi/6)]^3 + 6 \operatorname{tg} 0$.

382. $5 \operatorname{tg} 0 + 2 \sin(-\pi/6) - 3 \operatorname{ctg}(-\pi/4) + 4 \cos(-\pi/2)$.

2. Основные тригонометрические тождества

Тригонометрические функции связаны между собой следующими основными тождествами:

I. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. II. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

III. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. IV. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

V. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. VI. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Из тождества I вытекают формулы

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \quad \text{и} \quad 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha,$$

которыми мы будем часто пользоваться.

383—394. Упростить выражения:

383. $\sin^2 x + \cos^2 x + \operatorname{ctg}^2 x$.

Решение. Используя тождества I и VI, получим

$$(\sin^2 x + \cos^2 x) + \operatorname{ctg}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

384. $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x$.

Решение. Применив формулы $1-\cos^2\alpha = \sin^2\alpha$, $1-\sin^2\alpha = \cos^2\alpha$ и тождества IV и VI, находим

$$\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} + \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

385. $(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2$.

Решение. Воспользуемся формулами квадрата суммы и разности двух чисел:

$$(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2 = \operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha + \\ + 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha = 4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha = 4$$

(после приведения подобных членов применили тождество IV).

386. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$.

Решение. Раскроем скобки, а затем заменим $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, применяя тождества II и III:

$$\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)} = \\ = \sqrt{\sin^2\alpha + \sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha + \cos^2\alpha + \cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha} = \\ = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \cos^2\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \\ = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = \sin\alpha + \cos\alpha.$$

387. $(1+\cos\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos\alpha)$.

388. $1 - \sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$.

389. $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha + 1$.

390. $\sin^2\alpha - \sin^2\beta - \cos^2\beta - \cos^2\alpha$.

391. $\sqrt{\dfrac{2}{1+\sin\alpha} + \dfrac{2}{1-\sin\alpha}}$.

392. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \cdot \dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha$.

393. $\sin^4\beta - \cos^4\beta + \cos^2\beta$.

394. $\cos^4\beta + \sin^2\beta\cos^2\beta + \sin^2\beta$.

С помощью основных тригонометрических тождеств решается задача отыскания значений всех тригонометрических функций по известному значению одной из них.

395. Найти значения $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sin x = -3/5$, $0 < x < 3\pi/2$.

Решение. Так как угол x оканчивается в III четверти, то $\cos x<0$, а $\operatorname{tg} x>0$ и $\operatorname{ctg} x>0$.

Используя значение $\sin x$ и формулу $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, находим $\cos^2 x=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$, откуда $\cos x=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} x=\frac{4}{3}$.

396. Найти значения $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, если известно, что $\operatorname{tg} x=-8/15$, $3\pi/2<x<2\pi$.

Решение. Прежде всего найдем $\operatorname{ctg} x=-15/8$. Поскольку угол x оканчивается в IV четверти, заключаем, что $\sin x<0$, а $\cos x>0$. Согласно тождеству V, имеем $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, откуда $\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Следовательно, $\cos^2 x=\frac{1}{1+\frac{64}{225}}=\frac{1}{\frac{289}{225}}=\frac{225}{289}$, т. е. $\cos x=\frac{15}{17}$. Используя формулу $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, получим $\sin^2 x=1-\frac{225}{289}=\frac{64}{289}$, т. е. $\sin x=$ $=-\frac{8}{17}$.

397—400. Найти значения всех тригонометрических функций, если известно:

397. $\cos x=-0{,}8$; $\pi/2<x<\pi$.

398. $\operatorname{ctg} x=5/12$; $0<x<\pi/2$.

399. $\operatorname{tg} x=-4/3$; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

400. $\sin x=-7/25$; $3\pi/2<x<2\pi$.

3. Формулы сложения аргументов

Формулы сложения аргументов имеют следующий вид:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha; \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha; \qquad (4)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \qquad (5)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (8)$$

401. Вычислить $\cos 75°$.

Решение. Воспользуемся тем, что $75°=30°+45°$, и применим формулу (5):

$$\cos 75°=\cos(30°+45°)=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

402. Упростить выражение

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Решение. Применяя формулы (5) и (6), получим

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$
$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

403. Упростить выражение

$$\frac{\sin 11^\circ\cos 15^\circ+\sin 15^\circ\cos 11^\circ}{\sin 18^\circ\cos 12^\circ+\sin 12^\circ\cos 18^\circ}.$$

Решение. Числитель и знаменатель представляют собой развернутые выражения синуса суммы по формуле (3). Следовательно,

$$\frac{\sin 11^\circ\cos 15^\circ+\sin 15^\circ\cos 11^\circ}{\sin 18^\circ\cos 12^\circ+\sin 12^\circ\cos 18^\circ}=\frac{\sin(11^\circ+15^\circ)}{\sin(18^\circ+12^\circ)}=\frac{\sin 26^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin 26^\circ}{\frac{1}{2}}=2\sin 26^\circ.$$

404. Доказать тождество

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Используя формулы (3) и (4), преобразуем левую часть тождества:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}}=$$
$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha}{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

405—409. Упростить выражения:

405. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}.$

406. $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}.$

407. $\dfrac{\cos 65^\circ\cos 40^\circ+\sin 65^\circ\sin 40^\circ}{\sin 37^\circ\cos 12^\circ-\cos 37^\circ\sin 12^\circ}.$

408. $\cos 3\alpha\cos\alpha+\sin 3\alpha\sin\alpha.$

409. $\sin 5\alpha\cos 2\alpha-\sin 2\alpha\cos 5\alpha.$

410—414. Доказать тождества:

410. $\sin 15^\circ+\operatorname{tg} 30^\circ\cos 15^\circ=\sqrt{6}/3.$

411. $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0.$

412. $\sin^2\alpha+\sin^2(120°+\alpha)+\sin^2(120°-\alpha)=3/2$.

413. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

414. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$.

4. Формулы приведения

Значения тригонометрических функций острых углов вычисляют по таблицам. Значения функций любых углов можно вычислить с помощью формул приведения к острому углу.

Сформулируем общее правило написания формул приведения.

1^0. Знак тригонометрической функции определяют по первоначально заданному углу.

2^0. Если аргумент можно представить как сумму или разность π, 2π и острого угла, то название функции не изменяют.

3^0. Если аргумент можно представить как сумму или разность $\pi/2$, $3\pi/2$ и острого угла, то название функции изменяют на сходное (синус — на косинус, тангенс — на котангенс).

415. Вычислить $\sin 210°$.

Решение. Представим $210°$ как $180°+30°$. Применяя п. 1^0 и 2^0 правила и учитывая, что угол $210°$ оканчивается в III четверти, находим

$$\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-1/2.$$

416. Вычислить $\cos 300°$.

Решение. Так как $300°=270°+30°$ и данный угол оканчивается в IV четверти, то $\cos 300°=\cos(270°+30°)=\sin 30°=1/2$.

417. Вычислить $\sin\frac{53\pi}{6}$.

Решение. Имеем $\frac{53\pi}{6}=8\frac{5}{6}\pi$. Опуская целое число периодов, получим

$$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

418. Вычислить $\operatorname{tg}(-300°)$.

Решение. Функция $y=\operatorname{tg}x$ — нечетная, поэтому $\operatorname{tg}(-300°)=-\operatorname{tg}300°$. Так как $300°=270°+30°$ и угол $300°$ оканчивается в IV четверти, то

$$\operatorname{tg}(-300°)=-\operatorname{tg}300°=-\operatorname{tg}(270°+30°)=\operatorname{ctg}30°=\sqrt{3}.$$

419. Вычислить $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

Решение. Используя сначала свойства четности и нечетности функций, а затем формулы приведения, находим

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=$$

$$=-\sin\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{4}-\operatorname{tg}\frac{11\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3}=$$

$$=-\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\operatorname{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\operatorname{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

420—422. Вычислить:

420. $\sin^2(-330°)-\cos^2(-120°)-\operatorname{tg}^2(-240°)+\operatorname{ctg}^2(-330°)$.

421. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)-\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

422. $\dfrac{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\frac{11\pi}{6}}-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\pi}+\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3}$.

423—427. Упростить выражения:

423. $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

424. $\dfrac{\sin 160°\cos 70°-\cos 200°\sin 70°-\cos 235°\sin 215°}{\operatorname{tg}55°\operatorname{ctg}215°}$.

425. $\sin(\alpha-90°)-\cos(\alpha-180°)+\operatorname{tg}(\alpha-270°)+\operatorname{ctg}(360°+\alpha)$.

426. $\dfrac{\operatorname{tg}(270°-\alpha)\sin 130°\cos 320°\sin 270°}{\operatorname{ctg}(180°-\alpha)\cos 50°\sin 220°\cos 360°}$.

427. $\dfrac{\sin^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

428—432. Доказать тождества:

428. $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\operatorname{tg}(\pi+\alpha)}=1$.

429. $\dfrac{\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\left[\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin(\pi+\alpha)\right]}{\operatorname{tg}(\pi+\alpha)[\cos(\alpha+2\pi)+\sin(\alpha-2\pi)]}=-1$.

430. $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=0$.

431. $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\alpha$.

432. $\operatorname{tg}10°\operatorname{tg}20°\operatorname{tg}30°\operatorname{tg}40°\operatorname{tg}50°\operatorname{tg}60°\operatorname{tg}70°\operatorname{tg}80°=1$.

5. Формулы двойных и половинных углов

Полагая $\beta=\alpha$ в формулах (3), (5), (7) сложения аргументов, получим следующие формулы двойных углов:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{9}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{11}$$

Из формулы (10) вытекают два часто употребляемых соотношения

$$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1; \tag{12}$$

$$1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha. \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) можно получить формулы половинных углов:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{14}$$

где знак зависит от четверти, в которой оканчивается угол $\alpha/2$.

Заменяя в равенствах (9) — (11) 2α на α, а α на $\alpha/2$, находим:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}; \tag{15}$$

$$\cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}; \tag{16}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{17}$$

Кроме того, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выражаются через тангенс половинного угла по формулам

$$\sin\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{18}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{19}$$

433—441. Упростить выражения:

433. $2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$.

Решение. Согласно формулам (9) и (10) имеем

$$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = \sin 2\alpha\cos 2\alpha.$$

Умножив и разделив произведение на 2, получим

$$\sin 2\alpha\cos 2\alpha = \frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2} = \frac{\sin 4\alpha}{2}.$$

434. $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

Решение. Применяя последовательно формулы (13), (12) и (9), вынося общий множитель за скобки и преобразуя, находим

$$\frac{(1-\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

435. $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Для преобразования произведения квадратов функций в квадрат произведения воспользуемся формулой (15), а затем применим формулу (10):

$$\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\alpha-\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.$$

436. $\dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

437. $\sqrt{\dfrac{1-\cos 4\alpha}{2\cos^2 2\alpha}}$.

438. $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$.

439. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 4\alpha}{2}}$.

440. $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$.

441. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$.

442—446. Доказать тождества:

442. $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

443. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

444. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

445. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

446. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

6. Формулы сложения одноименных функций

Формулы сложения одноименных тригонометрических функций позволяют преобразовать сумму и разность функций в произведение этих функций. Они имеют следующий вид:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (20)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (21)$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (22)$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \qquad (23)$$

447—458. Преобразовать в произведения следующие выражения:

447. $\sin 75° + \sin 15°$.

Решение. Воспользуемся формулой (20):

$$\sin 75° + \sin 15° = 2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2} = 2\sin 45°\cos 30° =$$

$$= 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

448. $\dfrac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha}$.

Решение. Применяя формулы (20) и (21), получим

$$\frac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha + \sin 5\alpha} = \frac{2\sin\frac{7\alpha-5\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha+5\alpha}{2}}{2\sin\frac{7\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha-5\alpha}{2}} = \frac{\sin\alpha\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg} 6\alpha.$$

449. $\dfrac{\cos\alpha - \cos 3\alpha + \cos 5\alpha - \cos 7\alpha}{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \sin 7\alpha}$.

Решение. Сгруппировав слагаемые и применив формулы (23) и (20), вынесем общие множители за скобки и сократим дробь:

$$\frac{(\cos\alpha - \cos 3\alpha) + (\cos 5\alpha - \cos 7\alpha)}{(\sin\alpha + \sin 3\alpha) + (\sin 5\alpha + \sin 7\alpha)} =$$

$$= \frac{\left(-2\sin\frac{\alpha-3\alpha}{2}\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\right) + \left(-2\sin\frac{5\alpha-7\alpha}{2}\sin\frac{5\alpha+7\alpha}{2}\right)}{2\sin\frac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha-3\alpha}{2} + 2\sin\frac{5\alpha+7\alpha}{2}\cos\frac{5\alpha-7\alpha}{2}} =$$

$$= \frac{2\sin\alpha\sin 2\alpha + 2\sin\alpha\sin 6\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha + 2\sin 6\alpha\cos\alpha} = \frac{2\sin\alpha\,(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)}{2\cos\alpha(\sin 2\alpha + \sin 6\alpha)} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha.$$

450. $\sin(45° + \alpha) - \sin(45° - \alpha)$.

Решение. Сначала найдем сумму и разность аргументов:

$$(45° + \alpha) + (45° - \alpha) = 45° + \alpha + 45° - \alpha = 90°;$$

$$(45° + \alpha) - (45° - \alpha) = 45° + \alpha - 45° + \alpha = 2\alpha.$$

Используя теперь формулу (21), находим

$$\sin(45° + \alpha) - \sin(45° - \alpha) = 2\sin\alpha\cos 45° = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha = \sqrt{2}\sin\alpha.$$

451. $1 + 2\cos\alpha$.

Решение. Вынесем за скобки множитель 2, а затем представим 1/2 как $\cos 60°$:

$$1 + 2\cos\alpha = 2\left(\frac{1}{2} + \cos\alpha\right) = 2(\cos 60° + \cos\alpha).$$

Применяя формулу (22), получим

$$2(\cos 60° + \cos\alpha) = 2\cdot 2\cos\frac{60°+\alpha}{2}\cos\frac{60°-\alpha}{2} =$$

$$= 4\cos\left(30° + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30° - \frac{\alpha}{2}\right).$$

452. $\frac{\sin 75^\circ + \sin 15^\circ}{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}$.

453. $\frac{\cos 6\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha}$.

454. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$.

455. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

456. $\sin 19^\circ + \sin 25^\circ + \sin 6^\circ$.

457. $1 - \sqrt{2}\cos\alpha$.

458. $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$.

7. Обратные тригонометрические функции

Определение 4. *Арксинусом* числа m называется такой угол x, для которого $\sin x = m$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $|m| \leqslant 1$.

Арккосинусом числа m называется такой угол x, для которого $\cos x = m$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $|m| \leqslant 1$.

Арктангенсом числа m называется такой угол x, для которого $\operatorname{tg} x = m$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Арккотангенсом числа m называется такой угол x, для которого $\operatorname{ctg} x = m$, $0 < x < \pi$.

Очевидно, что отыскание значений обратной тригонометрической функции представляет собой задачу нахождения угла по известному значению его тригонометрической функции.

Например,

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};\quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},\quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};\quad \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2};$$

С помощью обратных тригонометрических функций можно решать простейшие тригонометрические уравнения:

$$\sin x = m,\ |m| \leqslant 1;\ x = (-1)^k \arcsin m + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}; \tag{24}$$

$$\cos x = m,\ |m| \leqslant 1;\ x = \pm\arccos m + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}; \tag{25}$$

$$\operatorname{tg} x = m,\ m \text{ — любое число};\ x = \operatorname{arctg} m + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}; \tag{26}$$

$$\operatorname{ctg} x = m,\ m \text{ — любое число};\ x = \operatorname{arcctg} m + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \tag{27}$$

459—467. Решить простейшие тригонометрические уравнения:

459. а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x = 3$; г) $\operatorname{ctg} x = -1$.

Решение. а) Согласно формуле (24), получим

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

б) По формуле (25) находим

$$x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

в) В соответствии с формулой (26) имеем

$$x=\operatorname{arcctg}3+\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

г) Применяя формулу (27) и учитывая, что $\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, получим

$$x=\operatorname{arcctg}(-1)+\pi k=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

460. $\sin x=\frac{1}{2}$. **461.** $\cos x=-\frac{1}{2}$.

462. $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$. **463.** $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$.

464. $\sin x=0$. **465.** $\cos x=0$.

466. $\operatorname{tg}x=0$. **467.** $\operatorname{ctg}x=0$.

8. Тригонометрические уравнения

Уравнение называется *тригонометрическим*, если неизвестная величина входит в него как аргумент тригонометрической функции.

468—501. Решить тригонометрические уравнения:

468. $2\cos^2x-3\cos x=0$.

Решение. Вынесем $2\cos x$ за скобки: $2\cos x(\cos x-1{,}5)=0$. Так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю один из сомножителей, то $\cos x=0$ или $\cos x-1{,}5=0$. Решая простейшее уравнение $\cos x=0$, находим $x=\pm\arccos 0+2\pi k=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Уравнение $\cos x-1{,}5=0$ не имеет решений, поскольку $\cos x\neq 1{,}5$.

469. $2\sin^2x-3\sin x-2=0$.

Решение. Полагая $\sin x=y$, получим квадратное уравнение $2y^2-3y-2=0$. Здесь $a=2$, $b=-3$, $c=-2$, $D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)=9+16=25$, $\sqrt{D}=5$. Значит, $y_1=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{3+5}{4}=2$.

Итак, $y_1=-\frac{1}{2}$ и $y_2=2$, т. е. $\sin x=-\frac{1}{2}$ и $\sin x=2$. Решение уравнения $\sin x=-\frac{1}{2}$ имеет вид $x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k=(-1)^{k+1}\times\arcsin\frac{1}{2}+\pi k$, т. е. $x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Уравнение $\sin x=2$ не имеет решений.

470. $\sin^2x+2\sin x\cos x=3\cos^2x$.

Решение. Это — однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$; разделив все его члены на $\cos^2x\neq0$, получим

$$\frac{\sin^2x}{\cos^2x}+\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2x}-\frac{3\cos^2x}{\cos^2x}=0;\quad \operatorname{tg}^2x+2\operatorname{tg}x-3=0.$$

Полагая $\operatorname{tg} x = y$, имеем квадратное уравнение $y^2+2y-3=0$. Решая его, находим $y_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$, $y_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$.

Итак, $x_1 = \operatorname{arctg}(-3)+\pi k = -\operatorname{arctg} 3+\pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} 1+\pi k = \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

471. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.

Решение. Группируя первый и последний члены и применяя формулу суммы косинусов, получим

$$(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x = 0;\quad 2\cos 3x \cos x + \cos 3x = 0.$$

Следовательно, $\cos 3x(2\cos x + 1) = 0$, откуда $\cos 3x = 0$ или $2\cos x + 1 = 0$. Решая уравнение $\cos 3x = 0$, находим $3x = \pm\arccos 0 + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, т. е. $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. Решая уравнение $2\cos x + 1 = 0$, имеем $\cos x = -\frac{1}{2}$, т. е. $x_2 = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

472. $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$.

473. $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$.

474. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.

475. $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$.

476. $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$.

477. $2\sin^2 x = 3\cos x$.

478. $3\sin^2 x = \cos^2 x$.

479. $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 13\cos x \sin x$.

480. $3\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$.

481. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

482. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

483. $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$.

484. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2\cos(2\pi - x) = 0$.

485. $\sin(x - 90^\circ) + \sin(x - 180^\circ) = 0$.

486. $\sin x \cos x = 0{,}25$.

487. $\cos 2x = \cos x$.

488. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$.

489. $1 + \sin^2 2x = 4\sin^2 x$.

490. $\sin 6x - \sin 4x = 0$.

491. $\cos 4x + \cos x = 0$.

492. $\cos 3x = \sin x$.

493. $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$.

494. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.

495. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

496. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

497. $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 0$.

498. $\sin^4 x + \cos^2 2x = 2$.

499. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

500. $1 - \cos 2x = 2\sin x$.

501. $3\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin x \cos x = 1$.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Перечислите формулы сокращенного умножения.
2. Возведите в квадрат $(3a^2+2b^3)$.
3. Возведите в квадрат $(4a^3-5b^2)$.
4. Возведите в куб $(5x+2y)$.
5. Возведите в куб $(6x^2-4y^3)$.
6. Упростите выражение $\frac{x}{4x^2-9y^2}-\frac{1}{3y-2x}$.
7. Что значит возвести число в степень n?
8. Сформулируйте правило знаков.
9. Как перемножить две степени с одинаковыми основаниями?
10. Как разделить две степени с одинаковыми основаниями?
11. Как возвести степень в степень?
12. Как извлечь корень из степени?
13. Чему равна нулевая степень любого числа?
14. Вычислите $\left[\left(37{,}2-\left(\frac{5}{28}\right)^2\right)^{-1/4}\right]^0$.
15. Как найти степень с отрицательным показателем?
16. Вычислите: 5^{-3}, $(-2)^{-3}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$
17. Запишите с помощью отрицательных показателей выражение $y=\frac{1}{a^2b^3c}$.
18. Как найти степень с дробным показателем?
19. Вычислите: $8^{1/3}$; $9^{3/2}$; $81^{3/4}$.
20. Запишите с помощью дробных степеней выражения $\sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[3]{a^2b}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^5c}}$.
21. Какое уравнение называется показательным?
22. Сформулируйте правило решения простейших показательных уравнений.
23. Решите уравнение $2^x+2^{x-2}+2^{x-3}=\frac{11}{4}$.
24. Решите уравнение $\frac{\sqrt{5}}{5^{x-3}}=125\cdot 0{,}04^{x+1}$.
25. Решите уравнение $9\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+3=0$.
26. Дайте определение логарифма.
27. Вычислите $\log_3 81$; $\log_{15} 1$; $\log_3\frac{1}{27}$; $\log_{1/2} 2\sqrt{2}$.
28. Сформулируйте теоремы о логарифмах произведения, частного степени и корня.
29. Найдите $\log x$, если $x=\frac{a^2(a+b)}{\sqrt{c}}$.
30. Найдите x, если $\log x=\frac{1}{2}\log(a+b)+\frac{2}{3}\log c-\frac{1}{3}\log(a-c)$.
31. Какие уравнения называются логарифмическими?
32. Какие корни уравнения называются посторонними?
33. Чем обязательно следует заканчивать решение любого логарифмического уравнения?
34. Решите уравнение $\log_2(x-5)-\log_2(2x+5)=3\log_2 2$.
35. Решите уравнение $\lg^2 x-\lg x-6=0$.
36. Сформулируйте основное свойство корня.
37. Приведите к одному показателю $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^3}$.
38. Упростите выражение $\sqrt[10]{32x^5(x-y)^{15}}$.
39. Как извлечь корень из произведения?

40. Как извлечь корень из дроби?
41. Как извлечь корень из степени?
42. Упростите $\sqrt[3]{x^8}$.
43. Упростите $\sqrt[3]{2x^6}$.
44. Освободите от дроби подкоренное выражение: $\sqrt[3]{\dfrac{3}{5a^2}}$; $\sqrt[5]{\dfrac{a}{(a+b)^3}}$.
45. Упростите выражение $\sqrt[5]{\dfrac{a^3}{b^3}+\dfrac{a^2}{b^3}}$.
46. Как производится умножение корней одинаковой степени?
47. Как производится умножение корней разных степеней?
48. Найдите произведение $\sqrt[3]{a^2(a+b)}\cdot\sqrt[3]{a(a-b)}$.
49. Перемножьте корни $\sqrt[3]{a^2}$ и $\sqrt[4]{a^3}$.
50. Как производится деление корней одинаковой степени?
51. Произведите деление $\sqrt[5]{a^3b^6c^7}$ на $\sqrt[5]{bc^2}$.
52. Как производится возведение корня в степень?
53. Выполните действия: $(\sqrt[3]{3a^2x^3c})^5$.
54. Какие корни называются подобными?
55. Освободитесь от корня в знаменателе: $\dfrac{5}{\sqrt{a}}$; $\dfrac{a+3}{\sqrt{a^2-9}}$; $\dfrac{6}{\sqrt{5}-1}$.
56. Какие уравнения называются иррациональными?
57. Как возникает в решении посторонний корень?
58. Решите уравнение $\sqrt{5-x}+7=4$.
59. Решите уравнение $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$.
60. Что называется единичной окружностью?
61. Что называется градусом?
62. Каковы соотношения между градусом, минутой и секундой?
63. Какие тригонометрические функции называются периодическими?
64. Чему равен период функции $y=\sin x$; $y=\cos x$?
65. Чему равен период функции $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$?
66. Какие тригонометрические функции являются четными?
67. Какие тригонометрические функции являются нечетными?
68. Выпишите в тетрадь таблицу значений тригонометрических функций некоторых углов.
69. Перечислите основные тригонометрические тождества.
70. Упростите выражение $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}+\cos^2 x+\sin^2 x$.
71. Запишите формулы сложения аргументов.
72. Вычислите $\sin 15°$.
73. Вычислите $\cos 15°\cos 45° - \sin 15°\cos 45°$.
74. Сформулируйте правило написания формул приведения.
75. Вычислите $\cos 150°$.
76. Вычислите $\operatorname{tg} 210°$.
77. Перечислите формулы двойных углов.
78. Перечислите формулы половинных углов.
79. Запишите формулы сложения функций.
80. Вычислите $\cos 75° + \cos 15°$.
81. Вычислите $\sin 45° - \sin 15°$.
82. Что называется арксинусом угла?
83. Что называется арккосинусом угла?
84. Что называется арктангенсом угла?
85. Вычислите $\arcsin(1/2)$.
86. Вычислите $\arccos(-1/2)$.
87. Вычислите $\operatorname{arctg}(-1)$.
88. Перечислите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
89. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x = 0$.

90. Решите уравнение $3\cos^2 x + 8\cos x - 3 = 0$.

91. Решите уравнение $\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$.

Ответы

2. $9a^4 + 12a^2b^3 + 4b^6$. **3.** $16a^6 - 40a^3b^2 + 25b^4$. **4.** $125x^3 + 150x^2y + 60xy^2 + 8y^3$. **5.** $216x^6 - 432x^4y^3 + 288x^2y^6 - 64y^9$. **6.** $\frac{3(x+y)}{4x^2-9y^2}$. **14.** 1. **16.** $1/125$; $-1/8$; $16/9$. **17.** $y = a^{-2}b^{-3}c^{-1}$. **19.** 2; 27; 27. **20.** $a^{2/5}$; $a^{2/3}b^{1/3}$; $a^{-2/3}b^{-5/3}c^{-1/3}$. **23.** 1. **24.** $x = -2{,}5$. **25.** $x_1 = 1$; $x_2 = -2$. **27.** 4; 0; $-1/3$; $-3/2$. **29.** $\log x = 2\log a + \log(a+b) - \frac{1}{2}\log c$. **30.** $x = \sqrt{a+b}\sqrt[3]{\frac{c^2}{a-c}}$. **34.** Нет решений. **35.** $x_1 = 1000$; $x_2 = 0{,}01$. **37.** $\sqrt[30]{a^{15}}$; $\sqrt[30]{a^{20}}$; $\sqrt[30]{a^{18}}$. **38.** $\sqrt{2x(x-y)^3}$. **42.** $x^2\sqrt[3]{x^2}$. **43.** $x^2\sqrt[3]{2}$. **44.** $\frac{1}{5a}\sqrt[3]{75a}$; $\sqrt[5]{a(a+b)^2}$. **45.** $\frac{1}{b}\sqrt[5]{a^2(a+1)b^2}$. **48.** $a\sqrt[3]{a^2-b^2}$. **49.** $a\sqrt[12]{a^5}$. **51.** $bc\sqrt[5]{a^3}$. **53.** $3a^3x^5c\sqrt[3]{9ac^2}$. **55.** $5\sqrt{a}/a$; $\sqrt{a^2-9}/(a-3)$; $\sqrt{5}+1$. **58.** Нет решений. **59.** $x = 7$. **70.** $1/\cos^2 x$. **72.** $(\sqrt{6}-\sqrt{2})/4$. **73.** $1/2$. **75.** $-\sqrt{3}/2$. **76.** $\sqrt{3}/3$. **80.** $\sqrt{6}/2$. **81.** $\sqrt{3}\sin 15°$. **85.** $\pi/6$. **86.** $2\pi/3$. **87.** $-\pi/4$. **89.** πk; $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$; $k \in \mathbf{Z}$. **90.** $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **91.** $\pm\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Глава I

Линейная алгебра

§ 1. Определение матрицы. Действия над матрицами и векторами

1. Матрицы

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для любого элемента a_{ij} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j — номер столбца. Сокращенно прямоугольную матрицу типа $m \times n$ можно записать так: $A = (a_{ij})$, где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Виды матриц. Векторы

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется *прямоугольной*. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}.$$

Если число строк равно числу столбцов ($m = n$), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы A равен 2, а порядок матрицы B равен 4.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ, содержащую элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$, будем называть *главной*, а диагональ, содержащую элементы $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$, — *побочной* (или вспомогательной).

Среди квадратных матриц выделим матрицы, у которых отличны от нуля только элементы, находящиеся на главной диагонали:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы называются *диагональными*; например, матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

являются диагональными матрицами второго и четвертого порядка.

Если у диагональной матрицы все числа главной диагонали равны между собой, т. е. $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}$, то такая диагональная матрица называется *скалярной*. Если в скалярной матрице все числа главной диагонали равны единице, то матрица называется *единичной* и обозначается буквой E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* и обозначается так:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В прямоугольной матрице типа $m \times n$ возможен случай, когда $m=1$. При этом получается *матрица-строка*:

$$A=(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}).$$

В случае, когда $n=1$, получаем *матрицу-столбец*:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы-строки и матрицы-столбцы иначе будем называть *векторами*.

3. Равенство матриц

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны: $a_{ij}=b_{ij}$.

Так, матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

равны, если $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{13}=b_{13}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$, $a_{23}=b_{23}$.

Равные матрицы обязательно имеют одно и то же строение: либо обе они прямоугольные типа $m\times n$, либо квадратные одного и того же порядка n.

Если в матрице типа $m\times n$, имеющей вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

переставить строки со столбцами, получим матрицу типа $n\times m$, которую будем называть *транспонированной* матрицей:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В том случае, когда матрица состоит из одной строки (матрица-строка), т. е.

$$B=(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n),$$

транспонированная матрица является матрицей-столбцом:

$$B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

4. Линейные операции над матрицами

Суммой матриц A и B условимся называть такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа $m\times n$, или квадратные порядка n.

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма матриц $C=A+B$ имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

где $c_{11}=a_{11}+b_{11}$, $c_{12}=a_{12}+b_{12}$; ... $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, ..., $c_{mn}=a_{mn}+b_{mn}$.

1. Сложить матрицы A и B, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$,

г) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Здесь A и B — квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь A и B — прямоугольные матрицы типа 2×3. Складываем их соответствующие элементы:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & 2-4 & -3+1 \\ 2+3 & -4+0 & 5+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

в) Здесь A и B — квадратные матрицы третьего порядка. Складываем их соответствующие элементы:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2-5 & 1+3 & 3+16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+7 & 3+10 & 8+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

г) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как A есть матрица типа 3×2, а B — матрица типа 2×3; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

2—4. Сложить матрицы A и B:

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}7 & 4 & 0\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & -4 & -1\\ 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$.

Мы видим, что сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяются важнейшие свойства чисел:

1) переместительный закон сложения: $A+B=B+A$, где A и B — либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа $m\times n$;

2) сочетательный закон сложения $(A+B)+C=A+(B+C)$, где A, B, C — либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа $m\times n$.

5. Доказать справедливость равенств:

а) $A+B=B+A$ для матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix};$$

б) $(A+B)+C=A+(B+C)$ для матриц

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 2\\ 7 & -1 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 5 & -3\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Из сказанного выше вытекает равенство

$$A+O=A,$$

т. е. существует такая нулевая матрица (того же порядка или типа), что ее сумма с матрицей A любого типа равна матрице A.

Для любой матрицы A существует матрица $-A$, такая, что $A+(-A)=O$, т. е. матрица, противоположная A.

Произведением матрицы A на число k называется такая матрица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij}, т. е.

$$\text{если } A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\quad \text{то } kA=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

6. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 5 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ на число $k=3$.

Решение. Умножая каждый элемент матрицы A на 3, получим

$$3A=\begin{pmatrix}6 & -3 & 12\\ 0 & 15 & -9\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

7. Найти матрицу, противоположную матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения противоположной матрицы умножаем матрицу A на $k=-1$:

$$-A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

8. Найти линейную комбинацию $3A-2B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала находим произведение A на $k_1=3$ и B на $k_2=-2$:

$$3A=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix}, \quad -2B=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем сумму полученных матриц:

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}.$$

9—11. Вычислить линейные комбинации матриц:

9. $2A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

10. $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

11. $2A+3B-C$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$.

5. Умножение матриц

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведением этих матриц называется матрица

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы C, нужно каждый элемент первой строки матрицы A (т. е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (т. е. b_{11} и b_{21}) и полученные произведения сложить: $c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$;

чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы C, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить: $c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$; аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22}.

Вообще, чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы-произведения, нужно все элементы i-й строки (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца (b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}) матрицы B и полученные произведения сложить.

12. Найти произведение матриц A и B, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем каждый элемент матрицы-произведения:

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=3\cdot1+1\cdot2+1\cdot1=6;$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=3\cdot1+1\cdot(-1)+1\cdot0=2;$$
$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}=3\cdot(-1)+1\cdot1+1\cdot1=-1;$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=2\cdot1+1\cdot2+2\cdot1=6;$$
$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=2\cdot1+1\cdot(-1)+2\cdot0=1;$$
$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}=2\cdot(-1)+1\cdot1+2\cdot1=1;$$
$$c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}=1\cdot1+2\cdot2+3\cdot1=8;$$
$$c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}=1\cdot1+2\cdot(-1)+3\cdot0=-1;$$
$$c_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}=1\cdot(-1)+2\cdot1+3\cdot1=4.$$

Следовательно,

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

13—15. Найти произведения матриц:

13. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц.

16. Найти произведение AB, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix} 0\cdot3+(-1)\cdot2+2\cdot1 & 0\cdot1+(-1)\cdot1+2\cdot0 \\ 2\cdot3+1\cdot2+1\cdot1 & 2\cdot1+1\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+0\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+0\cdot1+1\cdot0 \\ 3\cdot3+7\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot1+7\cdot1+1\cdot0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Если в этом примере мы попытаемся найти произведение BA, то убедимся, что это невозможно.

Для прямоугольных матриц справедливы следующие правила:

1) умножение матрицы A на матрицу B имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

17—19. Найти произведение AB:

17. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

21. Вычислить $C=A^2+2B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

22. Найти $AB-BA$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Найти $3A\cdot2B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Найти AE, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Найти EA, если

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Свойства умножения матриц

Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Найдем произведения AB и BA:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+(-1)\cdot1 & 2\cdot1+(-1)\cdot(-1)\\ 1\cdot3+3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot(-1)+1\cdot3\\ 1\cdot2+(-1)\cdot1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -4\end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $AB\neq BA$. Этот пример показывает, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону.

Можно проверить, что для умножения матриц выполняется сочетательный закон:

$$A(BC)=(AB)C,$$

а также распределительный закон:

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Отметим следующий любопытный факт. Известно, что произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц это не всегда справедливо, т. е. возможен случай, когда произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице. Например, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

то

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot1\\ 1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

§ 2. Определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление

1. Определитель матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядков

Пусть дана квадратная матрица второго порядка:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Определителем (или *детерминантом*) *второго порядка*, соответствующим данной матрице, называется число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель второго порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Отметим, что определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагоналей.

26. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

Решение. а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 5(-3) = -8 + 15 = 7$;

б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 - ab \cdot ab = a^2b^2 - a^2b^2 = 0.$

27—32. Вычислить определители:

27. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$. **28.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$. **29.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **31.** $\begin{vmatrix} a+b & b \\ 2a & a-b \end{vmatrix}$. **32.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем (или *детерминантом*) *третьего порядка*, соответствующим данной матрице, называется число

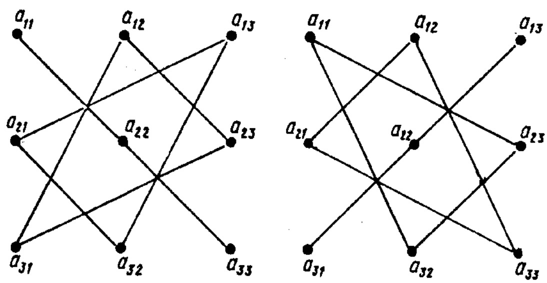
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель третьего порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (*правилом Саррюса*). Это правило проиллюстрируем на схеме:



Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали ($a_{11}a_{22}a_{33}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали ($a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{21}a_{32}a_{13}$). Три отрицательных его члена есть произведения элементов побочной диагонали ($a_{13}a_{22}a_{31}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали ($a_{12}a_{21}a_{33}$ и $a_{11}a_{23}a_{32}$).

33. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot3+2\cdot3\cdot3+2\cdot4\cdot1-1\cdot5\cdot3-2\cdot2\cdot3-$

$-3\cdot3\cdot4=45+18+8-15-12-36=71-63=8;$

б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+bac+cba-c\cdot c\cdot c-b\cdot b\cdot b-a\cdot a\cdot a=$

$=3abc-a^3-b^3-c^3.$

34—39. Вычислить определители:

34. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **35.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

36. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. **37.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

38. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$. **39.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$.

2. Основные свойства определителей

1. *Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами* (т. е. транспонировать):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot4-(-2)\cdot5=2.$$

Это свойство называют свойством равноправности строк и столбцов.

2. *При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит свой знак на противоположный:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot2+(-2)\cdot1\cdot3+2\cdot(-5)\cdot3-3\cdot(-4)\cdot3-$$
$$-(-2)\cdot2\cdot2-1\cdot1\cdot(-5)=-8-6-30+36+8+5=-44+49=5.$$

Поменяв местами первый и второй столбцы, получим

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot2\cdot2+1\cdot1\cdot(-5)+3\cdot(-4)\cdot3-3\cdot2\cdot(-5)-$$
$$-(-2)\cdot3\cdot1-1(-4)\cdot2=-8-5-36+30+6+8=-49+44=-5.$$

3. *Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 3\cdot(-6)-(-2)\cdot7=-4.$$

Если множитель (—2) вынести за знак определителя, то получим

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2(3\cdot3-7\cdot1)=-2\cdot2=-4.$$

4. *Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.*

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot1\cdot4+1\cdot3\cdot2+1\cdot(-1)\cdot3-3\cdot1\cdot2-1\cdot1\cdot4-$$
$$-3\cdot(-1)\cdot1=4+6-3-6-4+3=0.$$

Из свойств 3 и 4 вытекает следующее свойство:

5. *Если все элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot3\cdot(-2)+7\cdot(-1)\cdot4+2\cdot6\cdot1-4\cdot3\cdot1-6\cdot(-1)\cdot3-$$
$$-2\cdot7(-2)=-18-28+12-12+18+28=0.$$

6. *Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столб-*

ца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. ***Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, — нули, равен произведению элементов главной диагонали:***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $D=|a_{ij}|$, где i и j меняются от 1 до n, называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Например, минор M_{12}, соответствующий элементу a_{12} определителя

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

получается, если вычеркнуть из определителя D первую строку и второй столбец, т. е.

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

40. Записать все миноры определителя

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{12} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}; \quad M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}; \quad M_{32} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}; \quad M_{33} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

41. Записать все миноры определителя

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} принято обозначать A_{ij}.

Таким образом, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

42. Найти алгебраические дополнения элементов a_{13}, a_{21}, a_{31} определителя

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4-0=4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-(10-6)=-4;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-6-0=-6.$$

43. Найти алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{22}, a_{32} определителя

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца

Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя D на их алгебраические дополнения равна этому определителю, т. е.

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

или

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}.$$

Эти соотношения называются *разложением определителя по элементам i-й строки или j-го столбца.*

44. Определитель

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

разложить: а) по элементам 1-й строки; б) по элементам 2-го столбца.

Решение.

а) $D=3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=3(4+20)-$
$-1(-2-0)+2(4-0)=72+2+8=82;$

б) $D=-1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=$
$=(-1)(-2)+2\cdot 6-(-4)17=2+12+68=82.$

Если определитель имеет четвертый или более высокий порядок, то его также можно разложить по элементам строки или столбца, а затем понижать порядок алгебраических дополнений.

45. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 4\\ 0 & 4 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по элементам 1-й строки (так как она содержит два нулевых элемента):

$$D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 4\\ 0 & 4 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix}+$$
$$+2\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Поскольку второй и четвертый члены разложения равны нулю, имеем

$$D=3\left[3\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right]+2\left[2\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\right.$$
$$\left.-3\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}0 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}\right]=3[3(-2)-(-1)(4-6)+4\cdot 4]+$$
$$+2[2(4-6)-3(-15)+4(-20)]=3(-6-2+16)+$$
$$+2(-4+45-80)=24-78=-54.$$

46—48. Вычислить определители третьего порядка:

46. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{vmatrix}$. **47.** $\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}$. **48.** $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}$.

49—51. Вычислить определители четвертого порядка:

49. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}$. **50.** $\begin{vmatrix}2 & 3 & -3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 6 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 5\end{vmatrix}$. **51.** $\begin{vmatrix}3 & -1 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -3\\ 6 & -2 & 9 & 8\end{vmatrix}$.

Перечислим различные способы вычисления определителей.

1. Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение. Этим способом удобно находить определители второго и третьего порядков, а для определителя более высокого порядка применим следующий способ.

2. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.

3. Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду. Этот способ основан на том, что в силу свойства 7 треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Чтобы получить треугольный определитель, нужно, используя свойство 6, к какой-либо строке (или столбцу) заданного определителя прибавлять соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, до тех пор пока не придем к определителю треугольного вида.

Пусть, например, требуется вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех остальных, сразу получим определитель треугольного вида:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)(-2)(-2)=-8.$$

§ 3. Обратная матрица. Обращение матриц второго и третьего порядков

Определение обратной матрицы

Вычисление обратных матриц второго и третьего порядков

1. Определение обратной матрицы

Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю, и *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю.

Если A — квадратная матрица, то *обратной* по отношению к A называется матрица, которая, будучи умноженной на A (как справа, так и слева), дает единичную матрицу.

Обозначив обратную матрицу через A^{-1}, запишем

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E.$$

Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрица A называется *обратимой*. Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется *обращением* матрицы. Нахождение обратной матрицы имеет большое значение при решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

▲ **Теорема.** *Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т. е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.*

При условии $D=|A|\neq 0$ обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1}=\begin{vmatrix} A_{11}/D & A_{21}/D & \dots & A_{n1}/D \\ A_{12}/D & A_{22}/D & \dots & A_{n2}/D \\ A_{1n}/D & A_{2n}/D & \dots & A_{nn}/D \end{vmatrix}$$

2. Вычисление обратных матриц второго и третьего порядков

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1°. Находят определитель матрицы A.

2°. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A и записывают новую матрицу.

3°. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу).

4°. Умножают полученную матрицу на $1/D$.

52. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1°. Находим определитель матрицы A:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-(-1)4=6+4=10.$$

Так как $D\neq 0$, то данная матрица является невырожденной и, следовательно, существует обратная матрица.

2°. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента: $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 3=3$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 4=-4$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\times\times(-1)=1$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2$. Тогда получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3°. Транспонируем эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4°. Умножим полученную матрицу на $1/D$, т. е. на $1/10$:

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученный ответ. Выполнив умножение AA^{-1}, находим

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot\frac{3}{10}+(-1)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) & 2\cdot\frac{1}{10}+(-1)\cdot\frac{1}{5} \\ 4\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) & 4\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{5} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

53. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Решение. 1^0. Находим определитель матрицы A:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 7+2\cdot 2\cdot 3+0\cdot 0\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot 3-$$
$$-2\cdot 0\cdot 7-1\cdot 2\cdot 0=-7+12+9=14.$$

Поскольку $D\neq 0$, матрица A является невырожденной и, значит, можно найти матрицу A^{-1}.

2^0. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-7;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=6;$$
$$A_{13}=(-1)^{+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3;$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-14;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-2;$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6;$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2;$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1.$$

Запишем новую матрицу:

$$\begin{pmatrix}-7 & 6 & 3\\ -14 & -2 & 6\\ 7 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

3^0. Транспонируем полученную матрицу:

$$\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}.$$

4^0. Умножив полученную матрицу на $1/D=1/14$, находим

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/14 & -14/14 & 7/14\\ 6/14 & -2/14 & -2/14\\ 3/14 & 6/14 & -1/14\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 1/2\\ 3/7 & -1/7 & -1/7\\ 3/14 & 3/7 & -1/14\end{pmatrix}.$$

Проверим полученный ответ. Имеем

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 1/2\\ 3/7 & -1/7 & -1/7\\ 3/14 & 3/7 & -1/14\end{pmatrix}.$$

Последовательно находим:

$$c_{11}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{3}{14}=-\frac{1}{2}+\frac{21}{14}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1;$$

$$c_{12}=1\cdot(-1)+2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+3\cdot\frac{3}{7}=-1+\frac{7}{7}=-1+1=0;$$

$$c_{13}=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{1}{2}-\frac{7}{14}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0;$$

$$c_{21}=0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{3}{14}=-\frac{3}{7}+\frac{6}{14}=-\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=0;$$

$$c_{22}=0\cdot(-1)+(-1)\left(-\frac{1}{7}\right)+2\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{6}{7}=\frac{7}{7}=1;$$

$$c_{23}=0\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}=0;$$

$$c_{31}=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\frac{3}{7}+7\cdot\frac{3}{14}=-\frac{3}{2}+\frac{21}{14}=0;$$

$$c_{32}=3\cdot(-1)+0\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+7\cdot\frac{3}{7}=-3+3=0;$$

$$c_{33}=3\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+7\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1.$$

Следовательно,

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

54—59. Найти матрицы, обратные заданной матрице A:

54. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. **55.** $\begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}$. **56.** $\begin{pmatrix}4&-1\\0&3\end{pmatrix}$.

57. $\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$. **58.** $\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}$. **59.** $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&0&0\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$.

§ 4. Решение простейших матричных уравнений

Простейшие матричные уравнения и их решение

Решение системы линейных уравнений в матричной форме

1. Простейшие матричные уравнения и их решение

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Свободные члены и неизвестные можно записать в виде матриц-столбцов:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ или } AX=B.$$

Это равенство называется *простейшим матричным уравнением*.

Такое уравнение решается следующим образом. Пусть матрица A — невырожденная ($D\neq 0$); тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножив на нее обе части матричного уравнения, имеем

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B.$$

Используя сочетательный закон умножения, перепишем это равенство в виде

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B.$$

Поскольку $A^{-1}A=E$ и $EX=X$, находим

$$X=A^{-1}B.$$

Таким образом, чтобы решить матричное уравнение, нужно:

1⁰. Найти обратную матрицу A^{-1}.

2⁰. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B, т. е. $A^{-1}B$.

3⁰. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

60. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1⁰. Будем искать обратную матрицу A^{-1}.

Найдем определитель матрицы A:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=4-6=-2\neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 3=-3;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2=$
$=-2;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1.$

Запишем матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и транспонируем ее: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
Учитывая, что $1/D=-1/2$, запишем обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2^0. Умножим матрицу A^{-1} на матрицу B:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-2)\cdot 7+1\cdot 17 \\ \frac{3}{2}\cdot 7+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3^0. Так как $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, то по определению равных матриц получим $x_1=3,\ x_2=2$.

61. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1^0. Найдем обратную матрицу A^{-1}.
Вычислим определитель матрицы A:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot 4+(-1)\cdot 1\cdot 2+(-2)\cdot(-1)\cdot 0-$$
$$-2\cdot 1\cdot 0-(-1)\cdot 1\cdot 3-(-2)\cdot(-1)\cdot 4=12-2+3-3=5\neq 0.$$

Запишем все алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10;$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0;$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12;$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1;$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3;$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Запишем новую матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

и транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $1/D = 1/5$, запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2^0. Имеем

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+\frac{4}{5}\cdot 0+\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 15 \\ 2\cdot 5+\frac{12}{5}\cdot 0+\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 15 \\ 0\cdot 5+\frac{1}{5}\cdot 0+\frac{1}{5}\cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3^0. Итак, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

62—65. Решить матричные уравнения:

62. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. **63.** $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$.

64. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$. **65.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Решение системы линейных уравнений в матричной форме

Так как систему линейных уравнений можно записать в виде матричного уравнения, то эту систему можно решить как матричное уравнение.

66. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2 = 10, \\ 3x_1+2x_2+x_3 = 23, \\ x_2+2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. Составим матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix},$$

и решим его указанным способом. Находим

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=-9\neq 0;$$

$$A_{11}=3;\ A_{12}=-6;\ A_{13}=3;\ A_{21}=-4;\ A_{22}=2;\ A_{23}=-1;$$
$$A_{31}=2;\ A_{32}=-1;\ A_{33}=-4.$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix}3 & -6 & 3\\ -4 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -4\end{pmatrix}$$

и транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix}3 & -4 & 2\\ -6 & 2 & -1\\ 3 & -1 & -4\end{pmatrix}.$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{4}{9} & -\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9}\\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\ 23\\ 13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\ 3\\ 5\end{pmatrix}$$

Итак, решение системы уравнений есть $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=5$.

67—70. Решить матричным способом системы линейных уравнений:

67. $\begin{cases}3x_1-5x_2=13,\\ 2x_1+7x_2=81.\end{cases}$ **68.** $\begin{cases}3x_1-4x_2=-6,\\ 3x_1+4x_2=18.\end{cases}$

69. $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\ 3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\ 2x_1+x_2-x_3=-5.\end{cases}$ **70.** $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-7,\\ x_1+4x_2+2x_3=-1,\\ x_1-4x_2=-5.\end{cases}$

§ 5. Решение линейных уравнений по формулам Крамера

Теорема Крамера

Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений

1. Теорема Крамера

▲**Теорема.** *Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.*

Пусть дана система n линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A, а из свободных членов — матрицу-столбец B, т. е.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A обозначим Δ и назовем *определителем системы*. Таким образом,

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\Delta \neq 0$. Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных)

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots$$

$$\ldots, \quad \Delta_{x_n} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Тогда формулы Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными запишутся так:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

или короче

$$x_i = \frac{\Delta_{x_i}}{\Delta}, \text{ где } i = 1, 2, \ldots, n.$$

Рассмотрим случай, когда определитель системы равен нулю. Здесь возможны два варианта:

1. $\Delta = 0$ и каждый определитель $\Delta_{x_i} = 0$. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при неизвестных x_i пропорциональны, т. е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число k. Очевидно, что при этом система имеет бесчисленное множество решений.

2. $\Delta = 0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_{x_i} \neq 0$. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных, кроме x_i, пропорциональны. При этом получается система из противоречивых уравнений, которая не имеет решений.

2. Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений

Рассмотрим применение формул Крамера к решению систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

71. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x + 3y = 12, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определители Δ_x и Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -33; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 11.$$

Найдем значения x и y по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-33}{-11} = 3; \ y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{11}{-11} = -1.$$

Итак, решение системы есть $(3; -1)$.

72. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 6x - 4y = 11. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определитель Δ_x и Δ_y:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = 0; \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 11 & -4 \end{vmatrix} = 2; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 1.$$

Так как $\Delta = 0$, а $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, то система не имеет решений (уравнения противоречивы).

73. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = 11, \\ 6x - 9y = 33. \end{cases}$$

Решение. Находим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix} = 0, \ \Delta_x = \begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 33 & -9 \end{vmatrix} = 0; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 33 \end{vmatrix} = 0.$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений (коэффициенты при неизвестных пропорциональны).

74. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+\ z=3, \\ 5x-2y-2z=3, \\ \ x+\ y-\ z=-2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы и определители при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$=3\cdot4-2(-3)+1\cdot7=25;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+$$
$$+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot4-2(-7)+1\cdot(-1)=25;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=$$
$$=3(-7)-3(-3)+1\cdot(-13)=-25;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$
$$=3\cdot1-2\cdot(-13)+3\cdot7=50.$$

Найдем значения x, y, z по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{25}{25}=1;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-25}{25}=-1;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{50}{25}=2.$$

Итак, получаем ответ: (1; —1; 2).

75—81. Решить по формулам Крамера следующие системы уравнений:

75. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 4x-5y=2. \end{cases}$ **76.** $\begin{cases} 2x+\ 5y=3, \\ 4x+10y=6. \end{cases}$ **77.** $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2. \end{cases}$

78. $\begin{cases} 5x+8y+\ z=2, \\ 3x-2y+6z=-7, \\ 2x+\ y-\ z=-5. \end{cases}$ **79.** $\begin{cases} 2x-3y+\ z=-7, \\ x+4y+2z=-1, \\ x-4y=-5. \end{cases}$

80. $\begin{cases} 2x-7y+\ z=-4, \\ 3x+\ y-\ z=17, \\ x-\ y+3z=3. \end{cases}$ **81.** $\begin{cases} 2x+\ 5y+4z+\ t=20, \\ x+\ 3y+2z+\ t=11, \\ 2x+10y+9z+9t=40, \\ 3x+\ 8y+9z+2t=37. \end{cases}$

§ 6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

При решении систем линейных уравнений используют также *метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)*. Он состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают). Эти действия называют *прямым ходом*. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (*обратный ход*).

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1) умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число;

2) сложение и вычитание уравнений;

3) перестановку уравнений системы;

4) исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

82. Используя метод Гаусса, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y-z=4, \\ 2x-y+3z=9, \\ x-2y+2z=3. \end{cases}$$

Решение. Переставим третье уравнение на место первого:

$$\begin{cases} x-2y+2z=3, \\ 3x+2y-z=4, \\ 2x-y+3z=9. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Чтобы в 1-м столбце получить $a_{21}=a_{31}=0$, умножим 1-ю строку сначала на 3, а затем на 2 и вычтем результаты из 2-й и 3-й строк:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Разделим 2-ю строку на 8, полученные результаты умножим на 3 и вычтем из 3-й строки:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{39}{8} \end{array}\right).$$

Запишем новую эквивалентную систему, которой соответствует расширенная матрица:

$$\begin{cases} x-2y+2z=3, \\ \qquad y-\frac{7}{8}z=-\frac{5}{8}, \\ \qquad\quad \frac{13}{8}z=\frac{39}{8}. \end{cases}$$

Выполняя обратный ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные:

$$\frac{13}{8}z=\frac{39}{8};\ z=3;$$

$$y-\frac{7}{8}\cdot 3=-\frac{5}{8};\ y=-\frac{5}{8}+\frac{21}{8}=2;$$

$$x-2\cdot 2+2\cdot 3=3;\ x=3+4-6=1.$$

Итак, получаем ответ: (1; 2; 3).

83. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3, \\ 3x_1-x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4, \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

Последовательно умножим 1-ю строку на 3 и 2 и вычтем результаты из 2-й и 3-й строк, а из 4-й строки вычтем 1-ю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right).$$

Вычтем 2-ю строку последовательно из 3-й и 4-й:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отбросив нулевые строки, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right).$$

Разделим вторую строку на 5:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2/5 & -3/5 & 2 \end{array}\right).$$

Эта расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2. \end{cases}$$

Но мы знаем, что система двух уравнений с четырьмя неизвестными имеет бесчисленное множество решений.

84—89. Решить методом Гаусса следующие системы уравнений:

84. $\begin{cases} 5x - 5y - 4z = -3, \\ x - y - 5z = 11, \\ 4x - 3y - 6z = -9. \end{cases}$ **85.** $\begin{cases} x - 4y - 2z = 0, \\ 3x - 5y - 6z = -21, \\ 3x + y + z = -4. \end{cases}$

86. $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11, \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13, \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14. \end{cases}$ **87.** $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2, \\ 3x_1 - x_3 + x_4 = -3, \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6. \end{cases}$

88. $\begin{cases} 7x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 8, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = -3, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = 1, \\ -x + x_3 - 24x_4 = 1. \end{cases}$

89. $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 5x_4 = 10, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -1. \end{cases}$

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой? матрицей-столбцом? вектором?
3. Какие матрицы называются прямоугольными? квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит «транспонировать» матрицу?
10. Транспонируйте матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Что называется суммой матриц?
12. Сложите матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. Что называется произведением матрицы на число?
14. Как найти произведение двух матриц?
15. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
16. Найдите произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Какими свойствами обладает произведение матриц?
18. Что называется определителем матрицы?
19. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
20. Что называется минором?
21. Что называется алгебраическом дополнением элемента определителя?
22. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
23. Какие способы вычисления определителя вам известны?
24. Перечислите свойства определителей.
25. Какая матрица называется невырожденной?
26. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
27. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
28. Вычислите обратную матрицу для $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.
29. Как записать простейшее матричное уравнение?
30. Как решить матричное уравнение?
31. Решите матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y-5z=0, \\ 5x-2y-3z=0, \\ x+\ y+\ z=1. \end{cases}$$

32. Сформулируйте теорему Крамера.
33. Запишите формулы Крамера.
34. Решите по формулам Крамера систему уравнений из задачи 31.
35. Опишите метод Гаусса.
36. Решите методом Гаусса систему уравнений из задачи 31.

Ответы

10. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 16. а) $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$.
28. $A^{-1}=\begin{pmatrix} 5/8 & -1/8 \\ -7/8 & -3/8 \end{pmatrix}$. 31, 34, 36. (1/4; 1; −1/4).

Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите A^2+3A, если

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решите матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-4y+9z=28, \\ 7x+3y-6z=-1, \\ 7x+9y-9z=5. \end{cases}$$

3. Решите по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1-x_2=13, \\ 3x_1-8x_2+\ 5x_3+\ x_4=-23, \\ 4x_1-7x_2+14x_3+5x_4=-5, \\ x_1+2x_2-\ 3x_3-\ x_4=15. \end{cases}$$

4. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Вычислите $A^2 - 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решите матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15, \\ x + y + 5z = 16, \\ 3x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

3. Решите по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 17, \\ 5x_1 - 17x_2 + x_3 - 2x_4 = -24. \end{cases}$$

4. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -22, \\ x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 = -35, \\ 4x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 5x_4 = -48, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

Ответы

Вариант 1. 1. $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 42 \\ 10 & 4 & 44 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. 2. (2; 3; 4). 3. (6; 5; −1; 4).

4. (0; 2; 1/3; 1,5). Вариант 2. 1. $\begin{pmatrix} 21 & -11 & -17 \\ 10 & -6 & -11 \\ -14 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 2. (0; 1; 3).

3. (4; 2; 0,5). 4. (1; 0; −3; −2).

Глава II

Числовые системы и приближенные вычисления

§ 1. Действия с приближенными числами

Приближенные числа
Абсолютная погрешность
Запись приближенных чисел
Округление приближенных чисел
Относительная погрешность
Действия с приближенными числами
Вычисления с помощью микрокалькулятора
Организация вычислительного процесса

1. Приближенные числа

В большинстве случаев при измерениях, вычислениях, при выполнении операций над действительными числами получают не точные, а приближенные значения величин. Числа, выражающие точное и приближенное значение величины, мы будем для краткости называть соответственно точными и приближенными числами.

Приближенное число есть такое число, которое отличается от точного на погрешность (ошибку), допущенную в соответствии с условиями данной задачи, и заменяет точное число в расчетной формуле. Арифметические действия с приближенными числами следует производить также приближенно, ограничиваясь той степенью точности, которая необходима для данной задачи.

А. Н. Крылов, создатель теории приближенных вычислений, говорил: «При производстве всяких численных вычислений надо руководствоваться правилом: точность вычислений должна соответствовать точности данных и той практической потребности, для которой вычисления производятся». Ему же принадлежат слова: «Помните, что каждая неверная цифра — это ошибка, всякая лишняя цифра — это пол-ошибки».

Приближенные числа появляются в результате погрешностей исходных данных (результатов измерений, различных коэффициентов, технологических данных и т. п.). Это неустранимые погрешности, они не зависят от метода решения задач. Подобным же образом сказывается неточность формул, методов, моделей. В частности, экономико-математические модели как по точности коэффициентов уравнений и неравенств, так и по своей полноте обычно лишь приближенно отражают действительные условия. Возникают приближенные числа и из-за погрешностей округлений в процессе самого счета. Это устранимые погрешности, для исправления которых промежуточные результаты следует записывать с дополнительными (сомнительными) знаками.

При действиях с приближенными числами необходимо учитывать точность, с которой можно получить значения искомых величин, и точность, с которой их необходимо знать.

2. Абсолютная погрешность

Точные значения искомых величин будем обозначать буквами a_0, b_0, c_0... и т. д. (с индексом 0). На практике часто получают не точные, а приближенные значения величин, которые будем обозначать a_1, a_2, a_3, ... и т. д. (индексы — номер измерения).

Если a_0 — точное число, а a — его приближенное значение, то $a \approx a_0$.

Не все приближенные числа обладают одинаковой близостью к точному числу. Для оценки точности приближенного числа рассматривают разность $a - a_0$ между истинным и приближенным значением числа, которая называется *истинной погрешностью*. Истинная погрешность приближенного значения числа может быть как положительной, так и отрицательной.

Абсолютная величина разности между точным и приближенным значением числа, т. е. $\Delta = |a - a_0|$, называется *истинной абсолютной погрешностью* этого числа.

1. Найти истинную абсолютную погрешность числа $a_0 = 245{,}2$, если $a = 246$.

Решение. Имеем $|a - a_0| = |245{,}2 - 246| = 0{,}8$.

2—9. Найти истинные абсолютные погрешности чисел:

2. $a_0 = 348$; $a = 347{,}289$.
3. $a_0 = 64{,}28$; $a = 64{,}32$.
4. $a_0 = 14{,}262$; $a = 14{,}261983$.
5. $a_0 = 0{,}135$; $a = 0{,}13512$.
6. $a_0 = 12\,487\,856$; $a = 12\,400\,000$.
7. $a_0 = 3{,}528$; $a = 3{,}5281$.
8. $a_0 = 854\,000$; $a = 853\,997$.
9. $a_0 = 647\,398$; $a = 647\,500$.

Истинная абсолютная погрешность всегда измеряется в тех же величинах, что и рассматриваемая величина.

Так как истинное или точное число чаще всего неизвестно, то разность $|a - a_0|$ найти трудно, но можно указать положительное число Δa, удовлетворяющее неравенству $|a - a_0| \leqslant \Delta a$ или $a - \Delta a \leqslant a_0 \leqslant a + \Delta a$.

Число Δa будем называть *границей абсолютной погрешности*. Если задана граница абсолютной погрешности Δa, то говорят, что число a есть приближенное значение числа a_0 с точностью до Δa, и пишут $a_0 = a \pm \Delta a$. Отсюда следует, что $a - \Delta a \leqslant a_0 \leqslant a + \Delta a$.

10. Записать число $a_0 = 9{,}3 \pm 0{,}5$ с помощью двойного неравенства.

Решение. $9{,}3 - 0{,}5 \leqslant a_0 \leqslant 9{,}3 + 0{,}5$; $8{,}8 \leqslant a_0 \leqslant 9{,}8$.

11—18. Записать числа в виде двойного неравенства:

11. $a_0 = 347{,}50$; $\Delta a = 0{,}0047$. **12.** $a_0 = 0{,}3010$; $\Delta a = 0{,}00005$.

13. $a_0 = 7{,}269$; $\Delta a = 0{,}0004$. **14.** $a_0 = 142\,170$; $\Delta a = 30$.

15. $a_0 = 420\,000$; $\Delta a = 500$. **16.** $a_0 = 7{,}263$; $\Delta a = 0{,}00001$.

17. $a_0 = 0{,}1628$; $\Delta a = 0{,}0002$. **18.** $a_0 = 99{,}973$; $\Delta a = 0{,}027$.

В математике имеется ряд практических методов для оценки точности вычислений, в том числе и обязательные правила составления таблиц и проведения измерений.

Так, абсолютная погрешность числа, взятого из математической таблицы, не превосходит единицы последнего разряда; при физических измерениях не очень большой точности погрешность измерения определяется по наименьшему делению прибора.

При выполнении расчетов с помощью приближенных чисел чаще всего бывает нецелесообразно сохранять большое число знаков.

3. Запись приближенных чисел

Определение. Некоторая цифра приближенного числа считается *верной*, если его абсолютная погрешность Δa не превосходит единицы того разряда, в котором стоит эта цифра. В противном случае цифра называется *сомнительной*.

Очевидно, что если какая-либо цифра верна, то и все предшествующие ей цифры также являются верными.

19. Найти верные и сомнительные цифры числа $a = 945{,}673 \pm 0{,}03$.

Решение. Здесь $a = 945{,}673$, $\Delta a = 0{,}03$. Цифра 6 представляет собой цифру десятых долей, т. е. единицу этого разряда запишем так: 0,1. Сравним эту единицу с погрешностью числа; так как $0{,}1 > 0{,}03$, то абсолютная погрешность числа не превосходит (в данном случае меньше) единицы разряда, в котором стоит цифра 6. Следовательно, по определению, цифра 6 — верная. Очевидно, что цифры 9, 4, 5, стоящие перед цифрой 6, также являются верными.

Цифра 7 — это цифра сотых долей, т. е. единицу этого разряда можно записать так: 0,01. Сравним эту единицу с погрешностью числа; поскольку $0{,}01 < 0{,}03$, абсолютная погрешность числа больше единицы разряда, в котором стоит цифра 7. Следовательно, по определению, цифра 7 — сомнительная. Очевидно, что цифра 3 также является сомнительной.

20—31. Определить верные и сомнительные цифры чисел:

20. $a = 649 \pm 0{,}04$. **21.** $a = 14{,}28 \pm 0{,}03$. **22.** $a = 1{,}298 \pm \pm 0{,}003$.

23. $a = 428{,}735 \pm \pm 6$. **24.** $a = 24{,}68 \pm 0{,}05$. **25.** $a = 749{,}3 \pm 5$.

26. $a = 1428 \pm \pm 0{,}05$. **27.** $a = 729{,}5 \pm 1$. **28.** $a = 4{,}289 \pm \pm 0{,}2$.

29. $a = 679{,}3 \pm \pm 0{,}06$. **30.** $a = 428{,}7 \pm 20$. **31.** $a = 64{,}28 \pm 5$.

В записи приближенных чисел принято соблюдать следующие правила:

I. *Оставлять в записи приближенного числа только верные цифры.*

II. *Если в десятичной дроби последние верные цифры нули, то их надо выписать.*

III. *Если число содержит в конце нули, не являющиеся верными цифрами, то они должны быть заменены на* 10^n, *где* n — *число нулей, которое надо заменить.*

32. Записать правильно число: а) $a = 0{,}075 \pm 0{,}000005$; б) $a = 746\,000\,000 \pm 5000$.

Решение. а) Так как погрешность числа не превосходит 0,00001, то число должно быть записано в виде $a = 0{,}07500$.

б) Здесь первой верной цифрой является цифра десятков тысяч, поскольку погрешность числа не превосходит 10 000. Значит, число должно быть записано в виде $a = 74\,600 \cdot 10^4$.

33—40. Записать правильно следующие приближенные числа:

33. $a_0 = 0{,}35$; $\Delta a = 0{,}00005$. **34.** $a = 163\,000\,000$; $\Delta a = 500$.

35. $a_0 = 765\,000$; $\Delta a = 5$. **36.** $a_0 = 0{,}3700$; $\Delta a = 0{,}05$.

37. $a_0 = 278\,000$; $\Delta a = 50$; **38.** $a_0 = 428$; $\Delta a = 5$.

39. $a_0 = 649{,}3$; $\Delta a = 5$. **40.** $a_0 = 172\,420$; $\Delta a = 0{,}05$.

41. Указать абсолютную погрешность приближенного числа: а) $a = 2\,175\,000$; б) $a = 173 \cdot 10^4$.

Решение. а) Так как выписаны все нули, то нули разряда сотен, десятков, единиц — верные цифры. Следовательно, абсолютная погрешность числа не превосходит единицы наименьшего разряда, в котором стоят верные цифры, т. е. $\Delta a = 1$.

б) Согласно правилу III на 10^4 заменены нули, не являющиеся верными цифрами. Следовательно, первой верной цифрой является цифра 3 в разряде десятков тысяч. Итак, $\Delta a = 10\,000$.

42—53. Указать абсолютные погрешности следующих приближенных чисел:

42. $a = 14{,}5 \cdot 10$. **43.** $a = 263 \cdot 10^4$. **44.** $a = 748{,}56$.

45. $a = 34{,}20$. **46.** $a = 759{,}00$. **47.** $a = 64{,}27$.

48. $a = 23{,}560$. **49.** $a = 1{,}0000$. **50.** $a = 147{,}3 \cdot 10^3$.

51. $a = 142{,}3 \cdot 10$. **52.** $a = 596{,}2 \cdot 10^5$. **53.** $a = 15{,}7 \cdot 10^2$.

54—71. Записать правильно следующие приближенные числа, учитывая, что $\Delta a = 500$:

54. $a = 15\,400$. **55.** $a = 24\,300$. **56.** $a = 2600$.
57. $a = 4000$. **58.** $a = 600$. **59.** $a = 56\,100$.
60. $a = 1700$. **61.** $a = 41\,500$. **62.** $a = 89\,300$.
63. $a = 666\,400$. **64.** $a = 759\,200$. **65.** $a = 111\,600$.
66. $a = 35\,200$. **67.** $a = 74\,900$. **68.** $a = 54\,300$.
69. $a = 7500$. **70.** $a = 1\,628\,300$. **71.** $a = 428\,600$.

Значащими цифрами числа называют все его верные цифры, за исключением нулей, стоящих левее первой цифры, отличной от нуля.

Например, число 0,712 содержит три значащие цифры: 7, 1, 2; число 0,0016 — две значащие цифры: 1, 6; число 45,03 — четыре значащие цифры: 4, 5, 0, 3.

Следует помнить, что в записи натурального числа все цифры являются значащими. Так, все цифры натурального числа 2574 — значащие.

4. Округление приближенных чисел

Запись приближенных чисел требует их округления.

Чтобы округлить число с точностью до указанного разряда, нужно цифры, стоящие правее указанного разряда, отбросить (в дробной части числа) или заменить нулями (в целой части числа). Если при округлении первая отбрасываемая цифра меньше 5, то последнюю сохраняемую цифру не изменяют; если первая отбрасываемая цифра больше или равна 5, то последнюю сохраняемую цифру увеличивают на 1.

72. Округлить с точностью до 0,01: а) 1,423; б) 3,2387; в) 1,996.

Решение. а) Так как отбрасываемая цифра $3<5$, то округляем до 1,42;

б) так как первая отбрасываемая цифра $8>5$, то округляем до 3,24;

в) так как первая отбрасываемая цифра $6>5$, то округляем до до 2,00.

73—83. Округлить с точностью до 0,01 следующие числа:

73. 0,428. **74.** 2,645. **75.** 8,993.
76. 16,452. **77.** 25,689. **78.** 81,341.
79. 10,328. **80.** 76,645. **81.** 62,8428.
82. 15,1613. **83.** 17,8975. **84.** 22,1488.

85—93. Округлить с точностью до 1 следующие числа:

85. 16,285. **86.** 17,349. **87.** 34,931.
88. 60,605. **89.** 0,785. **90.** 2,501.
91. 31,499. **92.** 785,501. **93.** 0,499.

94—102. Округлить с точностью до 1000 следующие числа:

94. 1835.	**95.** 4382.	**96.** 64 975.
97. 10 428.	**98.** 72 356.	**99.** 16 765.
100. 4172,035.	**101.** 6872,73.	**102.** 1335,42.

5. Относительная погрешность

Допустим, что погрешность какого-либо измерения равна 0,2 см. Если с такой погрешностью измеряли длину тетради, то это большая погрешность, а если измеряли длину комнаты — небольшая. Таким образом, имеет значение не только какова погрешность, но и отношение ее к измеряемой величине.

Относительной погрешностью приближенного значения числа a называется отношение абсолютной погрешности этого числа к числу a.

Так как абсолютная погрешность обычно бывает неизвестна, то на практике используют понятие границы относительной погрешности числа.

Границей относительной погрешности ε_a приближенного значения a называется отношение границы абсолютной погрешности Δa к модулю числа a, т. е.

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|}.$$

Обычно границу относительной погрешности записывают в процентах, т. е.

$$\varepsilon_a = \frac{\Delta a}{|a|} \cdot 100\% .$$

Чем меньше граница относительной погрешности, тем выше качество измерения.

103. Найти границу относительной погрешности числа $a = 142{,}5$, если $\Delta a = 0{,}05$.

Решение. $\varepsilon_a = \frac{0{,}05}{142{,}5} \cdot 100\ \% = 0{,}00034 \cdot 100\ \% = 0{,}03\ \%$.

104—111. Определить границы относительных погрешностей следующих чисел:

104. $a = 6{,}93$; $\Delta a = 0{,}02$.	**105.** $a = 12{,}79$; $\Delta a = 2$.
106. $a = 648{,}5$; $\Delta a = 0{,}05$.	**107.** $a = 792{,}3$; $\Delta a = 0{,}05$.
108. $a = 2{,}372$; $\Delta a = 0{,}004$.	**109.** $a = 4{,}25$; $\Delta a = 0{,}02$.
110. $a = 34{,}27$; $\Delta a = 0{,}005$.	**111.** $a = 1{,}9345$; $\Delta a = 0{,}0005$.

112. Найти границу абсолютной погрешности числа $a = 1348$, если $\varepsilon_a = 0{,}04\ \%$.

Решение. Запишем границу относительной погрешности в виде $0{,}04\ \% = 0{,}0004$. Чтобы найти границу абсолютной погрешности числа a, воспользуемся формулой $\Delta a = |a|\varepsilon_a$, откуда $\Delta a = 1348 \cdot 0{,}0004 = 0{,}539 \approx 0{,}5$. Значит, $\Delta a = 0{,}5$ и число может быть записано так: $a = 1348 \pm 0{,}5$.

113—118. Найти границу абсолютной погрешности следующих чисел:

113. $a = 352{,}004$; $\varepsilon_a = 0{,}03\,\%$. **114.** $a = 71{,}28$; $\varepsilon_e = 0{,}005\,\%$.

115. $a = 0{,}649$; $\varepsilon_a = 0{,}002\,\%$. **116.** $a = 42{,}78$; $\varepsilon_a = 3\,\%$.

117. $a = 142{,}5$; $\varepsilon_a = 0{,}3\,\%$. **118.** $a = 740\,000{,}0$; $\varepsilon_a = 0{,}05\,\%$.

6. Действия с приближенными числами

Для того чтобы научиться производить действия с приближенными числами, нужно уметь находить погрешность этих действий. Сформулируем следующие правила:

I. *Граница абсолютной погрешности суммы (разности) двух чисел равна сумме границ абсолютных погрешностей заданных чисел:*

$$\Delta_{a+b} = \Delta_a + \Delta_b;\quad \Delta_{a-b} = \Delta_a + \Delta_b.$$

II. *Граница абсолютной погрешности произведения двух чисел равна произведению границы относительной погрешности произведения на абсолютную величину произведения этих чисел:*

$$\Delta_{ab} = \varepsilon_{ab}|ab|.$$

III. *Граница абсолютной погрешности частного двух чисел равна произведению границы относительной погрешности частного на абсолютную величину частного этих чисел:*

$$\Delta_{a/b} = \varepsilon_{a/b}\left|\frac{a}{b}\right|.$$

IV. *Граница относительной погрешности произведения (частного) двух чисел равна сумме относительных погрешностей этих чисел:*

$$\varepsilon_{ab} = \varepsilon_a + \varepsilon_b;\quad \varepsilon_{a/b} = \varepsilon_a + \varepsilon_b.$$

V. *Граница относительной погрешности степени равна произведению границы относительной погрешности основания на показатель степени:*

$$\varepsilon_{a^n} = \varepsilon_a n.$$

На практике пользуются более простыми правилами, называемыми *правилами подсчета цифр:*

I. *При сложении и вычитании приближенных чисел в результате сохраняют столько десятичных знаков, сколько их в наименее точном числе.*

II. *При умножении и делении приближенных чисел в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в числе с меньшим количеством значащих цифр.*

III. *При возведении в степень в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их в основании степени.*

IV. *При извлечении корня сохраняют столько значащих цифр, сколько их в подкоренном выражении.*

V. *При выполнении промежуточных действий оставляют на один знак больше, чем требуют правила, а в результате запасной знак округляют.*

VI. *Если в вычислениях точность задана заранее, то вычисления ведут с запасным знаком, который в результате округляют.*

119. Сложить приближенные числа:

$$14{,}5+113{,}76+12{,}783+11{,}2161.$$

Решение. Округляем все числа по наименее точному числу (14,5), оставляя запасной знак, и производим сложение:

$$14{,}5+113{,}76+12{,}78+11{,}22=152{,}26.$$

Запасной знак округляем и получаем ответ: 152,3.

120—131. Произвести действия с приближенными числами:

120. $645{,}27+102{,}324+715{,}645+10{,}2$.

121. $428{,}263+107{,}316+264{,}2+748{,}35$.

122. $15{,}283+4{,}04527+8{,}253741+17{,}52$.

123. $12030+645{,}29+748{,}5+1652{,}375$.

124. $26{,}35+1400+729{,}3+745{,}68$.

125. $428{,}56-170$. **126.** $356{,}3295-16{,}2$.

127. $17200-1234{,}45$. **128.** $651{,}0-79{,}8372$.

129. $16{,}27-0{,}64986$. **130.** $745{,}428-112{,}34863$.

131. $428{,}3-17{,}642$. **132.** $654-398{,}645$.

133. Найти сумму $318{,}7864+211{,}1246+76{,}1613+106{,}1914$ с точностью до 0,01.

Решение. Округляем все числа, оставляя запасной знак:

$$318{,}786+211{,}125+76{,}161+106{,}191=712{,}263.$$

Округляем запасной знак и получаем ответ: 712,26.

134—136. Найти с точностью до 0,01:

134. $564{,}375+7489{,}296+114{,}206+748{,}601$.

135. $172{,}350+113{,}215+712{,}305+546{,}554$.

136. $428{,}726+713{,}514+695{,}207+844{,}398$.

137—139. Найти с точностью 100:

137. $283{,}425+15\,627{,}321+17\,216{,}35$.

138. $563+14\,879+74\,596+23\,702$.

139. $7123+42\,596+7\,835\,516+2\,961\,023$.

140. Найти произведение двух приближенных чисел: $0{,}3862\times\times 0{,}85$.

Решение. Округляем первое число, оставляя один запасной знак, так как второе число содержит две значащих цифры. Таким образом,

$$0{,}3862\cdot 0{,}85=0{,}386\cdot 0{,}85=0{,}3281\approx 0{,}33.$$

141. Вычислить $x = \dfrac{2{,}48 \cdot 0{,}3665}{5{,}643}$.

Решение. Наименьшее количество значащих цифр, равное 3, содержит число 2,48; поэтому остальные числа округляем до трех значащих цифр (0,367 и 5,64). Следовательно,

$$x = \frac{2{,}48 \cdot 0{,}367}{5{,}64} = 0{,}16137 \approx 0{,}161.$$

142. Вычислить $3{,}27^3$.

Решение. Находим $3{,}27 \cdot 3{,}27 \cdot 3{,}27 = 34{,}965 \approx 35{,}0$. В результате оставлены три значащих цифры, так как столько значащих цифр содержит основание степени.

143. Вычислить $x = \dfrac{\sqrt{3{,}27} \cdot 0{,}4456}{3{,}284}$.

Решение. Извлекая квадратный корень из числа 3,27, получим $\sqrt{3{,}27} = 1{,}81$. Здесь оставлены три значащих цифры, так как столько значащих цифр содержит подкоренное выражение. Округляем остальные числа до трех значащих цифр. В результате находим

$$x = \frac{1{,}81 \cdot 0{,}446}{3{,}28} \approx 0{,}246.$$

144—149. Произвести вычисления:

144. $x = \dfrac{(0{,}17 + 0{,}2445)0{,}56}{1{,}424}$. **145.** $x = \dfrac{0{,}26\sqrt{32{,}3}}{16{,}64}$.

146. $x = \dfrac{\sqrt{1{,}64}\sin 43°24'}{0{,}7}$. **147.** $x = \dfrac{7{,}8\sin 36°12'}{\sin 73°42'}$.

148. $x = \dfrac{\sqrt{29{,}56}(37{,}2 - 17{,}4)}{13{,}2}$. **149.** $x = \dfrac{(35{,}264 + 17{,}3)\sin 41°30'}{165{,}2 - 17{,}483}$.

7. Вычисления с помощью микрокалькулятора

Из предыдущих расчетов видно, что вычисления требуют большого количества времени, внимания и умения для выполнения арифметических действий. Эту работу значительно облегчает применение микрокалькуляторов.

Все микрокалькуляторы принято делить на три основные группы: простейшие (или бытовые), инженерные и программируемые.

Простейшие микрокалькуляторы предназначаются, как правило, для выполнения арифметических операций и последовательностей таких операций. Более совершенные модели микрокалькуляторов могут иметь одну-две встроенные микропрограммы (обычно вычисление обратных величин, процентов, извлечение квадратного корня), а самые совершенные модели этой группы имеют также дополнительные регистры памяти, что во многих случаях может облегчить выполнение усложненных вычислений.

8. Организация вычислительного процесса

Вычислениями принято называть нахождение нового числа, искомого результата с помощью выполнения операций над уже известными числами. Совокупность таких операций образует вычислительный процесс. Характер операций может быть различным, но преобладающими являются логические и арифметические операции.

Для вычисления надо располагать исходными числами (исходными данными). Целью любого вычислительного процесса является получение нового числа — результата вычислений. Операции вычислительного процесса выполняются вручную или с помощью различных технических средств.

Основными требованиями к любым вычислениям являются правильность, точность, быстрота и автоматизация.

Следует знать, что при выполнении массовых вычислений важно придерживаться определенных правил, выработанных практикой. Они экономят труд вычислителя, позволяют рационально использовать вычислительную технику и вспомогательные средства.

Основные этапы вычислительной работы таковы:

1^0. Записывают формулу, по которой будут вестись вычисления.

2^0. Заготавливают расчетный бланк, на котором будут записываться результаты всех промежуточных вычислений.

3^0. Определяют точность вычислений (т. е. число верных десятичных знаков или значащих цифр, которое должен иметь результат).

4^0. Выбирают средства вычислений (вычислительные машины, таблицы и т. п.) для каждого звена вычисления.

5^0. Устанавливают методы текущего контроля вычислений.

6^0. Производят вычисления.

7^0. Производят заключительный контроль вычислений.

Рассмотрим подробно первый этап.

Прежде всего вычислитель должен разработать подробную вычислительную схему, точно указывающую порядок действий и дающую возможность получить искомый результат наиболее простым способом, например серией однотипных вычислений. Кроме того, эта схема при необходимости позволит использовать труд менее квалифицированных вычислителей.

Составление вычислительной схемы проиллюстрируем на примере. Пусть требуется вычислить рентабельность производства по формуле

$$\text{Р} = \frac{\text{П}}{\text{О}_{\text{осн}} + \text{О}_{\text{об}}} \cdot 100\,\%.$$

До начала вычислений следует продумать последовательность всех промежуточных операций, определить удобное расположение записей. Рассматриваем данную формулу и устанавливаем, в какой последовательности и какие действия надо производить. В точном соответствии с порядком действий составляем таблицу, каждый столбец которой предназначен для записи результата определенной операции. Так, для вычисления рентабельности производства порядок вычислений должен быть следующим:

1. Записываем значение П (прибыль предприятия).

2. Записываем значение $О_{осн}$ (среднегодовую стоимость основных фондов).

3. Записываем значение $О_{об}$ (среднегодовую стоимость нормируемых оборотных средств).

4. Находим $О_{осн}+О_{об}$ (складываем результаты п. 2 и п. 3) и результаты записываем в столбец 4.

5. Находим $\frac{П}{О_{осн}+О_{об}}$ (делим результаты п. 1 и п. 4) и результат записываем в столбец 5.

6. Умножаем результат п. 5 на 100 % и записываем в столбец 6.

Теперь составим расчетный бланк.

П	$О_{осн}$	$О_{об}$	$О_{осн}+О_{об}$ $(2+3)$	$\frac{П}{О_{осн}+О_{об}}$ $(1:4)$	p $(5\times 100\ \%)$
1	2	3	4	5	6

Такую таблицу (расчетный бланк) следует начертить на листе бумаги и выполнять последовательно вычисления, записывая каждый полученный результат в соответствующую графу. Вычисления рекомендуется производить по столбцам, а не по строкам (последовательное выполнение однотипных операций позволяет использовать один и тот же вычислительный прибор).

Если по характеру задачи требуется производить приближенные вычисления, то следует установить, с какой точностью нужно производить промежуточные вычисления.

Так, в рассмотренном примере столбец 4 считается с точностью до 1000; столбец 5 — с точностью до 0,001; столбец 6 — с точностью до 0,1 %.

Все результаты вычислений должны контролироваться. Различают текущий и заключительный контроль. Хорошим методом текущего контроля являются вычисления «в две руки». Это означает, что вычисления должны вестись параллельно и независимо друг от друга двумя вычислителями. Результаты вычислений должны время от времени сверяться. Эффективно и использование контрольных соотношений. Заключительный контроль осуществляется различными методами, но во всех случаях и на всех этапах работы должно оставаться неизменным следующее требование — аккуратность и четкость записей в вычислительных бланках.

§ 2. Комплексные числа

1. Понятие мнимой единицы

Допустим, что существует такое число, квадрат которого равен -1. Обозначим это число буквой i; тогда можно записать: $i^2 = -1$.

Число i будем называть *мнимой единицей**, а предыдущее равенство будем считать определением мнимой единицы.

Из этого равенства находим $i = \sqrt{-1}$.

Введение мнимой единицы позволяет нам теперь извлекать корни квадратные из отрицательных чисел.

Например,

$$\sqrt{-36} = \sqrt{36(-1)} = \sqrt{36}\cdot\sqrt{-1} = 6i;$$

$$\sqrt{-\frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot(-1)} = \sqrt{\frac{1}{4}}\cdot\sqrt{-1} = \frac{1}{2}i.$$

2. Степени мнимой единицы

Рассмотрим степени мнимой единицы:

$$
\begin{aligned}
&i;\\
&i^2 = -1;\\
&i^3 = i^2\cdot i = (-1)i = -i;\\
&i^4 = i^3\cdot i = -i\cdot i = -i^2 = -(-1) = 1;\\
&i^5 = i^4\cdot i = 1\cdot i = i;\\
&i^6 = i^5\cdot i = i\cdot i = i^2 = -1;\\
&i^7 = i^6\cdot i = (-1)\cdot i = -i;\\
&i^8 = i^7\cdot i = -i\cdot i = 1;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Если выписать все значения степеней числа i, то мы получим такую последовательность: i, -1, $-i$, 1, i, -1, $-i$, 1 и т. д. Легко

* i — начальная буква французского слова imaginaire — «мнимый».

видеть, что значения степеней числа i повторяются с периодом, равным 4.

Так, $i=i$, $i^2=-1$, $i^3=-i$, $i^4=1$; $i^5=i$, $i^6=-1$, $i^7=-i$, $i^8=1$; $i^9=i$, $i^{10}=-1$, $i^{11}=-i$, $i^{12}=1$.

Таким образом, если показатель степени числа i делится на 4, то значение степени равно 1; если при делении показателя степени на 4 в остатке получается 1, то значение степени равно i; если при делении показателя степени на 4 получается остаток 2, то значение степени равно -1; наконец, если при делении на 4 остаток равен 3, то значение степени равно $-i$. Пользуясь этим, можно вычислять любую степень числа i.

150. Найти: i^{28}; i^{33}; i^{135}.

Решение. Имеем $28=4\cdot7$ (нет остатка); $33=4\cdot8+1$; $135=4\cdot33+3$. Соответственно получим $i^{28}=1$; $i^{33}=i$; $i^{135}=-i$.

151—157. Вычислить:

151. i^{66}; i^{143}; i^{216}; i^{137}.

152. $i^{43}+i^{48}+i^{44}+i^{45}$.

153. $(i^{36}+i^{17})i^{23}$.

154. $(i^{133}+i^{115}+i^{200}+i^{142})(i^{17}+i^{36})$.

155. $i^{145}+i^{147}+i^{264}+i^{345}+i^{117}$.

156. $(i^{13}+i^{14}+i^{15})i^{32}$.

157. $(i^{64}+i^{17}+i^{13}+i^{82})(i^{72}-i^{34})$.

3. Определение комплексного числа

Мы знакомы с действительными числами и с мнимыми единицами. Рассмотрим теперь числа нового вида.

Определение 1. Числа вида $a+bi$, где a и b — действительные числа, i — мнимая единица, будем называть *комплексными*.

Число a будем называть *действительной частью* комплексного числа, bi — *мнимой частью* комплексного числа, b — *коэффициентом при мнимой части*. Возможны случаи, когда действительные числа a и b могут быть равными нулю. Если $a=0$, то комплексное число bi называется *чисто мнимым*. Если $b=0$, то комплексное число $a+bi$ равно a и называется *действительным*. Если $a=0$ и $b=0$ одновременно, то комплексное число $0+0i$ равно нулю. Итак, мы получили, что действительные числа и чисто мнимые числа представляют собой частные случаи комплексного числа.

Запись комплексного числа в виде $a+bi$ называется *алгебраической формой* комплексного числа.

Два комплексных числа $a+bi$ и $c+di$ условились считать *равными* тогда и только тогда, когда в отдельности равны их действительные части и коэффициенты при мнимой единице, т. е. $a+bi=c+di$, если $a=c$ и $b=d$.

158. Найти x и y из равенства:

а) $3y+5xi=15-7i$; б) $(2x+3y)+(x-y)i=7+6i$.

Решение. а) Согласно условию равенства комплексных чисел имеем $3y=15$, $5x=-7$. Отсюда $x=-7/5$, $y=5$.

б) Из условия равенства комплексных чисел следует

$$\begin{cases} 2x+3y=7, \\ x-\ \ y=6. \end{cases}$$

Умножив второе уравнение на 3 и сложив результат с первым уравнением, имеем $5x=25$, т. е. $x=5$. Подставим это значение во второе уравнение: $5-y=6$, откуда $y=-1$. Итак, получаем ответ: $x=5$, $y=-1$.

159—164. Найти значения x и y из равенств:

159. $7x+5i=1-10iy$.

160. $(2x+y)-i=5+(y-x)i$.

161. $x+(3x-y)i=2-i$.

162. $(1+2i)x+(3-5i)y=$ $=1-3i$.

163. $(2-i)x+(1+i)y=5-i$.

164. $(3i-1)x+(2-3i)y=$ $=2-3i$.

4. Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

165. Даны комплексные числа $z_1=2+3i$, $z_2=5-7i$. Найти: а) z_1+z_2; б) z_1-z_2; в) z_1z_2.

Решение. а) $z_1+z_2=(2+3i)+(5-7i)=2+3i+5-7i=(2+5)+(3i-7i)=7-4i$;

б) $z_1-z_2=(2+3i)-(5-7i)=2+3i-5+7i=(2-5)+(3i+7i)=-3+10i$;

в) $z_1z_2=(2+3i)(5-7i)=10-14i+15i-21i^2=10-14i+15i+21=(10+21)+(-14i+15i)=31+i$, (здесь учтено, что $i^2=-1$).

166—173. Произвести сложение и вычитание комплексных чисел:

166. $(3+5i)+(7-2i)$.

167. $(6+2i)+(5+3i)$.

168. $(-2+3i)+(7-2i)$.

169. $(5-4i)+(6+2i)$.

170. $(3-2i)-(5+i)$.

171. $(4+2i)-(-3+2i)$.

172. $(-5+2i)-(5+2i)$.

173. $(-3-5i)-(7-2i)$.

174—181. Произвести умножение комплексных чисел:

174. $(2+3i)(5-7i)$.

175. $(6+4i)(5+2i)$.

176. $(3-2i)(7-i)$.

177. $(-2+3i)(3+5i)$.

178. $(1-i)(1+i)$.

179. $(3+2i)(1+i)$.

180. $(6+4i)3i$.

181. $(2-3i)(-5i)$.

При выполнении умножения можно использовать формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ и $(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab\pm b^3$.

182. Выполнить действия: а) $(2+3i)^2$; б) $(3-5i)^2$; в) $(5+3i)^3$.

Решение. а) $(2+3i)^2=4+2\cdot2\cdot3i+9i^2=4+12i-9=-5+$ $+12i$;

б) $(3-5i)^2=9-2\cdot3\cdot5i+25i^2=9-30i-25=-16-30i$;

в) $(5+3i)^3=125+3\cdot25\cdot3i+3\cdot5\cdot9i^2+27i^3$;

так как $i^2=-1$, а $i^3=-i$, то получим $(5+3i)^3=125+225i-135-$ $-27i=-10+198i$.

183—190. Выполнить действия:

183. $(3+5i)^2$. **184.** $(2-7i)^2$. **185.** $(6+i)^2$. **186.** $(1-5i)^2$.

187. $(3+2i)^3$. **188.** $(3-2i)^3$. **189.** $(4+2i)^3$. **190.** $(5-i)^3$.

Рассмотрим теперь применение формулы $(a+b)(a-b)=$ $=a^2-b^2$.

191. Выполнить действия: а) $(5+3i)(5-3i)$; б) $(2+5i)(2-$ $-5i)$; в) $(1+i)(1-i)$.

Решение. а) $(5+3i)(5-3i)=5^2-(3i)^2=25-9i^2=25+9=34$;

б) $(2+5i)(2-5i)=2^2-(5i)^2=4+25=29$;

в) $(1+i)(1-i)=1^2-i^2=1+1=2$.

192—197. Выполнить действия;

192. $(3+2i)(3-2i)$. **193.** $(5+i)(5-i)$.

194. $(1-3i)(1+3i)$. **195.** $(7-6i)(7+6i)$.

196. $(a+bi)(a-bi)$. **197.** $(m-ni)(m+ni)$.

Обратим внимание на то, что при использовании этой формулы всегда получается частный случай комплексного числа — действительное число, а комплексные числа, которые мы умножаем, являются сопряженными.

Определение 2. Два комплексных числа называются *сопряженными*, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Мы видим, что произведение двух сопряженных чисел всегда равно действительному числу. Воспользуемся этим свойством для выполнения деления двух комплексных чисел. Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

198. Выполнить деление: а) $\frac{2+3i}{5-7i}$; б) $\frac{3+5i}{2+6i}$.

Решение. а) Имеем

$$\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)}.$$

Произведем умножение для делимого и делителя в отдельности:

$$(2+3i)(5+7i)=10+14i+15i+21i^2=-11+29i;$$
$$(5-7i)(5+7i)=25-49i^2=25+49=74.$$

Итак,

$$\frac{2+3i}{5-7i}=\frac{(2+3i)(5+7i)}{(5-7i)(5+7i)}=\frac{-11+29i}{74}=-\frac{11}{74}+\frac{29}{74}i;$$

б) $\frac{3+5i}{2+6i}=\frac{(3+5i)(2-6i)}{(2+6i)(2-6i)}=\frac{6-18i+10i-30i^2}{4-36i^2}=\frac{36-8i}{40}=$
$=\frac{9}{10}-\frac{1}{5}i.$

199—210. Выполнить деление:

199. $\frac{5i}{3+2i}$. **200.** $\frac{-2i}{5-i}$. **201.** $\frac{2-3i}{5+2i}$.

202. $\frac{3-i}{5-3i}$. **203.** $\frac{3+2i}{1-5i}$. **204.** $\frac{3-7i}{3+2i}$.

205. $\frac{3+2i}{5i}$. **206.** $\frac{6-7i}{i}$. **207.** $\frac{2+3i}{2-3i}$.

208. $\frac{5-7i}{5+7i}$. **209.** $\frac{1-i}{1+i}$. **210.** $\frac{1+i}{1-i}$.

211—216. Выполнить действия:

211. $\frac{(2+3i)-(5+7i)}{2+3i}$. **212.** $\frac{3+2i}{3-2i}+\frac{5+2i}{3+2i}$.

213. $\frac{6+2i}{3-7i}-\frac{2+3i}{2+5i}$. **214.** $\frac{6+2i}{1-i}-i^{27}$.

215. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{12}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}$ **216.** $i^{123}+(1-i)^6-(1+i)^8$.

Рассмотрим решение квадратных уравнений, дискриминант которых отрицателен.

217. Решить уравнение: а) $x^2-6x+13=0$; б) $9x^2+12x+29=0$.

Решение. а) Найдем дискриминант по формуле $D=b^2-4ac$. Так как $a=1$, $b=-6$, $c=13$, то $D=(-6)^2-4\cdot1\cdot13=36-52=-16$; $\sqrt{D}=\sqrt{-16}=\sqrt{16\cdot(-1)}=4i$. Корни уравнения находим по формулам $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$:

$$x_1=\frac{6-4i}{2}=\frac{2(3-2i)}{2}=3-2i;\ x_2=\frac{6+4i}{2}=\frac{2(3+2i)}{2}=3+2i.$$

б) Здесь $a=9$, $b=12$, $c=29$. Следовательно, $D^2=b^2-4ac=12^2-4\cdot9\cdot29=144-1044=-900$, $\sqrt{D}=\sqrt{-900}=\sqrt{900(-1)}=30i$. Находим корни уравнения:

$$x_1=\frac{-12-30i}{18}=\frac{6(-2-5i)}{18}=\frac{-2-5i}{3}=-\frac{2}{3}-\frac{5}{3}i;$$

$$x_2=\frac{-12+30i}{18}=\frac{6(-2+5i)}{18}=\frac{-2+5i}{3}=-\frac{2}{3}+\frac{5}{3}i.$$

Мы видим, что если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то квадратное уравнение имеет два сопряженных комплексных корня.

218—221. Решить квадратные уравнения:

218. $x^2-4x+13=0$. **219.** $x^2+3x+4=0$.

220. $2{,}5x^2+x+1=0$. **221.** $4x^2-20x+26=0$.

5. Геометрическая интерпретация комплексного числа

Комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить точкой Z плоскости с координатами $(a;\ b)$ (рис. 7). Для этого выберем на плоскости декартову прямоугольную систему координат. Действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют *действительной* (или *вещественной*) *осью*; чисто мнимые числа — точками оси ординат, которую будем называть *мнимой осью*.

Каждой точке плоскости с координатами $(a;\ b)$ соответствует один и только один вектор с началом $O(0;\ 0)$ и концом $Z(a;\ b)$. Поэтому комплексное число $z=a+bi$ можно изобразить в виде вектора $\vec{z}$ с началом в точке $O(0;\ 0)$ и концом в точке $Z(a;\ b)$.

222. Изобразить на плоскости числа: $z_1=5$; $z_2=-3i$; $z_3=3+2i$; $z_4=5-2i$; $z_5=-3+2i$; $z_6=-1-5i$.

Решение. Заданные числа изображены на рис. 8.

6. Тригонометрическая форма комплексного числа

Пусть комплексное число $z=a+bi$ изображено в виде вектора $\vec{r}$ с началом $O\ (0;\ 0)$ и концом $Z\,(a;\ b)$ (рис. 9).

Модулем комплексного числа $z=a+bi$ называется длина вектора $\vec{z}$, которую можно найти по формуле $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$. Обозначив модуль комплексного числа буквой r, получим

$$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}. \tag{1}$$

Аргументом комплексного числа называется угол φ, который образует вектор $\vec{z}$ с положительным направлением оси абсцисс. Величину угла φ можно найти с помощью формул

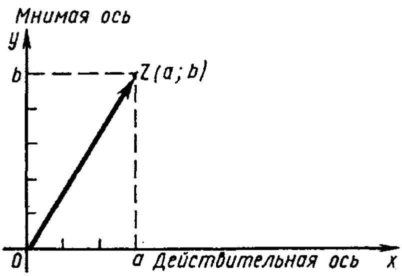


Рис. 7

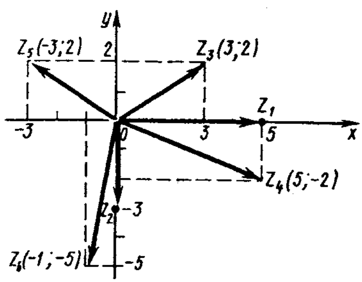


Рис. 8

$$\cos\varphi = \frac{a}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{b}{r}. \qquad (2)$$

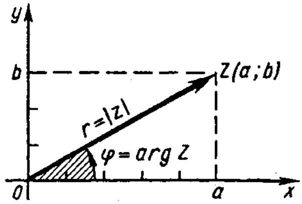


Рис. 9

Эта система имеет бесчисленное множество решений вида $\varphi + 2\pi k$, где k — любое целое число. Таким образом, любое комплексное число z имеет бесконечное множество аргументов, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Если $k=0$, то мы получим главное значение аргумента φ, которое и будем называть аргументом комплексного числа.

Из соотношений $\cos\varphi = a/r$ и $\sin\varphi = b/r$ следует $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Если в запись комплексного числа z вместо a и b подставить эти значения, то получим

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Таким образом, мы получили новую форму записи комплексного числа:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (3)$$

которая называется *тригонометрической формой* комплексного числа.

Сформулируем правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической.

1^0. Находят модуль комплексного числа r, для чего используют формулу $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2^0. Для нахождения φ сначала определяют геометрически, в какой четверти находится точка z.

3^0. Составляют уравнения $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ и $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ и по решению одного из них находят угол φ.

4^0. Записывают комплексное число z в тригонометрической форме.

223. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = 1 + i$.

Решение. 1^0. Так как $a=1$, $b=1$, то $r = |z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$.

2^0. Изобразим число z геометрически (рис. 10). Мы видим, что числу z соответствует точка Z, лежащая в I четверти, и вектор $\vec{z}$.

3^0. Составим отношения $\cos\varphi = a/r$ и $\sin\varphi = b/r$, т. е.

$$\cos\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2, \quad \sin\varphi = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2.$$

Этим соотношениям соответствует в I четверти угол $\varphi = 45^\circ$ или $\varphi = \pi/4$.

4^0. Так как $r = \sqrt{2}$, $\varphi = 45^\circ$ или $\varphi = \pi/4$, то тригонометрическая форма заданного комплексного числа имеет вид

$$z = 1 + i = \sqrt{2}(\cos 45^\circ + i\sin 45^\circ) \text{ или } z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

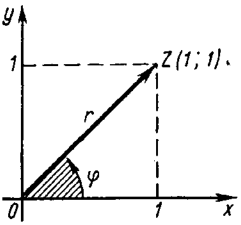


Рис. 10

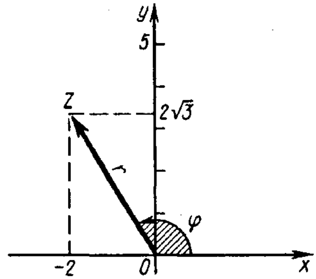


Рис. 11

224. Записать число $z=-2+2i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

Решение. 1^0. Здесь $a=-2$, $b=2\sqrt{3}$. Следовательно,

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-2)^2+(2\sqrt{3})^2}=\sqrt{4+12}=\sqrt{16}=4.$$

2^0. Изобразим число z геометрически (рис. 11). Мы видим, что числу z соответствует точка Z, лежащая во II четверти, и вектор $\vec{z}$.

3^0. Находим

$$\cos\varphi=a/r=-2/4=-1/2;\ \sin\varphi=b/r=2\sqrt{3}/4=\sqrt{3}/2.$$

Этим соотношениям соответствует угол $\varphi=180°-60°=120°$ или $\varphi=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}$.

4^0. Запишем заданное число в тригонометрической форме:

$$z=-2+2i\sqrt{3}=4(\cos 120°+i\sin 120°)$$

или

$$z=-2+2i\sqrt{3}=4\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

225. Записать в тригонометрической форме чисто мнимое число $z=-3i$.

Решение. 1^0. Запишем данное число в виде $z=0-3i$. Значит, $a=0$, $b=-3$, откуда

$$r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{0+(-3)^3}=\sqrt{9}=3.$$

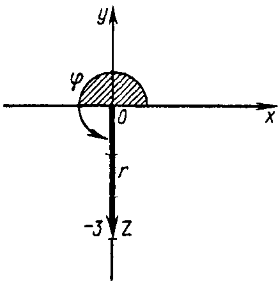


Рис. 12

2^0. Точка, соответствующая геометрически числу $z=-3i$, лежит на мнимой оси (рис. 12).

3^0. Аргумент этого числа равен $3\pi/2$, так как угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.

4^0. Запишем данное число в тригонометрической форме:

$$z=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right).$$

226—231. Записать в тригонометрической форме комплексные числа:

226. $z=\sqrt{3}+i$. **227.** $z=-3+3i$. **228.** $z=2\sqrt{2}-2i\sqrt{6}$.
229. $z=5$. **230.** $z=-10$. **231.** $z=6i$.

7. Показательная форма комплексного числа

Если комплексному числу $z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, модуль которого равен 1, поставить в соответствие показательное выражение $e^{i\varphi}$, то получим соотношение

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}, \tag{4}$$

которое называется *формулой Эйлера.*

Любое комплексное число z можно записать в виде $z=re^{i\varphi}$. Эта форма записи комплексного числа называется *показательной формой.*

Итак, существуют три формы записи комплексного числа:

$z=a+bi$ — алгебраическая форма;

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма;

$z=re^{i\varphi}$ — показательная форма.

232. Записать число $z=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ в показательной форме.

Решение. Здесь $r=3$, $\varphi=3\pi/2$. Следовательно, показательная форма числа имеет вид $z=3e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

233. Записать число $z=e^a(\cos b+i\sin b)$ в показательной форме.

Решение. Из заданной тригонометрической формы числа устанавливаем, что $r=e^a$ и $\varphi=b$. Подставив эти значения в показательную форму числа $z=re^{i\varphi}$, получим $z=e^ae^{bi}=e^{a+bi}$.

234. Записать число $z=-5i$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Чтобы представить число z в виде $z=r(\cos\varphi+$ $+i\sin\varphi)$ и $z=re^{i\varphi}$, нужно найти модуль и аргумент числа z. Здесь $a=$ $=0$, $b=-5$; тогда $r=\sqrt{0+(-5)^2}=5$; $\varphi=3\pi/2$, так как точка z лежит на мнимой оси комплексной плоскости. Зная r и φ, получим $z=5\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$ и $z=$ $=5e^{\frac{3\pi}{2}i}$.

235. Записать число $z=3-3i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной формах.

Решение. Так как $a=3$, $b=-3\sqrt{3}$, то $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3^2+(-3\sqrt{3})^2}=$ $=\sqrt{9+9\cdot 3}=6$. Геометрически определяем, что числу z соответствует точка Z, лежащая в IV четверти (рис. 13). Составим отношения

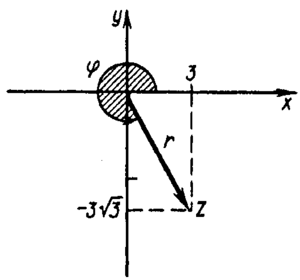


Рис. 13

$$\cos\varphi = a/r = 3/6 = 1/2,\ \sin\varphi = b/r = -3\sqrt{3}/6 = -\sqrt{3}/2.$$

Отсюда следует, что $\varphi = 360° - 60° = 300°$ или $\varphi = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Значит, $r = 6$, $\varphi = \frac{5\pi}{3}$. Итак, $z = 6\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$ — тригонометрическая форма, а $z = 6e^{\frac{5\pi}{3}i}$ — показательная форма данного числа.

236. Записать число $z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ в алгебраической и показательных формах.

Решение. Так как аргумент φ данного числа равен $4\pi/3$, то числу z соответствует на комплексной плоскости точка, расположенная в III четверти. Используя формулы приведения, находим

$$\cos\frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2},\ \sin\frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \\ = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Подставим в тригонометрическую форму числа полученные значения и раскроем скобки:

$$z = 4\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = 4\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = -4\cdot\frac{1}{2} + \\ + 4i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -2 - 2i\sqrt{3}.$$

Итак, алгебраическая форма данного числа имеет вид $z = -2 - 2i\sqrt{3}$, а показательная форма — вид $z = 4e^{\frac{4\pi}{3}i}$.

237—242. Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах:

237. $z = 5i$. **238.** $z = -6$. **239.** $z = -2 - 2i$.

240. $z = 1 + i$. **241.** $z = 1 - i$. **242.** $z = -3\sqrt{3} + 3i$.

243—247. Записать комплексные числа в алгебраической и показательной формах:

243. $z = 3\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

244. $z = 5\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right)$.

245. $z = 2{,}5\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

246. $z = 8\left(\cos\frac{15\pi}{4} + i\sin\frac{15\pi}{4}\right)$.

247. $z = 6{,}3(\cos 10\pi + i\sin 10\pi)$.

248—253. Записать комплексные числа в алгебраической и тригонометрической формах:

248. $z = 2{,}6e^{\frac{5\pi}{4}i}$. **249.** $z = 4e^{-\frac{\pi}{4}i}$. **250.** $z = 1{,}8e^{\frac{11\pi}{3}i}$.

251. $z = 5e^{\frac{7\pi}{6}i}$. **252.** $z = 2{,}4e^{24\pi i}$. **253.** $z = 8{,}2e^{11\pi i}$.

8. Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

Произведение двух комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+ +i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ находится по формуле

$$z_1z_2=r_1r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)). \qquad (5)$$

Таким образом, *при умножении двух комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули перемножаются, а аргументы складываются:*

$$|z_1z_2|=r_1r_2,\ \arg(z_1z_2)=\varphi_1+\varphi_2.$$

Частное двух комплексных чисел $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ и $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ находится по формуле

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)), \qquad (6)$$

т. е. *при делении комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, их модули делятся, а аргументы вычитаются:*

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{r_1}{r_2},\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\varphi_1-\varphi_2.$$

Для возведения комплексного числа $z=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ в n-ю степень используется формула, которая называется *формулой Муавра:*

$$z^n=r^n(\cos\varphi n+i\sin\varphi n). \qquad (7)$$

Следовательно, *при возведении в степень комплексного числа, заданного в тригонометрической форме, модуль числа нужно возвести в n-ю степень, а аргумент умножить на число n*:

$$|z^n|=r^n;\ \arg(z^n)=\varphi n.$$

Корнем n-й степени из числа z (где n — натуральное число, большее или равное 2) называется такое комплексное число u, для которого справедливо равенство $u^n=z$.

Корень n-й степени из комплексного числа z имеет ровно n значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \qquad (8)$$

где k может принимать n значений: $0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Если комплексные числа записаны в показательной форме, то умножение, деление, возведение в степень производятся по правилам действий со степенями.

Так, для произведения и частного комплексных чисел $z_1= =r_1e^{i\varphi_1}$ и $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$ справедливы формулы

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)},$$

а для n-й степени комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ — формула

$$z^n = r^n e^{i\varphi n}.$$

Для вычисления корня из комплексного числа $z = re^{i\varphi}$ используется формула

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{\frac{\varphi + 2\pi k}{n} i},$$

где k принимает n значений: 0, 1, 2, ..., $n-1$.

254. Даны комплексные числа $z_1 = 3(\cos 330° + i \sin 330°)$ и $z_2 = 2(\cos 60° + i \sin 60°)$. Найти: а) $z_1 z_2$; б) z_1/z_2; в) z_2^4; г) $\sqrt[3]{z_1}$.

Решение. а) Согласно формуле (5) получим

$$z_1 z_2 = [3(\cos 330° + i \sin 330°)] \cdot [2(\cos 60° + i \sin 60°)] = 3 \cdot 2 [\cos (330° + 60°) + i \sin (330° + 60°)] = 6(\cos 390° + i \sin 390°) = 6(\cos 30° + i \sin 30°)$$

(мы воспользовались свойством периодичности тригонометрических функций $\sin x$ и $\cos x$ и отбросили полный период).

Итак,

$$z_1 z_2 = 6(\cos 30° + i \sin 30°) = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 3\sqrt{3} + 3i.$$

б) Используя формулу (6), находим

$$\frac{z_1}{z_2} = [3(\cos 330° + i \sin 330°)] : [2(\cos 60° + i \sin 60°)] =$$
$$= 1{,}5 [\cos (330° - 60°) + i \sin (330° - 60°)] = 1{,}5(\cos 270° + i \sin 270°).$$

Следовательно,

$$\frac{z_1}{z_2} = 1{,}5(\cos 270° + i \sin 270°) = 1{,}5(0 + i(-1)) = -1{,}5i.$$

в) Для нахождения комплексного числа z_2^4 воспользуемся формулой (7). Имеем

$$z_2^4 = [2(\cos 60° + i \sin 60°)]^4 = 2^4 [\cos (60° \cdot 4) + i \sin (60° \cdot 4)] = 16 (\cos 240° + i \sin 240°).$$

Используя формулы приведения, находим

$$\cos 240° = \cos (180° + 60°) = -\cos 60° = -1/2, \ \sin 240° = \sin (180° + 60°) = -\sin 60° = -\sqrt{3}/2.$$

Таким образом,

$$z_2^4 = 16(\cos 240° + i \sin 240°) = 16\left(-\frac{1}{2} + i\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) = -8 - 8i\sqrt{3}.$$

г) Для извлечения кубического корня из числа $z_1 = 3(\cos 330° + i \sin 330°)$ воспользуемся формулой (8), которая в данном случае примет вид

$$\sqrt[3]{z_1} = \sqrt[3]{3}\left(\cos \frac{330° + 360°k}{3} + i \sin \frac{330° + 360°k}{3} \right),$$

где k принимает значения 0, 1 и 2.

Если $k=0$, то $z_1^{(1)}=\sqrt[3]{3}(\cos 110°+i\sin 110°)$;
если $k=1$, то $z_1^{(2)}=\sqrt[3]{3}(\cos 230°+i\sin 230°)$;
если $k=2$, то $z_1^{(3)}=\sqrt[3]{3}(\cos 350°+i\sin 350°)$.

255. Дано: $z_1=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$, $z_2=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$. Найти: а) z_1z_2; б) z_1/z_2; в) z_1^5; г) $\sqrt{z_1}$.

Решение. а) Имеем $|z_1z_2|=3\cdot 5=15$; $\arg(z_1z_2)=\frac{5\pi}{4}+\frac{\pi}{2}=$ $=\frac{7\pi}{4}$. Значит,

$$z_1z_2=15\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right).$$

Воспользуемся формулами приведения:

$$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \sin\frac{7\pi}{4}=\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак,

$$z_1z_2=15\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=15\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)=7{,}5\sqrt{2}-7{,}5\sqrt{2}\,i.$$

б) Находим $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{3}{5}=0{,}6$; $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=\frac{5\pi}{4}-\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}$. Следовательно,

$$\frac{z_1}{z_2}=0{,}6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

Воспользуемся формулами приведения:

$$\cos\frac{3\pi}{4}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \sin\frac{3\pi}{4}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Итак,

$$\frac{z_1}{z_2}=0{,}6\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=0{,}6\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-0{,}3\sqrt{2}+0{,}3\sqrt{2}i.$$

в) Имеем $z_1^5=\left[3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)\right]^5$. Так как $|z_1^5|=3^5=243$, $\arg(z_1^5)=\frac{5\pi}{4}\cdot 5=\frac{25\pi}{4}$, то

$$z_1^5=243\left(\cos\frac{25\pi}{4}+i\sin\frac{25\pi}{4}\right),$$

откуда, учитывая, что $\cos\frac{25\pi}{4}=\cos 6\frac{1}{4}\pi=\cos\frac{\pi}{4}$, $\sin\frac{25\pi}{4}=\sin 6\frac{1}{4}\pi=$ $=\sin\frac{\pi}{4}$, окончательно получим

$$z_1^5=243\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=243\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=121{,}5\sqrt{2}+$$
$$+121{,}5\sqrt{2}i.$$

г) Для извлечения квадратного корня из числа $z_1=3\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\right.$ $\left.+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ воспользуемся формулой

$$z_1=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\frac{5}{4}\pi+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{5}{4}\pi+2\pi k}{2}\right),$$

где k принимает два значения: 0 и 1.

При $k=0$ получим

$$z_1^{(1)}=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}}{2}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}}{2}\right)=\sqrt{5}\left(\cos\frac{5\pi}{8}+i\sin\frac{5\pi}{8}\right);$$

при $k=1$ получим

$$z_2^{(2)}=\sqrt{5}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{4}+2\pi}{2}\right)=\sqrt{5}\left(\cos\frac{13\pi}{8}+i\sin\frac{13\pi}{8}\right).$$

256—259. Найти произведение комплексных чисел z_1 и z_2:

256. $z_1=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$; $z_2=0,4\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

257. $z_1=(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$; $z_2=3(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)$.

258. $z_1=0,6\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$; $z_2=5\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

259. $z_1=2,4(\cos\pi+i\sin\pi)$; $z_2=0,5\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

260—263. Найти частное комплексных чисел z_1 и z_2:

260. $z_1=0,6(\cos 120^\circ+i\sin 120^\circ)$; $z_2=3(\cos 240^\circ+i\sin 240^\circ)$.

261. $z_1=3(\cos 225^\circ+i\sin 225^\circ)$; $z_2=5(\cos 45^\circ+i\sin 45^\circ)$.

262. $z_1=4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; $z_2=8\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

263. $z_1=0,6\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$; $z_2=0,2(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)$.

Мы уже убедились, что легче, а поэтому целесообразнее выполнять действия над комплексными числами в тригонометрической форме.

264. Найти $\sqrt[3]{z}$, если $z=1-i$.

Решение. Запишем комплексное число z в тригонометрической форме. Найдем $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{1^2+(-1)^2}=\sqrt{2}$. Поскольку $a=1$ и $b=-1$, точка, соответствующая этому числу, расположена в IV четверти.

Составим отношения

$$\cos\varphi=a/r=1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2;\ \sin\varphi=b/r=-1/\sqrt{2}=-\sqrt{2}/2.$$

Учитывая, что точка z расположена в IV четверти, находим $\varphi=2\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{7\pi}{4}$.

Теперь воспользуемся формулой

$$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi k}{3}\right),$$

где k принимает значения 0, 1 и 2. Тогда получим:

если $k=0$, то

$$z_1^{(1)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right);$$

если $k=1$, то

$$z_1^{(2)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{15\pi}{4}+\right.$$
$$\left.+i\sin\frac{15\pi}{4}\right);$$

если $k=2$, то

$$z_1^{(3)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}+i\sin\frac{\frac{7\pi}{4}+2\pi\cdot 2}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{23\pi}{12}+\right.$$
$$\left.+i\sin\frac{23\pi}{12}\right).$$

265. Найти z^6, если $z=-\sqrt{3}+i$.

Решение. Запишем число z в тригонометрической форме, учитывая, что $a=-\sqrt{3}$, $b=1$. Найдем $r=\sqrt{a^2+b^2}$; $r=\sqrt{3+1}=2$. Точка z расположена во II четверти. Составим отношения

$$\cos\varphi=a/r=\sqrt{3}/2,\ \sin\varphi=b/r=1/2.$$

Учитывая, что точка z расположена во II четверти, находим $\arg z=$ $=\varphi=\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Следовательно, $z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$.

Согласно формуле возведения в степень имеем $|z^6|=2^6$, $\arg(z^6)=$ $=\frac{5\pi}{6}\cdot 6$ и, значит,

$$z^6=2^6\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot 6+i\sin\frac{5\pi}{6}\cdot 6\right)=64(\cos 5\pi+i\sin 5\pi)=$$
$$=64(\cos\pi+i\sin\pi)=64(-1+i0)=-64.$$

266. Вычислить $z=\sqrt[4]{-16}$.

Решение. Запишем число -16 в тригонометрической форме. Найдем $r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{(-16)^2+0}=16$. Здесь $a=-16$, $b=0$ и, значит, точка расположена на отрицательной части оси Ox; поэтому $\varphi=\pi$.

Для нахождения корня воспользуемся формулой

$$\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{4}\right),$$

где $k=0$, $k=1$, $k=2$ и $k=3$. Соответственно получим

$$z^{(1)}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}+i\sqrt{2};$$

$$z^{(2)}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\frac{2\pi+\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=$$
$$=-\sqrt{2}+i\sqrt{2};$$

$$z^{(3)}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+4\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=$$
$$=-\sqrt{2}-i\sqrt{2};$$

$$z^{(4)}=\sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+6\pi}{4}\right)=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=$$
$$=\sqrt{2}-i\sqrt{2}.$$

267—273. Произвести действия, предварительно записав комплексные числа в тригонометрической форме:

267. Найти z_1z_2; z_1/z_2, если $z_1=1-i$, $z_2=-2-2i$.

268. Найти z_1z_2; z_1/z_2, если $z_1=2\sqrt{3}-2i$; $z_2=\sqrt{3}+i$.

269. Найти z_1z_2; z_1/z_2, если $z_1=0{,}5-0{,}5i\sqrt{3}$, $z_2=0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i$.

270. Найти z^5, если $z=3-3i$.

271. Найти $\sqrt[3]{z}$, если $z=-27$.

272. Найти $\sqrt[4]{z}$, если $z=-1$.

273. Найти z^3, если $z=-5+5i$.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Какое число называется приближенным?

2. Что называется истинной погрешностью и истинной абсолютной погрешностью?

3. Что называется границей абсолютной погрешности?

4. Какие цифры приближенного числа называются верными?

5. Какие цифры называются сомнительными?

6. Сформулируйте правило записи приближенных чисел. Приведите примеры.

7. Как округляются приближенные числа?

8. Что называется границей абсолютной погрешности приближенного числа?

9. Что называется границей относительной погрешности приближенного числа?

10. Перечислите правила действий с приближенными числами. Приведите примеры.

11. Выполните действия с приближенными числами:

а) $367{,}24+165{,}3749+171{,}5+16{,}2839$;

б) $17{,}352\times 1{,}447$ (с точностью до 0,1);

в) $643{,}5723:47{,}243$ (с точностью до 0,1).

12. Перечислите основные группы микрокалькуляторов и их основные отличия.

13. Назовите основные правила выполнения вычислительного процесса.

14. Дайте определение мнимой единицы.

15. Как вычисляют степени мнимой единицы?

16. Вычислите i^{35}; i^{42}; i^{144}.

17. Какое число называется комплексным?

18. Какие комплексные числа называются чисто мнимыми? Приведите примеры комплексных чисел, чисто мнимых чисел.

19. Какие комплексные числа называются равными?

20. Решите уравнения: а) $5x+3iy=17-12i$; б) $7x-2i=9+5iy$.

21. Какие комплексные числа называются сопряженными?

22. Как выполняются сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме?

23. Произведите действия: а) $(2+3i)+(2i-7)$; б) $(6+5i)-(2-3i)$; в) $(5+2i)(3-5i)$; г) $(6-2i)(6+2i)$; д) $(3-7i)^2$.

24. Как выполняется деление комплексных чисел в алгебраической форме?

25. Выполните действия: а) $(6+i)/(17-2i)$; б) $(3+5i)/(2i)$; в) $(3+2i)/(5+i)$; г) $(6+4i)/(7i)$.

26. Как геометрически изображаются комплексные числа?

27. Что называется модулем и аргументом комплексного числа?

28. Запишите формулы для модуля и аргумента комплексного числа.

29. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?

30. Запишите в тригонометрической форме: а) $z=5-5i$; б) $z=-3-3i\sqrt{3}$; в) $z=-1{,}5\sqrt{3}+1{,}5i$.

31. Как записывается комплексное число в показательной форме?

32. Как умножить комплексные числа, записанные в тригонометрической форме? в показательной форме?

33. Как разделить комплексные числа, записанные в тригонометрической форме? в показательной форме?

34. Как возвести в степень комплексное число, записанное в тригонометрической форме? в показательной форме?

35. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

36. Как найти все значения корня n-й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме? в показательной форме?

37. Произведите действия в тригонометрической форме:

а) $6(\cos 230°+i\sin 230°)\times 2(\cos 70°+i\sin 70°)$;

б) $3(\cos 310°+i\sin 310°):3(\cos 40°+i\sin 40°)$;

в) $5(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4)):6(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$.

38. Как решить квадратное уравнение, если дискриминант его отрицателен?

39. Какие корни и сколько корней имеет квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом?

40. Решите квадратные уравнения: а) $x^2-10x+34=0$; б) $x^2+4x+53=0$.

Ответы

11. а) 720,4; б) 25,2; в) 13,6. 16. $-i$; -1; 1. 20. а) $x=3{,}4$; $y=-4$; б) $x=9/7$; $y=-2/5$. 23. а) $-5+5i$; б) $4+8i$; в) $25-19i$; г) 40; д) $-40-42i$. 25. а) $100/293+29i/293$; б) $5/2-3i/2$; в) $17/26+7i/26$; г) $4/7-6i/7$. 30. а) $5\sqrt{2}(\cos 315°+i\sin 315°)$; б) $6(\cos 240°+i\sin 240°)$; в) $3(\cos 150°+i\sin 150°)$. 37. а) $12(\cos 300°+i\sin 300°)=6+6i\sqrt{3}$; б) $\cos 270°+i\sin 270°=-i$; в) $(5/6)(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))=-(5\sqrt{2}/12)+(5\sqrt{2}/12)i$. 40. а) $x_1=5-3i$; $x_2=5+3i$; б) $x_1=-2-7i$, $x_2=-2+7i$.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Вычислите $x=\sqrt{11}-\sqrt{7}$ с четырьмя значащими цифрами. Найдите ε_x.

2. Определите верные и сомнительные цифры числа $x=398{,}65\pm0{,}03$ и запишите правильно это число.

3. Вычислите $x=(a+b)/c$, где $a=82{,}653$, $b=9{,}38$, $c=61{,}9$. Найдите границу абсолютной погрешности.

4. Выполните действия в алгебраической форме: $(5-2i)^2$; $(-1+3i)^3$; $\dfrac{(2-3i)^2}{-i+5}$.

5. Вычислите $i^{15}+i^{24}-i^{49}-i^{37}\cdot i^{51}$.

6. Решите уравнение $x^2+4x+5=0$.

7. Найдите z^{10} в тригонометрической форме, если $z=1-i\sqrt{3}$.

8. Найдите в показательной форме $\sqrt[4]{-i}$.

Вариант 2

1. Вычислите $x = 6{,}28^2 - 3{,}1^2$. Найдите ε_x.

2. Определите верные и сомнительные цифры числа $0{,}75 \pm 0{,}0005$ и запишите правильно это число.

3. Вычислите $x = ab/\sqrt{c}$, где $a = 6{,}24$, $b = 3{,}5$, $c = 5{,}8$. Найдите границу абсолютной погрешности.

4. Вычислите $(i^{13} + i^{17}) \cdot 2i - (i^4 + i^{24}) \cdot 6$.

5. Выполните действия в алгебраической форме: $(3-5i)(2-3i)$; $(5+3i) \times (5-2i)$; $\dfrac{(6-2i)^2}{-3+i} + i^{15}$.

6. Решите уравнение $2{,}5x^2 - x + 1 = 0$.

7. Найдите z в тригонометрической форме, если $z = (3-3i\sqrt{3})(5\sqrt{3}+5i)$.

8. Найдите z^6 в показательной форме, если $z = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Ответы

Вариант 1. 1. $x = 0{,}67$; $\varepsilon_x = 0{,}15\ \%$. 2. $x = 398$. 3. $2{,}85 \pm 0{,}04$. 4. $21 - 20i$; $26 - 18i$; $-0{,}5 - 2{,}5i$. 5. $-2i$. 6. $x_1 = -2 + i$; $x_2 = -2 - i$. 7. $z = -512 + 512i\sqrt{3}$. 8. $z_1 = e^{\frac{3\pi i}{8}}$; $z_2 = e^{\frac{7\pi i}{8}}$; $z_3 = e^{\frac{11\pi i}{8}}$; $z_4 = e^{\frac{15\pi i}{8}}$. Вариант 2. 1. $x = 29{,}83$; $\varepsilon_x = 0{,}4\ \%$. 2. $0{,}750$. 3. $9{,}1 \pm 0{,}35$. 4. -16. 5. $-9 - 19i$; $31 + 5i$; $-12 + 3i$. 6. $x_1 = -0{,}2 - 0{,}6i$; $x_2 = -0{,}2 + 0{,}6i$. 7. $z = 60\left(\cos\dfrac{11\pi}{6} + i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$. 8. $z = e^{\pi i}$.

Глава III

Векторы и координаты

§ 1. Векторы и действия над ними

1. Векторные величины. Понятие вектора

Некоторые физические величины (сила, скорость, ускорение) характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Например, чтобы охарактеризовать движение тела в данный момент, недостаточно указать скорость движения, а нужно еще указать направление движения тела, т. е. направление скорости. Таким образом, скорость является векторной величиной. Другими примерами векторных величин могут служить сила притяжения, центробежное ускорение и т. п.

Если на некотором отрезке задано начало отрезка и его конец, то такой отрезок называется *направленным*.

Любой направленный отрезок называется *вектором*.

Вектор, заданный парой несовпадающих точек A и B, обозначается $\overrightarrow{AB}$, причем в этой записи A — начало вектора, B — его конец.

Векторы могут быть записаны с помощью строчных букв: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

1. Записать векторы, изображенные на рис. 14.

Решение. Так как первая буква в записи вектора должна обозначать начало вектора, то на рис. 14 изображены следующие векторы: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Например, $\overrightarrow{AA}$ или $\vec{0}$ является нулевым вектором. *Длиной* вектора называется длина порождающего его отрез-

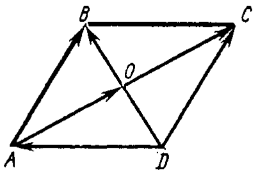


Рис. 14

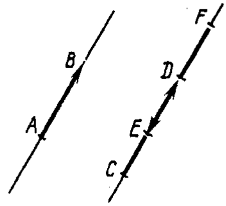


Рис. 15

ка. Так как длина вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, то часто вместо «длина вектора» говорят «модуль вектора».

Обратим внимание на то, что длина вектора зависит от длины отрезка и не зависит от направления.

Мы видим, что длина нулевого вектора равна нулю: $|\overrightarrow{AA}| = 0$. Таким образом, каждый вектор, отличный от нулевого, имеет свою длину и направление.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Так, на рис. 15 коллинеарными являются следующие векторы: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{FE}$.

Мы видим, что среди коллинеарных векторов есть такие, у которых направления совпадают. Эти векторы называют *сонаправленными* и пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Если направления векторов противоположно направлены, то их и называют *противоположно направленными* и пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FE}$.

Два коллинеарных вектора называют *равными*, если они сонаправлены и имеют равные длины; другими словами, $\vec{a} = \vec{b}$, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Справедливы следующие утверждения:

Любой вектор равен самому себе, т. е. $\vec{a} = \vec{a}$.

Если два вектора по отдельности равны третьему, то они равны между собой, т. е. если $\vec{a} = \vec{c}$ *и* $\vec{b} = \vec{c}$, *то* $\vec{a} = \vec{b}$.

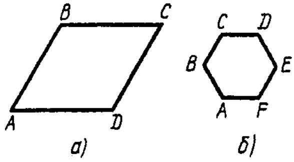


Рис. 16

2. Указать равные векторы на рис. 16, *а, б*.

Решение. а) Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны (лежат на параллельных прямых) и сонаправлены, а в силу свойства параллелограмма $|AB| = |DC|$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

б) Шестиугольник $ABCDFE$ — правильный и, следовательно, $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA|$. Далее, так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AF}$ коллинеарны и сонаправлены, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$.

2. Действия над векторами

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ перенесено в конец вектора $\vec{a}$.

Таким образом, чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать на плоскости произвольную точку M и отложить от нее вектор $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, а затем от точки A отложить вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{MB}$ является искомой суммой векторов $\vec{a} + \vec{b}$, т. е. $\overrightarrow{MB} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 17).

3. Сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенные на рис. 18.

Решение. Возьмем произвольную точку M и отложим от нее вектор $\vec{a}$. Из конца A этого вектора отложим вектор $\vec{b}$. Соединив точку M с концом B вектора $\vec{b}$, получим вектор, представляющий собой сумму векторов $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 18).

4. Найти сумму векторов, изображенных на рис. 19, *а—в*.

Для того чтобы построить сумму n данных векторов, нужно от произвольной точки M отложить первый вектор, затем из его конца отложить второй вектор и т. д. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом послед-

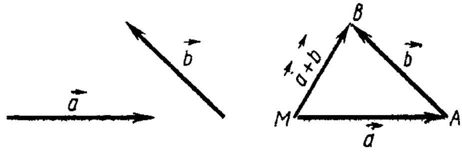


Рис. 17

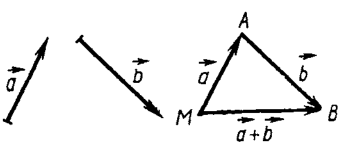


Рис. 18

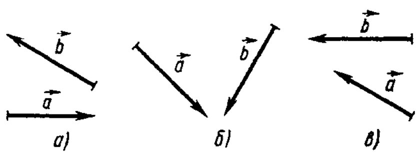


Рис. 19

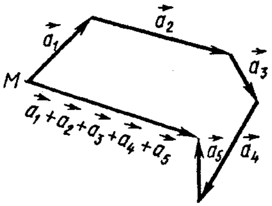


Рис. 20

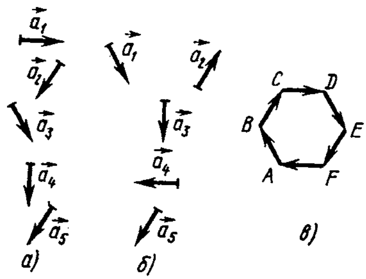


Рис. 21

него, и является вектором суммы n векторов (рис. 20).

5. Найти сумму векторов, изображенных на рис. 21, *а—в*.

Два вектора называются *противоположными*, если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный вектору $\vec a$, обозначают $-\vec a$, т. е. $\vec a+(-\vec a)=0$.

Таким образом, противоположные векторы имеют равные длины и противоположно направлены.

Разностью векторов $\vec a$ и $\vec b$ называют сумму вектора $\vec a$ и $-\vec b$, т. е. $\vec a-\vec b=\vec a+(-\vec b)$.

Чтобы найти разность векторов $\vec a$ и $\vec b$, нужно выбрать произвольную точку M и отложить от нее векторы $\vec a$ и $\vec b$. Если соединить концы векторов $\vec a$ и $\vec b$, то получится вектор $\overrightarrow{BA}=\vec a-\vec b$ или вектор $\overrightarrow{AB}=\vec b-\vec a$ (рис. 22).

6. Найти разность векторов, изображенных на рис. 23: а) $\vec a-\vec b$; б) $\vec b-\vec a$; в) $\vec a-\vec b$.

7. Построить сумму и разность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 24).

Решение. Чтобы найти сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, из конца вектора $\overrightarrow{AB}$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, сонаправленный вектору $\overrightarrow{AD}$ и такой, что $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$. Соединив точки C и D, получим параллелограмм $ABCD$ (поскольку $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ и $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$). Очевидно, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, откуда, заменяя $\overrightarrow{BC}$ на $\overrightarrow{AD}$, находим $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Кроме того, справедливо равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, откуда $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$.

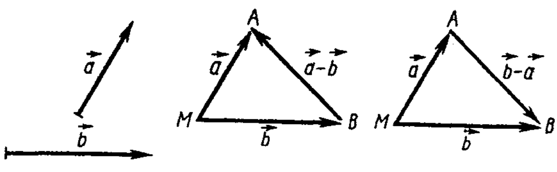


Рис. 22

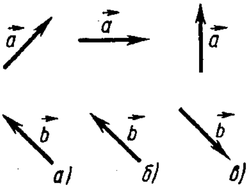


Рис. 23

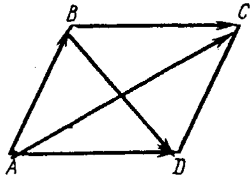


Рис. 24

Итак, вектор большей диагонали $\overrightarrow{AC}$ параллелограмма, построенного на заданных векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, равен сумме этих векторов (правило параллелограмма), а разность векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ равна вектору $\overrightarrow{BD}$, т. е. вектору меньшей диагонали.

Это правило нахождения вектора суммы и разности векторов часто используется в физике.

Отметим свойства суммы векторов:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переместительный закон;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ — сочетательный закон;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на* вещественное *число* k называется вектор $k\vec{a}$, который имеет длину, равную $k|\vec{a}|$, и коллинеарен $\vec{a}$. При этом если $k>0$, то векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{ka}$ сонаправлены; если же $k<0$, то векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{ka}$ противоположно направлены (рис. 25).

8. Пусть задан вектор $\vec{c}$ (рис. 26). Построить векторы: $\overrightarrow{4c}$; $-4\vec{c}$; $1{,}5\vec{c}$.

Решение. Искомые векторы изображены на рис. 26.

9. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 27). Построить вектор $3\vec{a}+5\vec{b}$.

Решение. Искомый вектор изображен на рис. 27.

10. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 28). Построить вектор $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

Решение. Искомый вектор изображен на рис. 28.

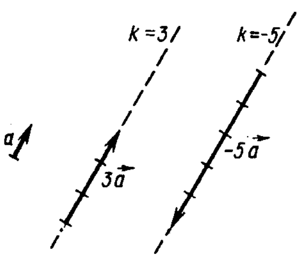


Рис. 25

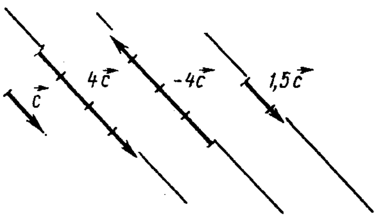


Рис. 26

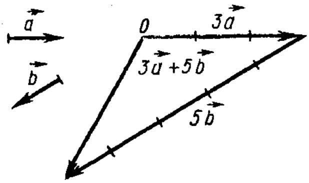


Рис. 27

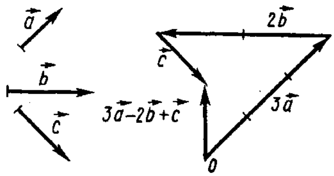


Рис. 28

11. По заданным на рис. 28 векторам $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ построить вектор: а) $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}$; б) $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$; в) $\vec{d}=3\vec{a}-5\vec{b}+$ $+2\vec{c}$.

3. Разложение вектора в базисе

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, ... , $\vec{a}_n$ называется сумма произведений этих векторов на какие-либо числа k_1, k_2, k_3, ... , k_n.

Например, $3\vec{a}-5\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ — линейная комбинация векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Справедливо следующее утверждение: *любой вектор $\vec{m}$ на плоскости может быть представлен единственным способом в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$* и *$\vec{b}$, т. е. $\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b}$* (рис. 29).

Согласно правилу параллелограмма вектор $\vec{m}$ равен сумме векторов, на которых построен параллелограмм. Стороны параллелограмма представляют собой векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{b}$, где x и y — числа.

Говорят, что вектор $\vec{m}$ разложен в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$.

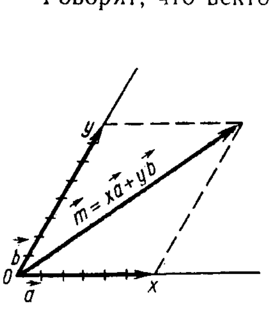


Рис. 29

Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов, взятых в определенном порядке.

Числа x и y называются *координатами* вектора $\vec{m}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$.

12. Разложить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ (рис. 30) в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Решение. Имеем $\overrightarrow{AB}=3\vec{e}_2$, $\overrightarrow{AC}=1{,}5\vec{e}_1$, $\overrightarrow{CA}=-1{,}5\vec{e}_1$; $\overrightarrow{BC}=1{,}5\vec{e}_1-3\vec{e}_2$.

13. Разложить вектор $\vec{m}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ (рис. 31).

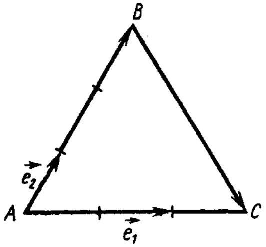


Рис. 30

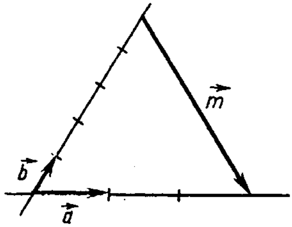


Рис. 31

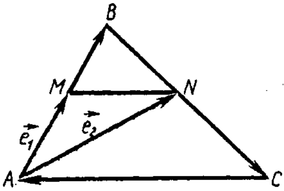


Рис. 32

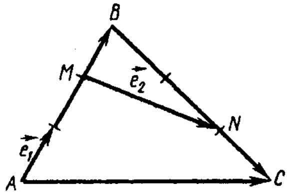


Рис. 33

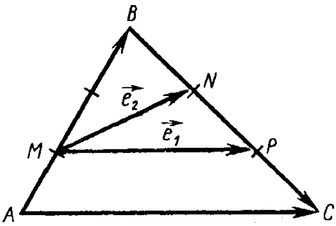


Рис. 34

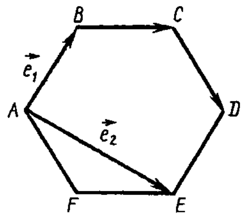


Рис. 35

14—19. Разложить в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ следующие векторы:

14. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ (M, N — середины сторон треугольника ABC; рис. 32).

15. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ (рис. 33).

16. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ (рис. 34).

17. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ (рис. 35).

4. Декартова система координат

Если в качестве базиса взять два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то говорят, что вектор разложен в декартовой системе координат. Точка O, принятая за начало векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, называется *началом координат*. Прямые, проведенные через векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, называются *осями координат*, соответственно

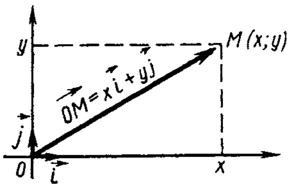


Рис. 36

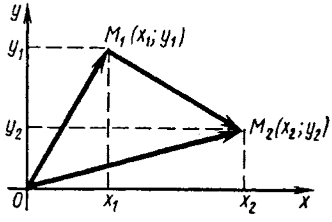


Рис. 37

осью абсцисс и *осью ординат* (рис. 36). При этом справедливо равенство $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=(x;\ y)$, где x, y — координаты вектора $\overrightarrow{OM}$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и точка M.

Если вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не проходит через начало координат (рис. 37), то

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2;\ y_2)-(x_1;\ y_1)=(x_2-x_1;\ y_2-y_1),$$

т. е. *для нахождения координат вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.*

18. Даны точки $A(3;\ 2)$, $B(-1;\ 5)$, $C(0;\ 3)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

Решение. Чтобы найти координаты вектора, из координат конца вектора вычтем координаты начала. Тогда получим: $\overrightarrow{AB}=(-1-3;\ 5-2)=(-4;\ 3)$; $\overrightarrow{BC}=(0-(-1);\ 3-5)=(1;\ -2)$; $\overrightarrow{AC}=(0-3;\ 3-2)=(-3;\ 1)$.

19. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, если $A(2;\ 3)$, $B(-1;\ -3)$, $C(-7;\ 5)$.

20. Найти координаты векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, если $A(0;\ -1)$, $B(-3;\ 0)$, $C(0;\ 0)$.

§ 2. Прямоугольные координаты на плоскости

Действия над векторами, заданными своими координатами
Длина вектора, расстояние между двумя точками на плоскости
Деление отрезка в данном отношении

1. Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в декартовой системе координат своими координатами, то:

1) *при сложении двух и большего числа векторов их одно-*

именные координаты складываются, т. е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$, то $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2;\ y_1+y_2)$;

2) *при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются,* т. е. если $\vec{a}=(x_1;\ y_1)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2)$, то $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2;\ y_1-y_2)$;

3) *при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число,* т. е. если $\vec{a}=(x;\ y)$, то $k\vec{a}=(kx;\ ky)$.

21. Даны векторы $\vec{a}=(3;\ 5)$, $\vec{b}=(2;\ -7)$. Найти: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $4\vec{a}$; г) $-0{,}5\vec{b}$.

Решение. Согласно приведенным правилам, получим:

а) $\vec{a}+\vec{b}=(3+2;\ 5-7)=(5;\ -2)$;

б) $\vec{a}-\vec{b}=(3-2;\ 5-\ (-7))\ =(1;\ 12)$;

в) $4\vec{a}=(4\cdot 3;\ 4\cdot 5)=(12;\ 20)$;

г) $-0{,}5\vec{b}=(-0{,}5\cdot 2;\ -0{,}5\cdot(-7))=(-1;\ 3{,}5)$.

22. Даны векторы $\vec{a}_1=(-2;\ 4)$; $\vec{a}_2=(3;\ 1)$. Найти: а) $\vec{a}_1+\vec{a}_2$; б) $\vec{a}_1-\vec{a}_2$; в) $3\vec{a}_1$; г) $5\vec{a}_2$.

23. Даны точки $A(3;\ -1)$; $B(0;\ -5)$; $C(-2;\ 1)$. Найти: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; $\vec{m}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-0{,}5\overrightarrow{CA}$.

24. Даны точки $A(4;\ 0)$; $B(-1;\ 3)$; $C(5;\ 7)$. Найти: $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$; $\vec{m}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{AC}$.

Так как при умножении вектора на число получается коллинеарный вектор, то можно вывести условие коллинеарности векторов. Пусть $\vec{a}=(x;\ y)$; тогда $k\vec{a}=(kx;\ ky)$, т. е. если $x_2=kx_1$ и $y_2=ky_1$, то векторы коллинеарны. Таким образом, если одноименные координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

2. Длина вектора, расстояние между двумя точками на плоскости

Длина вектора, выходящего из начала координат, равна квадратному корню из суммы квадратов его координат (рис. 38, *а*), т. е.

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

25. Найти длину вектора: а) $\vec{a}=(5;\ 12)$; б) $\vec{b}=(7;\ -1)$.

Решение. Согласно формуле (1), имеем:

а) $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$;

б) $|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

26. Найти длины векторов $\vec{a}=(5;\ 2\sqrt{6})$, $\vec{b}=(-5;\ 7)$, $\vec{c}=(-6;\ 8)$, $\vec{d}=(7;\ -7)$.

Если вектор задан двумя точками $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$,

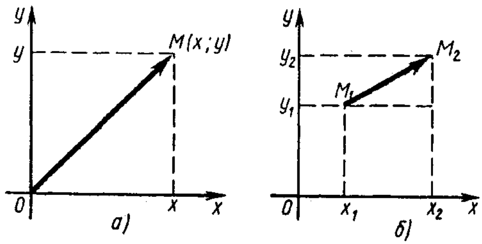


Рис. 38

(рис. 38, *б*), то $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ и длину вектора можно найти по формуле

$$|\overrightarrow{M_1M_2}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (2)$$

По этой же формуле можно найти расстояние между двумя точками, так как длина вектора равна длине порождающего его отрезка.

27. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5;\ 2)$, $B(8;\ -2)$.

Решение. Применяя формулу (2), получим

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(8-5)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{3^2+(-4)^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

28. Даны точки $A(3;\ 5)$; $B(-3;\ 3)$, $C(5;\ -8)$. Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

29. Дан треугольник с вершинами $A(7;\ 7)$, $B(4;\ 3)$, $C(3;\ 4)$. Найти его периметр.

30. На оси абсцисс найти точку, которая находится на расстоянии 5 единиц от точки $M(1;\ 3)$.

Решение. Обозначим искомую точку через $A(x;\ 0)$ (так как по условию она принадлежит оси абсцисс). Тогда длина отрезка AM выразится формулой $|AM|=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}$, откуда, подставляя в нее кординаты точек и известное расстояние, имеем

$$5=\sqrt{(1-x)^2+(3-0)^2}.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат, а затем раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$25=(1-x)^2+3^2;\ 25=1-2x+x^2+9;\ 25=x^2-2x+10 \text{ или } x^2-2x-15=0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$D=b^2-4ac=4-4\cdot1\cdot(-15)=4+60=64;\ \sqrt{D}=8;$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ x_1=\frac{2-8}{2}=-3;\ x_2=\frac{2+8}{2}=5.$$

Итак, получаем две точки: $A_1(-3;\ 0)$, $A_2(5;\ 0)$ (рис. 39).

31. На оси ординат найти точку, которая находится на расстоянии 13 единиц от точки $M(12;\ 14)$.

32. Найти координаты точки, расстояние от которой до оси ординат и до точки $A(8;\ 6)$ равно 5.

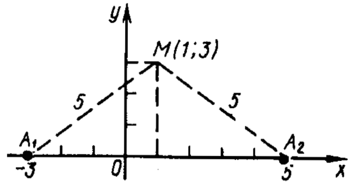


Рис. 39

3. Деление отрезка в данном отношении

Если отрезок MN, координаты концов которого известны, точка K делит в заданном отношении $|MK|:|KN| = \lambda$ (λ — число), то координаты точки K можно найти по формулам

$$x_K = \frac{x_M + \lambda x_N}{1+\lambda};\quad y_K = \frac{y_M + \lambda y_N}{1+\lambda}. \tag{3}$$

Пусть точка C делит отрезок AB на две равные части; тогда $|AC|:|CB| = 1:1$, т. е. $\lambda_C = 1$. Подставив это значение в формулы (3), получим

$$x_C = \frac{x_A + y_B}{2};\quad y_C = \frac{y_A + y_B}{2}. \tag{4}$$

33. Точка K делит отрезок MN в отношении $|MK|:|KN| = 2:3$. Найти координаты точки K, если $M(7;\ 4)$; $N(-3;\ 9)$.

Решение. Подставляя $\lambda = 2/3$ и координаты точек M и N в формулу (3), находим

$$x_K = \frac{x_M + \lambda x_N}{1+\lambda} = \frac{7 + \frac{2}{3}(-3)}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{7-2}{\frac{5}{3}} = 3;$$

$$y_K = \frac{y_M + \lambda y_N}{1+\lambda} = \frac{4 + \frac{2}{3}\cdot 9}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{4+6}{\frac{5}{3}} = 6.$$

Итак, $K(3;\ 6)$.

34. Разделить отрезок AB, заданный точками $A(5;\ 1)$ и $B(-4;\ -14)$, на три равные части.

Решение. Пусть M и N — точки деления (рис. 40). Составим отношения для этих точек. Имеем $|AM|:|MB| = 1:2$, т. е. $\lambda_M = 1/2$; $|AN|:|NB| = 2:1$, т. е. $\lambda_N = 2$. Теперь, подставляя эти отношения и координаты точек A и B в формулу (3), находим

$$x_M = \frac{x_A + \lambda_M x_B}{1+\lambda_M} = \frac{5 + \frac{1}{2}(-4)}{1 + \frac{1}{2}} = 2,$$

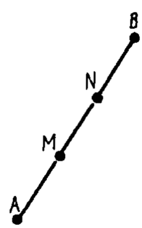


Рис. 40

$$y_M=\frac{y_A+\lambda_M y_B}{1+\lambda_M}=\frac{1+\frac{1}{2}(-14)}{1+\frac{1}{2}}=-4,\text{ т. е. } M(2;\ -4);$$

$$x_N=\frac{x_A+\lambda_N x_B}{1+\lambda_N}=\frac{5+2(-4)}{1+2}=-1,$$

$$y_N=\frac{y_A+\lambda_N y_B}{1+\lambda_N}=\frac{1+2(-14)}{1+2}=-9,\text{ т. е. } N(-1;\ -9).$$

35. Отрезок AB задан точками $A(2;\ 3)$, $B(10;\ 11)$. Найти координаты точки C, если известно, что $|AC|:|CB|=3:5$.

36. Отрезок AB, заданный точками $A(-5;\ -2)$, $B(4;\ 2{,}5)$, разделен в отношении $|AM|:|MN|:|NB|=3:4:2$. Найти точки деления.

37. Началом отрезка служит точка $A(-3;\ -5)$, а серединой — точка $C(3;\ -2)$. Найти конец отрезка — точку B.

38. Найти длину медианы AM треугольника с вершинами $A(7;\ -4)$, $B(-1;\ 8)$, $C(-12;\ -1)$.

39. Отрезок AB разделен на 5 равных частей. Найти точки деления, если $A(6;\ -2)$, $B(12;\ -6)$.

§ 3. Скалярное произведение векторов

Определение скалярного произведения
Скалярное произведение векторов в координатной форме
Нахождение угла между векторами

1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$\vec{a}\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{1}$$

где $\varphi=(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$, $0\leqslant\varphi\leqslant180°$.

Если хотя бы один из двух векторов равен нулевому вектору, то их произведение считается равным нулю.

Углом между векторами называется угол между их направлениями (рис. 41).

40. В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 6 (рис. 42), найти скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение. а) Так как угол φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (и их направлениями) равен 60°, то для скалярного произведения этих векторов получим

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\widehat{BAC}=6\cdot6\cdot\cos60°=36\cdot0{,}5=18.$$

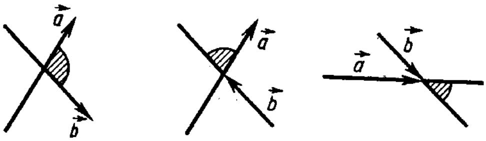


Рис. 41

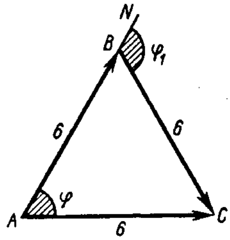


Рис. 42

б) Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (т. е. угол между их направлениями) есть угол $\varphi_1 = 120°$, поэтому

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos \widehat{NBC} = 6\cdot 6\cdot\cos 120° = 6\cdot 6\cdot(-0{,}5) = -18,$$

так как $\cos 120° = \cos(180°-60°) = -\cos 60° = -0{,}5$.

41. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, если известно, что треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный, $\widehat{C} = 90°$, а катеты равны 5.

Перечислим свойства скалярного произведения:

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительный закон);

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}$ (распределительный закон);

$k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(k\vec{b})$ (сочетательный закон).

Кроме того, отметим, что

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2,$$

т. е. *скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля вектора,* (квадрату его длины).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90° = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot 0 = 0.$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

42. Заданы два вектора, такие, что $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними 45°. Найти $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Решение. Имеем $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2+2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$. Так как $|\vec{a}| = 5$ и $|\vec{b}| = 3$, то $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 25$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9$, откуда $2\vec{a}\vec{b} = 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 45° = 2\cdot 5\cdot 3\cdot 0{,}5\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$. Итак,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = 25+15\sqrt{2}+9 = 34+15\sqrt{2}.$$

43. Заданы векторы, такие что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$, а угол φ между ними равен 30°. Найти $(3\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b})$.

44. Заданы векторы, такие, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, а угол φ между ними равен 60°. Найти $(\vec{a}+\vec{b})^2$; $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot 2\vec{a}$.

2. Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть два ненулевых вектора заданы своими координатами: $\vec{a}=(x_a;\ y_a)$, $\vec{b}=(x_b;\ y_b)$. Это значит, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены в базисе $(\vec{i};\ \vec{j})$, т. е. $\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}$, $\vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}$. Найдем их произведение:

$$\vec{a}\vec{b}=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j})(x_b\vec{i}+y_b\vec{j})=x_ax_b\vec{i}^2+x_by_b\vec{i}\vec{j}+x_ay_a\vec{i}\vec{j}+y_ay_b\vec{j}^2. \tag{2}$$

Так как $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные и взаимно перпендикулярные векторы, то $\vec{i}^2=1$; $\vec{j}^2=1$; $\vec{i}\vec{j}=0$. Подставив эти значения в равенство (2), получим

$$\vec{a}\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b. \tag{3}$$

Итак, *скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат.*

45. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(3;\ 5)$ и $\vec{b}=(-2;\ 7)$.

Решение. Здесь $x_a=3$, $x_b=-2$, $y_a=5$, $y_b=7$. Используя формулу (3), получим

$$\vec{a}\vec{b}=3\cdot(-2)+5\cdot 7=-6+35=29.$$

46—51. Найти скалярное произведение векторов:

46. $\vec{a}=(5;\ 7)$, $\vec{b}=(4;\ 3)$. **47.** $\vec{a}=(-3;\ 5)$, $\vec{b}=(16;\ 1)$.

48. $\vec{a}=(2;\ 0)$, $\vec{b}=(-3;\ -7)$. **49.** $\vec{a}=(-3;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ -3)$.

50. $\vec{a}=(5;\ -7)$, $\vec{b}=(7;\ 5)$. **51.** $\vec{a}=(2;\ 0)$ $\vec{b}=(0;\ -3)$.

3. Нахождение угла между векторами

Из определения скалярного произведения двух векторов можно получить формулу

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}\cdot|\vec{b}|}, \tag{4}$$

которая позволяет найти угол между векторами.

Учитывая, что $\vec{a}\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b$, $|\vec{a}|=\sqrt{x_a^2+y_a^2}$ и $|\vec{b}|=\sqrt{x_b^2+y_b^2}$, формулу (4) можно записать в координатной форме:

$$\cos\varphi=\frac{x_ax_b+y_ay_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}}.$$

52. Найти угол между векторами: а) $\vec{a}=(4;\ 0)$ и $\vec{b}=(2;\ -2)$; б) $\vec{a}=(5;\ -3)$ и $\vec{b}=(3;\ 5)$.

Решение. а) Используя формулу (5), находим

$$\cos\varphi = \frac{4\cdot 2 - 0\cdot(-2)}{\sqrt{16+0}\cdot\sqrt{4+4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ \varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

б) Имеем

$$\cos\varphi = \frac{5\cdot 3 + (-3)\cdot 5}{\sqrt{25+9}\cdot\sqrt{9+25}} = \frac{0}{34} = 0;\ \varphi = \arccos 0 = \frac{\pi}{2},$$

т. е. заданные векторы перпендикулярны.

53. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(1;\ 6)$, $B(1;\ 0)$, $C(-2;\ 3)$.

54. Найти углы треугольника с вершинами $A(6;\ 7)$, $B(3;\ 3)$, $C(1;\ -5)$.

55. Найти угол между векторами $\vec{a} = (6;\ -2)$ и $\vec{b} = (9;\ -12)$.

56. Найти угол между векторами $\vec{a} = (-2;\ 3)$ и $\vec{b} = (4;\ -1)$.

§ 4. Прямоугольные координаты в пространстве

Для вектора в пространстве также определены основные понятия: модуль вектора, направление вектора, равенство векторов. Любой вектор $\vec{m}$ пространства можно разложить по трем заданным некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{m} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}.$$

Если в пространстве заданы три попарно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, отложенные от некоторой точки O, то будем называть эту тройку *прямоугольным базисом* в пространстве, а точку O — *началом* прямоугольной *системы координат* в пространстве. Оси, определяемые единичными векторами, будем называть соответственно *осью абсцисс, осью ординат* и *осью аппликат*. Разложение вектора в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ имеет вид

$$\vec{m} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (1)$$

Координаты точки M, т. е. числа x, y, z, называются *координатами вектора* $\overrightarrow{OM}$ (рис. 43).

Если началом вектора является точка $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, а концом — точка $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, то координаты этого вектора вычисляются по формуле

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A). \qquad (2)$$

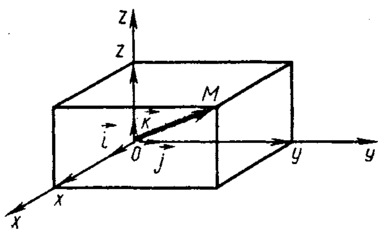


Рис. 43

Действия с векторами, заданными в координатной форме, выполняются по следующим правилам:

1) *координаты суммы двух*

и более векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, т. е. если $\vec{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $\vec{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$, то $\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b;\ y_a+y_b;\ z_a+z_b)$;

2) *координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов*, т. е. если $\vec{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $\vec{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$, то $\vec{a}-\vec{b}=(x_a-x_b;\ y_a-y_b;\ z_a-z_b)$;

3) *координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат данного вектора на это число*, т. е. если $\vec{a}=(x;\ y)$, то $k\vec{a}=(kx;\ ky;\ kz)$.

Длина вектора, выходящего из начала координат, вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \qquad (3)$$

Длина вектора, заданного двумя точками $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}. \qquad (4)$$

Координаты точки M, делящей отрезок AB в заданном отношении λ, находятся по формулам

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};\quad z_M=\frac{z_M+\lambda z_B}{1+\lambda}. \qquad (5)$$

57. Назвать координаты векторов: $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+5\vec{j}-0{,}5\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{i}+5\vec{k}$.

58. Найти сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;\ -3;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ 6;\ -1)$.

59. Найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(5;\ 3;\ -2)$, $\vec{b}=(-1;\ 0;\ -1)$.

60. Дан вектор $\vec{a}=(3;\ -2;\ 7)$. Найти: $5\vec{a}$; $-3\vec{a}$.

61. Вектор задан точками $A(-3;\ 5;\ 0)$ и $B(2;\ 3;\ -1)$. Найти: $3\overrightarrow{AB}$, $-0{,}5\overrightarrow{AB}$.

62. Векторы заданы точками $A(3;\ 5;\ 7)$, $B(-1;\ 4;\ 2)$, $C(0;\ -3;\ 5)$, $D(6;\ -7;\ 8)$. Найти: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}$; $2\overrightarrow{AB}$; $-3\overrightarrow{CD}$; $0{,}5\overrightarrow{BD}$; $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{AD}$.

63. Вычислить длины векторов $\vec{a}=(5;\ -3;\ \sqrt{2})$; $\vec{b}=(-2;\ 3;\ 1)$; $\vec{c}=(0;\ 12;\ 5)$; $\vec{d}=(-5;\ 7;\ 2)$.

64. Вычислить длину вектора, заданного своими координатами: а) $A(5;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 5;\ 1)$; б) $C(3;\ -2;\ -5)$, $D(7;\ 6;\ -1)$.

65. Найти середину отрезка, заданного точками $A(3;\ -7;\ 11)$, $B(-1;\ 3;\ -3)$.

66. Найти периметр треугольника с вершинами $A(3;\ -2;\ 8)$, $B(-1;\ 0;\ 6)$, $C(5;\ 1;\ -7)$.

67. Найти длину медианы AM треугольника с вершинами $A(2;\ -2;\ 0)$, $B(7;\ -3;\ 1)$, $C(1;\ -1;\ 5)$.

68. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC, где $A(1;\ 4;\ -3)$, $B(2;\ -1;\ 9)$, $C(0;\ 3;\ -6)$.

69. Найти угол между векторами: а) $\vec{a}=(3;\ 5;\ -2)$ и $\vec{b}=(4;\ 1;\ -7)$; б) $\vec{c}=(0;\ -1;\ 2)$ и $\vec{d}=(1;\ -2;\ 3)$.

70. Даны точки $A(1;\ 0;\ -2)$, $B(4;\ 3;\ 7)$, $C(2;\ -3;\ 5)$, $D(-1;\ 6;\ 0)$. Найти угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

§ 5. Уравнение линии на плоскости

1. Уравнение линии

Пусть дано уравнение с двумя переменными. Решением этого уравнения является пара действительных чисел, причем, вообще говоря, имеется бесконечное множество таких пар. Если построить на координатной плоскости все точки, соответствующие всем парам чисел, являющихся решением этого уравнения, то получится множество точек, которое называется *графиком этого уравнения*.

Уравнением линии на плоскости называется уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Говорят, что координаты точки удовлетворяют уравнению, если при подстановке их в данное уравнение оно превращается в тождество.

71. Определить, лежат ли точки $A(2;\ 5)$ и $B(1;\ 2{,}2)$ на линии, заданной уравнением $3x-5y+8=0$.

Решение. Подставив в уравнение координаты точки A, получим $3\cdot2-5\cdot5+8\neq0$, $6-25+8\neq0$. Следовательно, точка A не принадлежит заданной линии.

Подставим координаты точки B: $3\cdot1-5\cdot2{,}2+8=0$; $11-11=0$. Следовательно, точка B лежит на заданной линии.

72. Проверить, принадлежит ли точка $A(-5;\ 13)$ линии, заданной уравнением $x^2/25+y^2/169=1$.

73. Проверить, лежит ли точка $B(2;\ 0)$ на линии, заданной уравнением $4x^2-3y^2+6xy-2x+1=0$.

74. Точки $A(x;\ 3)$ и $B(-5;\ y)$ принадлежат линии, заданной уравнением $7x+2y=41$. Найти неизвестные координаты точек.

Решение. Так как точки A и B принадлежат заданной линии, то их координаты удовлетворяют уравнению этой линии. Подставив известные координаты в данное уравнение, получим уравнение с одним неизвестным:

$$A(x;\ 3);\ 7x+2\cdot 3=41;\ 7x=35;\ x=5,\ \text{т. е. } A(5;\ 3);$$

$$B(-5;\ y);\ 7\cdot(-5)+2y=41;\ 2y=76;\ y=38,\ \text{т. е. } B(-5;\ 38).$$

2. Понятие о параметрическом уравнении линии

Параметром называется вспомогательная переменная, входящая в формулы и выражения. В одних случаях параметры рассматривают как постоянные числа в условиях данной задачи, а в других случаях они рассматриваются как переменные. Например, в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ величины a, b и c являются параметрами. При решении конкретного уравнения a, b и c считаются постоянными.

Чаще всего параметр обозначают буквой t. Например, $x-2=3t$; $y-5=2t$ — это уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;\ 5)$ и коллинеарной вектору $\vec{b}(3;\ 2)$.

Пусть линия на плоскости является траекторией движения. Тогда каждую точку этой линии можно записать парой $(x(t);\ y(t))$, где $x=x(t)$ и $y=y(t)$ представляют собой функции параметра t. Уравнения $x=x(t)$ и $y=y(t)$ называются *параметрическими уравнениями* линии. Так, уравнения $x=R\cos t$ и $y=R\sin t$ являются параметрическими уравнениями окружности с радиусом R и центром в начале координат (рис. 44).

Параметрические уравнения линии можно привести к уравнению с двумя переменными. Для этого надо исключить параметр t из параметрических уравнений, выразив его из одного уравнения и подставив в другое.

75. Заданы параметрические уравнения линии: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$. Привести их к уравнению с двумя переменными.

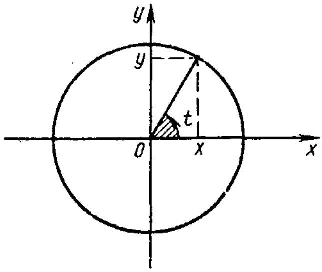


Рис. 44

Решение. Из второго уравнения выразим $\sin t=\frac{y}{R}$. Зная, что $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$, находим $\cos t=\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}$.

Теперь подставим это выражение в первое уравнение:

$$x=R\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}};\ x=R\sqrt{\frac{R^2-y^2}{R^2}};$$

$$x=\sqrt{R^2-y^2},\ \text{т. е. } x^2+y^2=R^2.$$

Получили известное из школьного курса уравнение окружности с радиусом R и центром в начале координат.

76. Параметрические уравнения линии $x=2\cos t$, $y=3\sin t$, где $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, привести к уравнению с двумя переменными.

Решение. Выразив из второго уравнения $\sin t=\frac{y}{3}$ и учитывая, что $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$, находим $\cos t=\sqrt{1-\frac{y^2}{9}}$. Далее, подставив это выражение в первое уравнение, имеем

$$x=2\sqrt{1-\frac{y^2}{9}};\ x^2=4\left(1-\frac{y^2}{9}\right);\ \frac{x^2}{4}=1-\frac{y^2}{9};\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

3. Общее уравнение прямой

Прямые — самые простые линии на плоскости. Им соответствуют и самые простые уравнения — уравнения первой степени.

Справедливо следующее утверждение: *всякая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени с двумя переменными x и y* и обратно, *всякое уравнение вида $Ax+By+C=0$ при любых действительных значениях коэффициентов A, B, C, кроме случая одновременного равенства нулю коэффициентов A и B, определяет прямую.*

Уравнение $Ax+By+C=0$ называется *общим уравнением* прямой. Коэффициенты A, B, C принято записывать в виде целых чисел.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой.

1. Пусть $A=0$. Тогда уравнение примет вид $By+C=0$. Преобразуем его:

$$By=-C;\ y=-C/B;\ -C/B=b;\ y=b.$$

Получили уравнение прямой, параллельной оси абсцисс (рис. 45).

2. Пусть $B=0$. Тогда уравнение примет вид $Ax+C=0$. Преобразуем его:

$$Ax=-C;\ x=-C/A;\ -C/A=a;\ x=a.$$

Получили уравнение прямой, параллельной оси ординат (рис. 45).

3. Пусть $A=0$, $C=0$. Тогда уравнение примет вид $By=0$, откуда $y=0$. Получили уравнение оси абсцисс (рис. 45).

4. Пусть $B=0$, $C=0$. Тогда уравнение примет вид $Ax=0$, т. е. $x=0$. Получили уравнение оси ординат (рис. 45).

5. Пусть $C=0$. Тогда уравнение примет вид $Ax+By=0$. Преобразуем его: $By=-Ax$; $y=-(A/B)x$, где $B>0$. Обозначив $-A/B=k$ и подставив в уравнение, имеем $y=kx$.

Получили уравнение прямой, которое, как известно из школьного курса, называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Эта прямая проходит через начало координат, а ее угловой коэффициент есть $k=-A/B$.

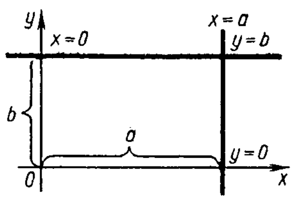


Рис. 45

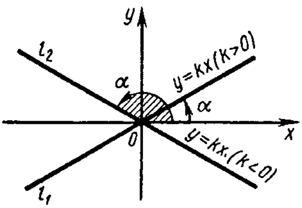


Рис. 46

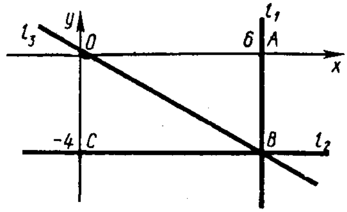


Рис. 47

Напомним, что угловым коэффициентом называется тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс: $k = \operatorname{tg} x$.

Если угол наклона острый, то угловой коэффициент $k > 0$; если же угол наклона тупой, то угловой коэффициент $k < 0$ (рис. 46).

77. Составить уравнения прямых, изображенных на рис. 47.

Решение. Так как прямая l_1 параллельна оси ординат, то ее уравнение имеет вид $x = a$. Эта прямая отсекает на оси абсцисс отрезок, равный 6. Итак, $x = 6$ — уравнение прямой l_1.

Прямая l_2 параллельна оси абсцисс. Поскольку эта прямая проходит через точку $(0; -4)$, ее уравнение есть $y = -4$.

Прямая l_3 проходит через начало координат и ее уравнение имеет вид $y = kx$. Найдем ее угловой коэффициент: $k = \operatorname{tg} \alpha$; $k = -4/6$; $k = -2/3$. Получили уравнение $y = -(2/3)x$. Приведем его к общему виду: $3y = -2x$; $2x + 3y = 0$. Итак, уравнение прямой l_3 есть $2x + 3y = 0$.

78. Прямоугольник $ABCD$ расположен во II координатном угле (рис. 48). Стороны его равны 6 и 8 единицам. Составить уравнения всех сторон прямоугольника и диагонали BD.

79. Составить уравнения сторон AO и OB правильного треугольника AOB и его высоты AC (рис. 49).

4. Правило составления уравнения прямой

Положение прямой на плоскости относительно системы координат можно задать различными способами. Прямая может быть задана точкой и направлением; точкой и перпендикулярным пря-

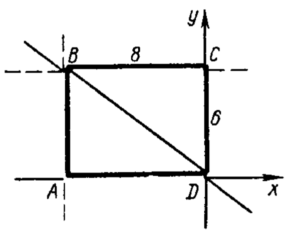


Рис. 48

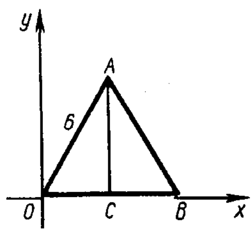


Рис. 49

мой вектором; двумя точками; отрезками, которые прямая отсекает на осях координат (частный случай задания прямой двумя точками).

Мы видим, что во всех случаях задания прямой обязательно должна быть известна хотя бы одна точка, через которую проходит искомая прямая. Кроме того, должно быть задано какое-либо дополнительное условие: коллинеарность, перпендикулярность или вторая точка, принадлежащая прямой.

Правило составления уравнения прямой l, для которой известны координаты точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и задано какое-либо второе условие, состоит в следующем:

1^0. На прямой l выбирают произвольную точку с текущими координатами x, y: $M(x;\ y)\in l$.

2^0. Находят координаты вектора, лежащего на прямой l и такого, что его начало есть точка $M_1(x_1;\ y_1)$, а конец — точка $M(x;\ y)$, т. е. $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$.

3^0. Записывают координаты вектора, заданного дополнительными условиями (коллинеарности, перпендикулярности, двумя точками), т. е. направляющего или нормального вектора $\vec{n}$.

4^0. Используют условие коллинеарности или перпендикулярности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$.

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный нормальный вектор

Нормальным вектором прямой l называется любой ненулевой вектор $\vec{n}=(A;\ B)$, перпендикулярный этой прямой.

Пусть заданы точка $M_1(x_1;\ y_1)$ и нормальный вектор $\vec{n}=(A;\ B)$ (рис. 50). Для составления уравнения прямой, проходящей через точку M_1 и имеющей нормальный вектор $\vec{n}$, воспользуемся общим правилом:

1^0. Выберем на прямой l произвольную точку $M(x;\ y)$.

2^0. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M}$: $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$.

3^0. Запишем координаты заданного нормального вектора $\vec{n}$: $\vec{n}=(A;\ B)$.

4^0. Воспользуемся условием перпендикулярности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$; их скалярное произведение равно нулю, т. е. $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}=0$. Так как скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат, то уравнение прямой l примет вид

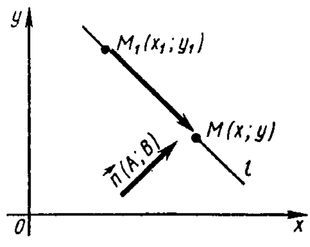


Рис. 50

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \qquad (1)$$

Преобразуем это уравнение:

$$Ax-Ax_1+By-By_1=0;\ Ax+By+(-Ax_1-By_1)=0.$$

Полагая $-Ax_1-By_1=C$, получим уравнение прямой l в виде $Ax+By+C=0$.

Заметим, что если известно общее уравнение прямой, то координаты нормального вектора $\vec{n}=(A;\ B)$ равны коэффициентам при x и y в этом уравнении.

80. Известны точка $M_1(7;\ -8)$ и нормальный вектор прямой $\vec{n}=(-2;\ 3)$. Составить уравнение прямой.

Решение. 1^0. Выбираем точку $M(x;\ y)$.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-7;\ y+8)$.

3^0. Нормальный вектор $\vec{n}=(2;\ 3)$, т. е. $A=2$, $B=3$.

4^0. Запишем уравнение искомой прямой:

$$2(x-7)+3(y+8)=0,$$

откуда

$$2x-14+3y+24=0;\ 2x+3y+10=0$$

— искомое уравнение в общем виде.

81. Составить уравнение высоты AD треугольника, заданного точками $A(-5;\ 3)$, $B(3;\ 7)$, $C(4;\ -1)$.

Решение. 1^0. Высота AD проходит через точки $A(-5;\ 3)$ и точку $D(x;\ y)$ с неизвестными координатами.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{AD}=(x+5;\ y-3)$.

3^0. Найдем вектор $\overrightarrow{BC}$, заданный точками $B(3;\ 7)$ и $C(4;\ -1)$; имеем $\overrightarrow{BC}=(1;\ -8)$.

4^0. Так как по условию векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ перпендикулярны, то $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, откуда получаем уравнение прямой AD:

$$1\cdot(x+5)-8(y-3)=0.$$

Далее, имеем

$$x+5-8y+24=0;\ x-8y+29=0$$

— уравнение прямой AD в общем виде.

82. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(5;\ 3)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(5;\ 0)$.

83. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(-3;\ 5)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(-3;\ 2)$.

84. Составить уравнение высоты BD в треугольнике с вершинами $A(7;\ 0)$, $B(3;\ 6)$, $C(-1;\ 1)$.

85. Составить уравнения диагоналей ромба, заданного точками $A(2;\ 2)$, $B(3;\ 5)$, $C(4;\ 2)$, $D(3;\ -1)$.

86. Составить уравнения сторон квадрата, заданного точками $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, $C(5;\ -1)$, $D(2;\ -2)$.

87. Составить уравнение серединного перпендикуляра к отрезку, заданному точками $A(2;\ 4)$ и $B(5;\ -7)$.

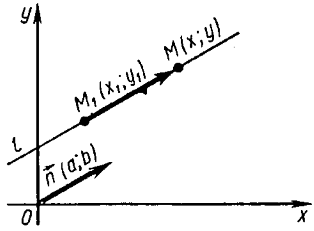


Рис. 51

6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный направляющий вектор

Направляющим вектором прямой l называется всякий ненулевой вектор $\vec{n}=(a;\ b)$, параллельный этой прямой. Любая прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, коллинеарных между собой.

Пусть заданы точка $M_1(x_1;\ y_1)$, через которую проходит прямая l (рис. 51), и ее направляющий вектор $\vec{n}=(a;\ b)$.

Используя общее правило, составим уравнение прямой l.

1^0. Выберем произвольную точку $M(x;\ y)\in l$.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$.

3^0. Запишем направляющий вектор $\vec{n}=(a;\ b)$.

4^0. Воспользуемся условием коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$; их одноименные координаты должны быть пропорциональны. Поэтому уравнение прямой l имеет вид

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}. \qquad (2)$$

Преобразуем это уравнение:

$$bx-bx_1=ay-ay_1;\ bx-ay+(-bx_1+ay_1)=0.$$

Полагая $b=A;\ -a=B,\ -bx_1+ay_1=C$, получим $Ax+By+$ $+C=0$ — уравнение общего вида.

88. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\ -2)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{n}=(-5;\ 3)$.

Решение. 1^0. Выбираем точку $M(x;\ y)\in l$.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{AM}=(x-3;\ y+2)$.

3^0. Направляющий вектор $\vec{n}=(-5;\ 3)$.

4^0. Запишем уравнение прямой:

$$\frac{x-3}{-5}=\frac{y+2}{3},$$

откуда $3x-9=-5y-10;\ 3x+5y+1=0$ — искомое уравнение в общем виде.

89. Треугольник задан точками $A(5;\ 2)$, $B(-1;\ -4)$, $C(-5;\ -3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно AC.

Решение. 1^0. Выбираем точку $M(x;\ y)$.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{BM}=(x+1;\ y+4)$.

3^0. Найдем вектор, заданный точками $A(5;\ 2)$ и $C(-5;\ -3)$; имеем $\overrightarrow{AC}=(-10;\ -5)$.

4^0. Так как искомая прямая и прямая AC параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны. Запишем искомое уравнение прямой:

$$\frac{x+1}{-10}=\frac{y+4}{-5},$$

откуда $x+1=2y+8$; $x-2y-7=0$ — искомое уравнение в общем виде.

90. Составить уравнение средней линии трапеции, заданной точками $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 4)$, $C(3;\ 6)$, $D(6;\ 5)$.

91. Составить уравнение средней линии треугольника с вершинами $A(-1;\ 2)$, $B(5;\ 3)$, $C(4;\ -2)$.

7. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть заданы две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$. Через них можно провести прямую и притом только одну (рис. 52). Для составления ее уравнения воспользуемся общим правилом:

1^0. Выберем на прямой l точку $M(x;\ y)$.

2^0. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M}$: $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$.

3^0. Найдем координаты направляющего вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$: $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

4^0. Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, так как лежат на одной прямой; значит, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (3)$$

92. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;\ 3)$ и $B(7;\ 5)$.

Решение. Подставив в формулу (3) координаты данных точек, получим

$$\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{5-3},$$

откуда

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{2};\ 2x-4=5y-15;\ 2x-5y+11=0$$

— искомое уравнение прямой.

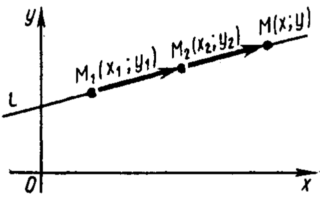


Рис. 52

93—98. Составить уравнения прямых, заданных двумя точками:

93. $A(1;\ 3)$, $B(4;\ 1)$.

94. $C(-1;\ 5)$, $D(3;\ -7)$.

95. $M(-3;\ 0)$, $N(0;\ 5)$.

96. $P(0;\ 0)$, $Q(-3;\ 5)$.

97. $A(3;\ -5)$, $B(3;\ 7)$.

98. $C(7;\ -1)$, $D(-1;\ -1)$.

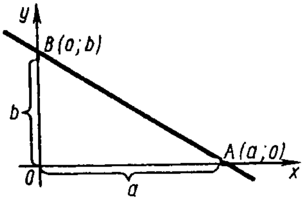


Рис. 53

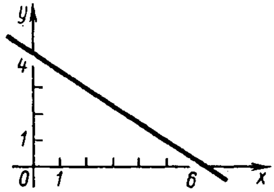


Рис. 54

99. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами $A(-1;\ 2)$, $B(5;\ 3)$, $C(4;\ -2)$.

100. Составить уравнения диагоналей квадрата $ABCD$, заданного точками $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, $C(5;\ -1)$, $D(2;\ -2)$.

101. Составить уравнения медиан треугольника ABC, где $A(7;\ 0)$, $B(3;\ 6)$; $C(-1;\ 1)$.

8. Уравнение прямой в отрезках

Пусть задана прямая l, отсекающая на оси абсцисс отрезок, равный a, а на оси ординат — отрезок, равный b (рис. 53). Точки пересечения прямой с осями координат таковы: $A(a;\ 0)$; $B(0;\ b)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти две точки:

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0};\quad \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b};\quad \frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b}.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (4)$$

Уравнением прямой в отрезках удобно пользоваться для построения прямой. Поэтому при необходимости уравнение прямой приводят к виду уравнения в отрезках и строят прямую.

102. Построить прямую: а) $2x+3y-12=0$; б) $5x-3y=-15$.

Решение. а) Преобразуем уравнение:

$$2x+3y=12;\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1.$$

Значит, на оси абсцисс откладываем 6 единиц, а на оси ординат 4 единицы и проводим прямую (рис. 54).

б) Преобразуем уравнение:

$$5x-3y=-15;\ -\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1.$$

Отложим на оси абсцисс -3 единицы, а на оси ординат 5 единиц и проведем прямую (рис. 55).

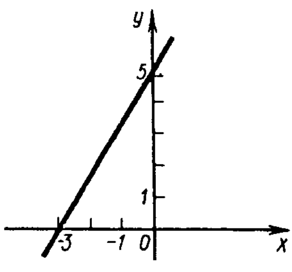


Рис. 55

103. Построить прямые: $2x+5y+20=0$; $3x-4y-12=0$; $6x+y-3=0$; $x-8y+4=0$.

§ 6. Исследование взаимного расположения прямых

Параллельность прямых
Перпендикулярность прямых
Угол между двумя прямыми

1. Параллельность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ (l_1) и $A_2x+B_2y+C_2=0$ (l_2). Нормальные векторы этих прямых имеют такие координаты: $\vec{n}_1=(A_1;\ B_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;\ B_2)$. Если $l_1 \| l_2$, т. е. прямые параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны. Это означает, что одноименные координаты векторов пропорциональны:

$$A_1/A_2=B_1/B_2. \qquad (1)$$

Отсюда получаем

$$A_1/B_1=A_2/B_2, \text{ или } -A_1/B_1=-A_2/B_2.$$

Так как $-A_1/B_1=k_1$ и $-A_2/B_2=k_2$, то

$$k_1=k_2. \qquad (2)$$

Итак, *две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны* ($A_1/A_2=B_1/B_2$) *или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой* ($k_1=k_2$).

104. Указать, какая пара уравнений соответствует параллельным прямым:

а) $2x-3y+5=0$, $6x-9y+1=0$; б) $6x-3y-1=0$, $2x-5y+5=0$; в) $6x+10y+1=0$, $3x+5y=0$.

Решение. Составим пропорции из коэффициентов при одноименных координатах. Имеем:

а) $2/6=(-3)/(-9)$; б) $6/2\neq 3/(-5)$; в) $6/3=10/5$.

Поскольку у первой и третьей пар уравнений коэффициенты пропорциональны, эти уравнения соответствуют параллельным прямым. Коэффициенты второй пары уравнений не пропорциональны; следовательно, соответствующие прямые не параллельны.

105. Установить, параллельны ли прямые:

а) $5x-y+4=0$, $10x-2y+1=0$; б) $3x+2y+3=0$, $3x-2y-1=0$;

в) $6x-3y+7=0$, $2x+y+1=0$; г) $y+5x-3=0$, $10x+2y-7=0$.

2. Перпендикулярность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ (l_1) и $A_2x+B_2y+C_2=0$ (l_2). Тогда координаты их нормальных векторов таковы: $\vec{n}_1=(A_1;\ B_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;\ B_2)$. Если $l_1 \perp l_2$, то скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю, т. е. $\vec{n}_1\vec{n}_2=0$, откуда

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{3}$$

После преобразований получим

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}+1=0;\quad \frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=-1;$$

учитывая, что $-A_1/B_1=k_1$, $-A_2/B_2=k_2$, находим $k_1k_2=-1$, т. е.

$$k_2=-1/k_1. \tag{4}$$

Итак, *две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при одноименных координатах удовлетворяют равенству $A_1A_2+B_1B_2=0$ или когда угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку* ($k_2=-1/k_1$).

106. Указать, какая пара уравнений соответствует перпендикулярным прямым:

а) $2x+3y-7=0$, $3x-2y=0$; б) $5x-2y+1=0$, $4x+10y-1=0$; в) $6x-4y+7=0$, $8x-12y-1=0$.

Решение. Составим равенства из коэффициентов при одноименных координатах:

а) $2\cdot3+3\cdot(-2)=0$; $6-6=0$;
б) $5\cdot4-2\cdot10=0$; $20-20=0$;
в) $6\cdot8-4\cdot(-12)=0$; $48+48\neq0$.

Следовательно, две первые пары уравнений соответствуют взаимно перпендикулярным прямым, а уравнения третьей пары — не перпендикулярным прямым.

107. Установить, перпендикулярны ли прямые:

а) $2x-y+1=0$, $x-2y+1=0$; б) $3x+2y+17=0$, $2x-3y+8=0$;
в) $5x-y+4=0$, $x+5y-1=0$; г) $5x-3y+1=0$; $15x+9y-7=0$.

108. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $3x-5y+2=0$.

109. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2; 3) и перпендикулярной прямой $4x+3y-12=0$.

110. Составить уравнение перпендикуляра к отрезку MN, где $M(7;\ 3)$ и $N(-3;\ 2)$, проходящего через его середину.

111. Составить уравнение перпендикуляра к прямой $5x-3y+7=0$, проходящего через точку $(-1;\ 3)$.

3. Угол между двумя прямыми

Углом между двумя прямыми называется величина меньшего из углов, образованных этими прямыми.

Угол между двумя прямыми можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right|, \qquad (5)$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — нормальные векторы прямых l_1 и l_2.

Эта формула удобна для вычисления угла между прямыми, заданными их уравнениями.

112. Найти угол между прямыми $x+5y-3=0$ и $2x-3y+4=0$.

Решение. Найдем координаты нормальных векторов заданных прямых: $\vec{n}_1=(1;\ 5)$, $\vec{n}_2=(2;\ -3)$. Согласно формуле (5) получим

$$\cos\varphi = \left|\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right| = \left|\frac{1\cdot 2+5\cdot(-3)}{\sqrt{1+25}\cdot\sqrt{4+9}}\right| = \left|\frac{2-15}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}\right| =$$

$$= \left|\frac{-13}{\sqrt{13}\sqrt{13\cdot 2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varphi = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

113. Найти угол между прямыми $5x+4y-31=0$ и $2y-3x+1=0$.

114. Найти угол между прямыми, если одна из них проходит через точки $M_1(4;\ 2)$ и $N_1(1;\ -7)$, а вторая — через точки $M_2(-1;\ 3)$ и $N_2(8;\ 6)$.

115. Найти угол между прямой $3x+2y+4=0$ и прямой, проходящей через точки $M_1(2;\ -2)$, $M_2(4;\ -3)$.

116. Найти углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $18x+6y-17=0$, $14x-7y+15=0$ и $5x+10y-9=0$.

117. Найти углы треугольника, заданного вершинами $A(-6;\ -3)$; $B(6;\ 7)$, $C(2;\ -1)$.

§ 7. Кривые второго порядка

Уравнение второй степени с двумя переменными
Окружность и ее уравнение
Эллипс и его уравнение
Гипербола и ее уравнение
Парабола и ее уравнение

1. Уравнение второй степени с двумя переменными

Уравнение второй степени с двумя переменными определяет на плоскости кривую второго порядка и притом единственную.

Такое уравнение имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

В этом уравнении коэффициенты могут принимать любые действительные значения при условии, что коэффициенты A, B и C одновременно не равны нулю (так как в противном случае уравнение не будет уравнением второй степени).

Чтобы по условию задачи составить уравнение кривой, заданной множеством точек на плоскости, нужно установить зависимость между координатами x и y произвольной точки, принадлежащей этому множеству, и параметрами (постоянными величинами, заданными в условии задачи) и записать эту зависимость в виде уравнения.

2. Окружность и ее уравнение

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром. Пусть центром окружности является точка $O(a;\ b)$, а расстояние до любой точки $M(x;\ y)$ окружности равно r.

Тогда согласно формуле расстояния между двумя точками имеем

$$|OM|=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}.$$

Подставив в это выражение координаты точек M и O и расстояние r, получим

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

откуда после возведения в квадрат находим

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$

Это каноническое уравнение окружности с центром $O(a;\ b)$ и радиусом r.

118. Составить уравнение окружности с центром $O(3;\ -2)$ и радиусом $r=5$.

Решение. Подставив $a=3$, $b=-2$ и $r=5$ в равенство (1), получим $(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

119. Составить уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r.

Решение. В этом случае $a=0$; $b=0$. Тогда уравнение примет вид $x^2+y^2=r^2$.

120. Составить уравнения окружностей: с центром $(-2;\ -5)$ и радиусом $r=\sqrt{3}$; б) с центром $(-5;\ 0)$ и радиусом $r=3$; в) с центром $(0;\ -7)$ и радиусом $r=2$.

121. Построить окружность $x^2+y^2+6x-4y-3=0$.

Решение. Чтобы построить окружность, необходимо найти ее центр и радиус. Для этого выделим в уравнении полные квадраты, т. е. приведем уравнение к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Имеем

$$x^2+y^2+6x-4y-3=0;\ (x^2+6x)+(y^2-4y)=3.$$

Прибавив к обеим частям сумму $9+4$, получим

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)=3+9+4, \text{ т. е. } (x+3)^2+(y-2)^2=16.$$

Из этого уравнения видно, что $a=-3$, $b=2$, $r=4$, т. е. центр окружности — точка $O(-3;\ 2)$, а ее радиус равен 4.

122. Постройте окружности: а) $x^2+y^2-10x-6y-2=0$, б) $x^2+y^2-10x+9=0$; в) $x^2+y^2+8x+7=0$.

3. Эллипс и его уравнение

Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых *фокусами*) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

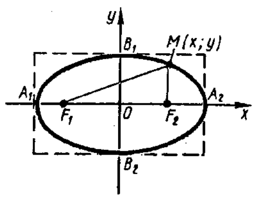
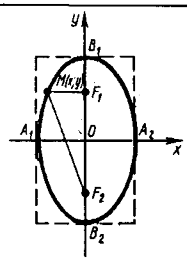
Фокусы эллипса принято обозначать буквами F_1 и F_2, расстояние между фокусами — через $2c$, сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов — через $2a$ $(2a>2c)$.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad (2)$$

где a, b и c связаны между собой равенством $a^2-b^2=c^2$ (или $b^2-a^2=c^2$).

Рассмотрим два основных случая расположения эллипса относительно осей координат (рис. 56, 57). Эти случаи представлены в следующей таблице:

	 Рис. 56	 Рис. 57
Положение фокусов	$F_1;\ F_2 \in Ox$	$F_1;\ F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$	$F_1(0;\ c)$, $F_2(0;\ -c)$
Соотношение между a и b	$a>b$	$b>a$
Большая ось	$\|A_1A_2\|=2a$	$\|B_1B_2\|=2b$
Малая ось	$\|B_1B_2\|=2b$	$\|A_1A_2\|=2a$
Фокусное расстояние	$\|F_1F_2\|=2c$	$\|F_1F_2\|=2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon=c/a$	$\varepsilon=c/b$
Соотношение между a, b и c	$a^2-b^2=c^2$	$b^2-a^2=c^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси. Эксцентриситет обозначается буквой ε:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}.$$

Так как по определению $2a > 2c$, то эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, т. е. $0 \leqslant \varepsilon < 1$.

Если величина эксцентриситета приближается к единице ($\varepsilon \approx 1$), то эллипс сильно вытянут; если же величина эксцентриситета ближе к нулю ($\varepsilon \approx 0$), то эллипс имеет более округлую форму. Если эксцентриситет равен нулю, то эллипс вырождается в окружность.

123. Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $2x^2 + y^2 = 32$.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду (2). Для этого разделим все его члены на 32:

$$\frac{2x^2}{32} + \frac{y^2}{32} = \frac{32}{32}; \quad \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{32} = 1.$$

Мы видим, что $a^2 = 16$, $b^2 = 32$, откуда $a = 4$, $b = 4\sqrt{2}$.

Так как $b > a$, то фокусы эллипса расположены на оси ординат. Они имеют координаты $F_1(0;\ c)$ и $F_2(0;\ -c)$, где c определяется из соотношения $b^2 - a^2 = c^2$. Подставив в него значения a и b, получим $32 - 16 = c^2$; $c^2 = 16$; $c = 4$. Итак, фокусами эллипса служат точки $F_1(0;\ 4)$; $F_2(0;\ -4)$.

Далее, находим: большую ось эллипса $2b = 8\sqrt{2}$; малую ось $2a = 8$; эксцентриситет $\varepsilon = \dfrac{2c}{2b} = \dfrac{8}{8\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}705$.

124. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая ось $2b = 6$, а расстояние между фокусами $|F_1F_2| = 8$.

Решение. Так как малая ось $2b = 6$, то фокусы расположены на оси Ox. Имеем $b = 3$, $c = 4$. Из соотношения $a^2 - c^2 = b^2$ находим $a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 16 = 25$, т. е. $a = 5$. Итак, каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$.

125. Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $16x^2 + 25y^2 = 400$.

126. Составить уравнение эллипса, координаты фокусов которого $(-7;\ 0)$ и $(7;\ 0)$, а эксцентриситет $\varepsilon = 0{,}28$.

127. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, $\varepsilon = 0{,}6$ и $2b = 10$.

128. Эллипс задан уравнением $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. Найти координаты фокусов эллипса, фокусное расстояние и эксцентриситет.

129. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(\sqrt{3};\ 0)$ и $(-\sqrt{3};\ 0)$, а большая ось равна $4\sqrt{7}$.

130. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $A(\sqrt{5};\ \sqrt{7})$ и $B(\sqrt{10};\ \sqrt{5})$, если его фокусы лежат на оси абсцисс.

4. Гипербола и ее уравнение

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называется *фокусами*) есть величина постоянная. Эта постоянная величина положительна и меньше расстояния между фокусами.

Фокусы гиперболы принято обозначать буквами F_1 и F_2, расстояние между фокусами — через $2c$, постоянную разность между расстояниями от любой точки гиперболы до ее фокусов — через $2a (2a<2c)$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \tag{3}$$

где a, b, c связаны между собой равенством $a^2+b^2=c^2$.

Рассмотрим два основных случая расположения гиперболы относительно осей координат (рис. 58, 59). Эти случаи иллюстрирует следующая таблица.

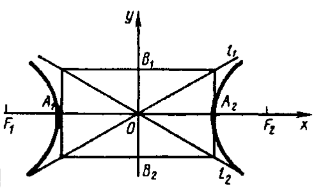


Рис. 58

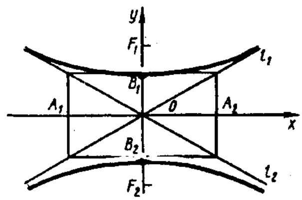


Рис. 59

	Рис. 58	Рис. 59
Положение фокусов	F_1; $F_2 \in Ox$	F_1; $F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1(-c;\ 0)$; $F_2(c;\ 0)$	$F_1(0;\ c)$; $F_2(0;\ -c)$
Действительная ось	$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$	$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$
Мнимая ось	$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$	$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$
Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2\rvert = 2c$	$\lvert F_1F_2\rvert = 2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon = c/a$	$\varepsilon = c/b$
Соотношение между a, b и c	$c^2-a^2=b^2$	$c^2-b^2=a^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси:

$$\varepsilon = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon = \frac{2c}{2b} = \frac{c}{b}.$$

Так как по определению $2a < 2c$, то эксцентриситет гиперболы всегда выражается неправильной дробью, т. е. $\varepsilon > 1$.

Прямые l_1 и l_2 (рис. 58, 59) называются *асимптотами;* их уравнения имеют вид

$$y = \pm \frac{b}{a} x. \qquad (4)$$

131. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $16x^2 - 25y^2 = 400$.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду (3). Для этого разделим все его члены на 400:

$$\frac{16x^2}{400} - \frac{25y^2}{400} = \frac{400}{400}; \qquad \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Из этого уравнения видно, что фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс и мы можем записать $a^2 = 25$, $b^2 = 16$, т. е. $a = 5$, $b = 4$. Зная a и b, найдем c: $a^2 + b^2 = c^2$; $c^2 = 25 + 16 = 41$; $c = \sqrt{41}$.

Итак, фокусами гиперболы являются точки $F_1(-\sqrt{41}; 0)$; $F_2(\sqrt{41}; 0)$; действительная ось гиперболы $2a = 10$; мнимая ось $2b = 8$; эксцентриситет $\varepsilon = 2\sqrt{41}/10 = \sqrt{41}/5$; уравнения асимптот $y = \pm(4/5)x$.

132. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси абсцисс, если известно, что эксцентриситет $\varepsilon = 1{,}5$, а фокусное расстояние равно 6.

Решение. Так как $|F_1, F_2| = 6$, то $2c = 6$, т. е. $c = 3$. Далее, подставив в формулу $\varepsilon = c/a$ известные величины ε и c, получим $1{,}5 = 3/a$, откуда $a = 2$. Зная a и c, из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ найдем $9 = 4 + b^2$, откуда $b^2 = 5$.

Итак, каноническое уравнение гиперболы имеет вид $x^2/4 - y^2/5 = 1$.

133. Найти длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $7x^2 - 9y^2 = 63$.

134. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Oy, если действительная ось равна $4\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon = \sqrt{5}/2$.

135. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная ось которой $2b = 10$, а уравнения асимптот имеют вид $y = \pm(5/3)x$.

136. Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси Oy равен 1,4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что $2b = 10$.

137. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox, расстояние между ними равно $10\sqrt{2}$, а уравнения асимптот имеют вид $y = \pm(3/4)x$.

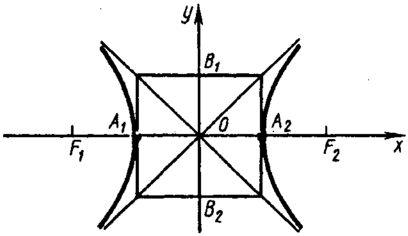


Рис. 60

Равносторонней гиперболой называется гипербола, у которой длина действительной оси равна длине мнимой оси, т. е. $2a = 2b$ или $a = b$. Если фокусы такой гиперболы лежат на оси абсцисс (рис. 60), то ее каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1 \text{ или } x^2 - y^2 = a^2.$$

Если фокусы равносторонней гиперболы расположены на оси ординат, то ее каноническое уравнение имеет вид

$$y^2 - x^2 = a^2.$$

Для равносторонней гиперболы справедливо соотношение $c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$, т. е. $c = a\sqrt{2}$.

Найдем эксцентриситет равносторонней гиперболы:

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{a\sqrt{2}}{a}, \text{ т. е. } \varepsilon = \sqrt{2} \approx 1{,}41.$$

Уравнения асимптот равносторонней гиперболы записываются в виде $y = \pm x$, т е. асимптотами равносторонней гиперболы являются биссектрисы координатных углов.

138. Составить уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, проходящей через точку $M(4;\ -2)$.

Решение. Так как точка M принадлежит гиперболе, то ее координаты удовлетворяют каноническому уравнению гиперболы:

$$x^2 - y^2 = a^2;\ 4^2 - (-2)^2 = a^2;\ a^2 = 12.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2 - y^2 = 12$.

139. Составить уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, проходящей через точку $A(-10;\ 8)$.

140. Составить уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, проходящей через точку $B(-7;\ -3)$.

141. Составить уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Oy, проходящей через точку $C(1;\ -3)$.

5. Парабола и ее уравнение

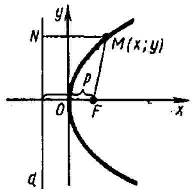
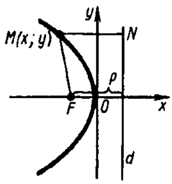
Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (называемой *фокусом*) и данной прямой (называемой *директрисой*).

Фокус параболы принято обозначать буквой F, директрису — буквой d, расстояние от фокуса до директрисы — буквой p ($p > 0$). Рассмотрим основные случаи расположения параболы относительно осей координат.

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, (рис. 61, 62), имеет вид

$$y^2 = 2px \text{ или } y^2 = -2px. \qquad (5)$$

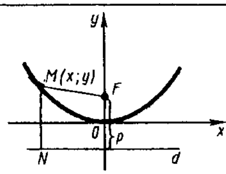
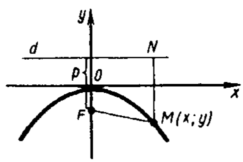
Эти два случая представлены в следующей таблице:

	 Рис. 61	 Рис. 62
Положение фокуса	На положительной полуоси Ox	На отрицательной полуоси Ox
Координаты фокуса	$F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};\ 0\right)$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат (рис. 63, 64), имеет вид

$$x^2 = 2py \text{ или } x^2 = -2py. \qquad (6)$$

Эти два случая представлены в таблице:

	 Рис. 63	 Рис. 64
Положение фокуса	На положительной полуоси Oy	На отрицательной полуоси Oy
Координаты фокуса	$F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0;\ -\frac{p}{2}\right)$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$

142. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 8x$.

Решение. Из данного канонического уравнения параболы следует, что $2p=8$, т. е. $p=4$, откуда $p/2=2$. Значит, точка $F(2;\ 0)$ — фокус параболы, а $x=2$ — уравнение ее директрисы.

143. Найти каноническое уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты $(0;\ -3)$.

Решение. Согласно условию фокус параболы расположен на отрицательной полуоси Oy, т. е. ее уравнение имеет вид $x^2=-2py$. Так как $-p/2=-3$, то $p=6$, откуда $2p=12$. Итак, уравнение параболы есть $x^2=-12py$, а уравнение директрисы $y=3$ или $y-3=0$.

144. Составить уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной оси Ox и проходящей через точку $A(-3;\ -6)$.

Решение. Из условия заключаем, что уравнение параболы следует искать в виде $y^2=-2px$. Так как точка A принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$36=-2p(-3);\ 36=3\cdot 2p;\ 2p=12.$$

Итак, уравнение параболы имеет вид $y^2=-12x$.

145. Найти каноническое уравнение параболы и уравнение директрисы, если фокус параболы — точка $F(-2;\ 0)$.

146. Парабола задана уравнением $x^2=-32y$. Найти координаты ее фокуса и уравнение директрисы.

147. Парабола с вершиной в начале координат симметрична оси Oy и проходит через точку $A(-5;\ 2)$. Составить каноническое уравнение параболы.

148. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2=24x$.

149. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $x^2-4y=0$.

150. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы $x+3=0$.

151. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы $2y+7=0$.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Что называется вектором?
2. Что называется длиной вектора?
3. Какие векторы называются равными?
4. Как сложить два вектора?
5. Как найти разность двух векторов?
6. Как умножить вектор на число?
7. Постройте $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$; $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-0{,}5\overrightarrow{AB}$, взяв в качестве $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ два любых неколлинеарных вектора.
8. Какие векторы называются коллинеарными?
9. Как разложить вектор в декартовой системе координат?
10. Что называется базисом?
11. Что называется координатами вектора?

12. Что можно сказать о базисе $(\vec{i}, \vec{j})$?
13. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?
14. Найдите координаты вектора, заданного точками: а) $A(5;\ -3)$ и $B(-2;\ 7)$ б) $O(0;\ 0)$ и $M(7;\ 2)$.
15. Как найти длину вектора, заданного двумя точками?
16. Найдите длину вектора $\vec{n} = (-12;\ 5)$.
17. Как вычисляется длина вектора, заданного своими координатами?
18. Найдите длину вектора, заданного точками: а) $A(3;\ -1)$, $B(7;\ 0)$; б) $M(0;\ 16)$, $N(6;\ 4)$; в) $Q(-1;\ -2)$, $P(-5;\ 3)$.
19. Как выполняются сложение и вычитание векторов, заданных своими координатами?
20. Вычислите сумму и разность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$, заданных точками $A(3;\ -1)$, $B(-2;\ 6)$, $M(0;\ -3)$, $N(7;\ -2)$.
21. Как умножить вектор, заданный своими координатами, на число?
22. Даны векторы $\vec{a} = (5;\ -3)$ и $\vec{b}(-6;\ 4)$. Найдите $3\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$; $5\vec{a} + 3\vec{b}$.
23. Для векторов, заданных точками $A(6;\ 2)$, $B(1;\ 3)$, $C(0;\ -5)$, найдите $0{,}5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$.
24. Каким свойством обладают координаты коллинеарных векторов?
25. Даны векторы $\vec{m} = (-1;\ 3)$, $\vec{n} = (5;\ -2)$, $\vec{p} = (3;\ -9)$, $\vec{q} = (10;\ -4)$, $\vec{r} = (7;\ 1)$. Какие из них коллинеарны?
26. Запишите формулы деления отрезка в заданном отношении.
27. Запишите формулы деления отрезка на две равные части.
28. Найдите координаты середины отрезка AB, где $A(5;\ 3)$, $B(-1;\ 6)$.
29. Найдите координаты точек, которые делят отрезок, заданный точками $A(-1;\ 5)$ и $B(6;\ 3)$, на три равные части.
30. В треугольнике с вершинами $A(2;\ 7)$, $B(5;\ -4)$, $C(-3;\ 2)$ найдите длины сторон и медианы AD.
31. В треугольнике с вершинами $A(2;\ 7)$, $B(5;\ -4)$, $C(-3;\ 2)$ найдите точку пересечения медиан.
32. Что называется скалярным произведением векторов?
33. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, а угол между ними равен $60°$.
34. Как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?
35. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\vec{n} = (-3;\ 5)$ и $\vec{m} = (7;\ 2)$; б) $\vec{m} = (3;\ -2)$ и $\vec{n} = (9;\ -6)$.
36. Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?
37. Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?
38. Чему равно скалярное произведение коллинеарных векторов?
39. Что называется уравнением линии?
40. Лежат ли точки $A(-3;\ 9)$; $B(2;\ -1)$, $C(7;\ 2)$ на линии, заданной уравнением $x^2 - y = 0$?
41. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
42. Запишите уравнения осей координат.
43. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
44. Какой координатной оси параллельна прямая, заданная уравнением $x + 5 = 0$? Начертите эту прямую.
45. Какой координатной оси параллельна прямая, заданная уравнением $2y - 8 = 0$? Начертите эту прямую.
46. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.
47. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(5;\ -3)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (-3;\ -2)$.
48. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $B(-3;\ 7)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (2;\ -4)$.
49. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;\ -8)$ и $B(-1;\ 2)$.
50. Составьте уравнение прямой, отсекающей 5 единиц на оси Ox и 3 единицы на оси Oy.

51. Составьте уравнения сторон, высоты AE и медианы BD в треугольнике с вершинами $A(3;\ -7)$, $B(-1;\ 4)$, $C(-6;\ -5)$.

52. Сформулируйте условие параллельности прямых.

53. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.

54. Как найти угол между прямыми?

55. Найдите внутренние углы треугольника с вершинами $A(3;\ -7)$, $B(-1;\ 4)$, $C(-6,\ -5)$.

56. Каким уравнением описывается кривая на плоскости?

57. Запишите каноническое уравнение эллипса.

58. Найдите координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

59. Что называется эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?

60. Чему равен эксцентриситет окружности?

61. Запишите каноническое уравнение гиперболы.

62. Найдите координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы $144x^2-25y^2=3600$.

63. Запишите уравнение равносторонней гиперболы.

64. Запишите каническое уравнение параболы, директрисы параболы.

65. Составьте уравнение параболы, фокус которой имеет координаты $(0;\ -2)$.

66. Составьте уравнение параболы, директриса которой задана уравнением $4x+6=0$.

Ответы

14. а) $\overrightarrow{AB}=(-7;\ 10)$; б) $\overrightarrow{OM}=(7;\ 2)$. **18.** а) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$; б) $|\overrightarrow{MN}|=6\sqrt{5}$; в) $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{41}$. **20.** $\overrightarrow{AB}=(-5;\ 7)$; $\overrightarrow{MN}=(7;\ 1)$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=(2;\ 8)$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MN}=(-12;\ 6)$. **22.** $3\vec{a}-0{,}5\vec{b}=(18;\ -11)$; $5\vec{a}+3\vec{b}=(7;\ -3)$. **23.** $\overrightarrow{AB}=(-5;\ 1)$; $\overrightarrow{BC}=(-1;\ -8)$; $\overrightarrow{AC}=(-6;\ -7)$; $0{,}5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}=(6{,}5;\ -9{,}5)$. **25.** $\vec{m}$ и $\vec{p}$, $\vec{n}$ и $\vec{q}$. **28.** $C(2;\ 4{,}5)$. **29.** $C(4/3;\ 13/3)$; $D(11/3;\ 11/3)$. **30.** $|AD|=\sqrt{65}$; $|AB|=\sqrt{130}$; $|BC|=10$; $|AC|=5\sqrt{2}$. **31.** $M(4/3;\ -2)$. **33.** $\vec{m}\vec{n}=7{,}5$. **35.** а) $\vec{n}\vec{m}=-11$; б) $\vec{m}\vec{n}=39$. **40.** A — да; B и C — нет. **44.** Оси Oy. **45.** Оси Ox. **47.** $2x-3y-19=0$. **48.** $2x-4y+34=0$. **49.** $5x+2y+1=0$. **50.** $x/5+y/3=1$. **51.** $11x+4y-5=0$; $9x-5y+29=0$; $2x-9y+57=0$; $20x-y+24=0$; $9x-5y-63=0$. **55.** $\arccos 0{,}6555$; $\arccos 0{,}5370$; $\arccos 0{,}2840$. **58.** $F_{1,2}(\pm 5;\ 0)$; $2a=26$; $2b=24$; $2c=10$; $\varepsilon=5/13$. **62.** $F_{1,2}(\pm 13;\ 0)$; $2a=24$; $2b=10$; $\varepsilon=13/12$. **65.** $x^2=-8y$. **66.** $y^2=6x$.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=(2;\ -7)$, $\vec{b}=(-3;\ 6)$.

2. Составьте уравнение медианы BD и высоты AF в треугольнике с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(6;\ 4)$, $C(7;\ -2)$.

3. Найдите угол между векторами $\vec{a}=(-3;\ 2)$ и $\vec{b}=(-5;\ -1)$.

4. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(0;\ -4\sqrt{2})$ и $(0;\ 4\sqrt{2})$, а малая ось равна 14.

Вариант 2

1. Найдите длину вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=(5;\ -8)$, $\vec{b}=(7;\ 3)$.

2. Составьте уравнение средней линии треугольника с вершинами $A(5;\ -2)$, $B(1;\ 6)$, $C(-3;\ 2)$ параллельной стороне BC.

3. Найдите точку пересечения прямых $3x+2y-1=0$ и $2x-y-17=0$.

4. Составьте уравнение равносторонней гиперболы, фокусы которой имеют координаты $(-3\sqrt{2};\ 0)$ и $3\sqrt{2};\ 0)$.

Ответы

Вариант 1. **1.** $|\vec{c}|=9$. **2.** $2x-y-8=0$; $x-6y+11=0$. **3.** $\varphi=45°$. **4.** $x^2/49+y^2/81=1$. Вариант 2. **1.** $|\vec{c}|=13$. **2.** $x-y-1=0$. **3.** $M(5;\ -7)$. **4.** $x^2-y^2=9$.

Глава IV
Производная и ее приложения

§ 1. Свойства и графики основных элементарных функций

1. Постоянные и переменные величины

Все величины, изучаемые в математике, делятся на постоянные и переменные.

Определение 1. Величина называется *постоянной*, если она в условиях данного эксперимента сохраняет одно и то же значение.

Например, длина радиуса одной окружности, температура кипения воды при постоянном давлении являются величинами постоянными.

Некоторые постоянные величины сохраняют свое числовое значение при любых условиях и называются *абсолютными постоянными*. Примерами абсолютных постоянных являются: все числа, сумма внутренних углов треугольника, количество секунд в минуте, скорость света в пустоте.

Определение 2. Величина называется *переменной*, если она в условиях данного эксперимента может принимать различные значения.

Например, скорость камня, брошенного вверх, есть величина переменная: сначала она уменьшается до нуля, а затем, при свободном падении, увеличивается. Примерами других переменных величин могут служить температура, время и т. п.

1. Согласно закону Бойля—Мариотта, при изотермическом

процессе $PV=C$, где P — давление газа, а V — занимаемый им объем. Указать в этой формуле переменные и постоянные величины.

Решение. Здесь величина C — постоянная для данного газа и данной температуры; величины P и V — переменные.

2. Период малых колебаний T математического маятника вычисляется по формуле $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести. Какие из величин, входящих в эту формулу, являются постоянными, а какие — переменными?

Решение. Здесь g — постоянная, которая в данной точке земной поверхности не изменяется; 2 и π — абсолютные постоянные; l и T — переменные.

3. Предположим, что дверь постепенно открывается. Пусть α — угол, который дверь составляет со стеной. Какие из нижеперечисленных величин при этом являются переменными, а какие — постоянными: $\sin\alpha$; $\cos 2\pi$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha-1$; $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$?

2. Область изменения переменной.

Совокупность тех значений, которые может принимать данная переменная величина, принято называть *областью изменения* этой величины. Для указания этой области вводятся понятия интервала и отрезка.

Интервалом называется множество значений переменной x, удовлетворяющих условиям $a<x<b$. Интервал обозначается (a, b).

Если одно из чисел a или b присоединяется к указанному множеству значений переменной, то получается *полузамкнутый интервал (полуинтервал)*. Он задается неравенствами $a\leqslant x<b$ или $a<x\leqslant b$ и обозначается соответственно $[a, b)$ или $(a, b]$.

Отрезком называется множество значений переменной x, удовлетворяющих условиям $a\leqslant x\leqslant b$. Отрезок обозначается $[a, b]$.

Если рассматривается множество всех действительных чисел, то это записывается как бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$ и означает, что $-\infty<x<\infty$.

Общее название для интервала, полуинтервала и отрезка — *промежуток*.

4. Что означают записи: а) (a, ∞); $[a, \infty)$; б) $(-\infty, b)$; $(-\infty, b]$?

Решение. а) Под записью (a, ∞) следует понимать множество действительных чисел, бóльших числа a, а под записью $[a, \infty)$ — множество действительных чисел, бóльших или равных (т. е. не меньших) a.

б) Запись $(-\infty, b)$ означает множество действительных чисел, меньших числа b, а запись $(-\infty, b]$ — множество действительных чисел, не больших числа b.

Множество всех целых чисел обозначается через **Z**, а множество действительных чисел — через **R**. Тот факт, что переменная x принимает действительные значения, обозначается так: $x \in \mathbf{R}$. Тогда запись $x \in [a, b]$ означает, что x принадлежит отрезку $[a, b]$.

5. Какие записи являются ошибочными: $3{,}4 \in [2; 3{,}4)$; $3{,}4 \in [2; 3{,}4]$; $3{,}4 \in [2, 3]$; $3{,}4 \in (2, 5)$; $3{,}4 \in [3{,}4; 5)$?

Решение. Ошибочны записи $3{,}4 \in [2; 3{,}4)$ и $3{,}4 \in [2{,}3]$, так как число 3,4 не удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant 3{,}4 < 3{,}4$ и $2 \leqslant 3{,}4 \leqslant 3$.

6. Заменить неравенство записью, в которой используются знак $\in$ и обозначения интервала и отрезка: а) $-2 < 0 < 1$; б) $-1 \leqslant a \leqslant 5$; в) $-5{,}2 < x < -4{,}2$.

Решение. а) $0 \in (-2, 1)$; б) $a \in [-1{,}5]$; в) $x \in (-5{,}2; -4{,}2)$.

3. Определение функции. Частное значение функции

В практических задачах часто имеют дело с переменными величинами, которые связаны между собой так, что значения одной величины определяют значения другой. Эта зависимость между двумя переменными величинами носит взаимный характер, и ни одна из этих величин не играет сама по себе первенствующей роли. Однако в условиях конкретной задачи часто случается так, что заданы значения некоторой величины x (независимой переменной) и по ним определяют соответствующие значения величины y (зависимой переменной).

7. Путь, пройденный свободно падающим телом, выражается формулой $s = \frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободно падающего тела, величина для данной широты — постоянная. Указать независимую и зависимую переменные.

Решение. Придавая времени t различные значения, мы можем определить путь s для любого заданного промежутка времени t. Таким образом, здесь t — независимая переменная, а s — зависимая от t переменная.

8. Объем шара определяется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Указать независимую и зависимую переменные.

Решение. Здесь $\frac{4}{3}\pi$ — величина постоянная. Придавая радиусу R различные значения, мы можем найти объем шара для каждого из заданных значений радиуса. Итак, радиус R является независимой переменной, а объем шара V — зависимой.

Независимую переменную величину, т. е. величину, для которой мы можем задавать произвольные, интересующие нас значения, называют *аргументом*. Переменную величину, значения которой зависят от аргумента, называют *функцией*

Так, в примере 7 переменная t является аргументом, а s — функцией. В примере 8 переменная R является аргументом, а V — функцией.

Определение 3. Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x, если каждому значению x, взятому из области ее изменения, соответствует по определенному правилу единственное значение y.

Чтобы показать, что y есть функция переменной x, пользуются символическими записями: $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=F(x)$ и т. д.

Такая символическая запись не раскрывает самого правила зависимости y от x, и лишь устанавливает сам факт наличия зависимости.

Например, скорость свободно падающего тела — функция времени t, т. е. $v=f(t)$, а правило установления соответствия между t и v известно: $v=gt$.

Поверхность шара S есть функция его радиуса R, т. е. $S=\varphi(R)$, а правило соответствия между S и R имеет вид $S=4\pi R^2$.

Замечание. Как видно из рассмотренных выше примеров, аргумент и функция могут обозначаться не только буквами x и y, но и другими буквами.

Частное значение функции $y=f(x)$ при заданном частном значении аргумента $x=a$ символически обозначается $f(a)$ или $y|_{x=a}$.

9. Определить значение функции $f(x)=2x^2-1$ при $x=3$.

Решение. Находим $f(3)=y_{x=3}=2\cdot 3^2-1=17$.

10. Дано: $F(x)=3x^2$. Найти: $F(7)$, $F(1/2)$ $F(a)$.

11. Найти $\varphi(\pi/4)$, если $\varphi(t)=\dfrac{2t}{1+\sin^2 t}$.

Решение. $\varphi(\pi/4)=\dfrac{2\cdot\pi/4}{1+\sin^2(\pi/4)}=\dfrac{\pi/2}{1+1/2}=\dfrac{\pi}{3}$.

12. Дано: $\varphi(u)=\lg u$. Найти $\varphi(1000)$.

13. Дано: $f(x)=4x^2-3x+1$; $\varphi(x)=5x+2$. Найти $f(1)+2\varphi(0{,}2)$.

4. Область определения функции

Под *областью определения* (существования) функции $f(x)$ понимается совокупность всех действительных значений аргумента x, при которых функция определена и выражается действительным числом.

14. Найти область определения функции $y=x^2$.

Решение. Очевидно, что при любом действительном значении x функция y также выражается действительным числом. Следовательно, данная функция определена при любом значении $x\in(-\infty, \infty)$. Этот результат можно записать в виде $x\in\mathbf{R}$.

Отметим особенности отыскания области определения некоторых функций.

1. При отыскании области определения дробной функции нужно исключить значения аргумента, при которых знаменатель обращается в нуль.

15—29. Найти области определения функций:

15. $y=\frac{1}{x}$.

Решение. Знаменатель обращается в нуль при $x=0$. Данная функция принимает действительные значения для всех x, кроме $x=0$. Следовательно, областью определения данной функции являются интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

16. $y=\frac{2}{1-x}$. **17.** $y=\frac{3}{x-4}$.

18. $y=\frac{1}{2x-5}$.

Решение. Здесь $2x-5\neq0$, откуда $x\neq2{,}5$. Таким образом, получаем ответ: $(-\infty; 2{,}5)$ и $(2{,}5; \infty)$.

19. $y=\frac{x-1}{x+1}$. **20.** $y=\frac{2x+1}{3x-1}$.

21. $y=\frac{3}{x^2-4}$.

Решение. Приравняв знаменатель нулю, решим полученное уравнение: $x^2-4=0$; $(x+2)(x-2)=0$; $x_1=-2$, $x_2=2$. Следовательно, знаменатель обращается в нуль при значениях $x=-2$ и $x=2$, которые не могут принадлежать области определения данной функции. Исключив их, получим три интервала $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ и $(2, \infty)$, которые и служат областью определения данной функции.

22. $y=\frac{1}{1-x^2}$. **23.** $y=\frac{5}{x^2-9}$.

24. $y=\frac{x+2}{x^2-5x+6}$.

Решение. Функция определена для всех действительных значений x, кроме тех, для которых $x^2-5x+6=0$, т. е. корней квадратного трехчлена x^2-5x+6; ими являются числа $x_1=2$; $x_2=3$. Следовательно, функция определена на интервалах $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ и $(3, \infty)$.

25. $y=\frac{x+5}{x^2-7x+12}$. **26.** $y=\frac{x-12}{x^2+x-12}$.

27. $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}$.

Решение. Приравняв знаменатель дроби нулю и решив полученное квадратное уравнение $x^2+x+1=0$, убедимся, что его корни — комплексные числа: $x=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ни при одном действительном значении x знаменатель в нуль не обращается. Поэтому данная функция определена при всех действительных значениях x. Ее областью определения является бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$.

28. $y=\frac{2x^3-1}{x^3+1}$. **29.** $y=\frac{x-2}{x^2+2x+5}$.

Рис. 65

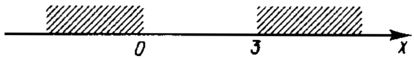


Рис. 66

2. Если аналитическое выражение функции содержит корень четной степени, то при отыскании области определения функции нужно исключить значения аргумента, при которых подкоренное выражение принимает отрицательные значения.

30—40. Найти области определения функций:

30. $y=\sqrt{x-4}$.

Решение. Заметим, что эта функция имеет смысл только в том случае, когда подкоренное выражение больше нуля либо равно нулю. Если же подкоренное выражение отрицательно, то y — мнимое число. Следовательно, $x-4\geqslant 0$ или $x\geqslant 4$. Итак, данная функция определена только в том случае, если $x\geqslant 4$, т. е. $x\in[4, \infty)$ (рис. 65).

31. $y=\sqrt{2x-4}$. **32.** $y=\sqrt{5-2x}$.

33. $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$.

Решение. Найдем область определения каждого слагаемого в отдельности. Общая часть этих областей и будет областью определения функции. Для $\sqrt{x}$ имеем $x\geqslant 0$, а для $\sqrt{x-1}$ имеем $x\geqslant 1$. Тогда для суммы $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ область определения есть $x\geqslant 1$ или $[1, \infty)$.

34. $y=\sqrt{5-x}-\dfrac{4}{\sqrt{x-3}}$. **35.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}-2\sqrt{1-x}$.

36. $y=\sqrt{2x^2-6x}$.

Решение. Область определения функции найдем из условия $2x^2-6x\geqslant 0$ или $2x(x-3)\geqslant 0$. Решениями этого неравенства являются значения $x\leqslant 0$, $x\geqslant 3$. Следовательно, областью определения функции служат полуинтервалы $(-\infty, 0]$ и $[3, \infty)$. Это можно проиллюстрировать на числовой оси (рис. 66).

37. $y=\sqrt{1-x^2}$. **38.** $y=\sqrt{3-2x-x^2}$.

39. $y=\sqrt{x^2-2x-8}$. **40.** $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}$.

3. Если аналитическое выражение функции содержит логарифм, то при отыскании области существования данной функции нужно исключить значения аргумента, при которых выражение под знаком логарифма принимает отрицательные значения и обращается в нуль.

41—52. Найти области определения функций:

41. $y=\lg(x-2)$.

Решение. Так как выражение под знаком логарифма должно быть положительно, то $x-2>0$, откуда $x>2$, т. е. данная функция существует только при $x\in(2, \infty)$.

42. $y=\lg(2x-3)$. **43.** $u=\lg(7+t)$.

44. $v=\lg\frac{3}{17-x}$. **45.** $s=\lg\frac{1}{2x-1}$.

46. $z=\log_3(x^2-9)$.

Решение. Логарифмическая функция z определена только для положительных значений своего аргумента, поэтому $x^2-9>0$. Решая это неравенство, получим $|x|>3$, откуда следует, что область определения функции z состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, -3)$ и $(3, \infty)$.

47. $y=\lg(x^2+3)$. **48.** $f(x)=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$.

49. $y=\log_2(x-1)+x^2$. **50.** $y=\ln\frac{5x-1}{3x-1}$.

51. $f(x)=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$. **52.** $y=\frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$.

4. Если аналитическое выражение функции содержит обратные тригонометрические функции арксинус или арккосинус, то при нахождении области ее определения нужно включать только те значения аргумента, при которых выражения, стоящие под знаком этих функций, по модулю не превосходят единицы.

53—57. Найти области определения функций:

53. $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$.

Решение. Данная функция определена, если

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3}\geqslant -1, \\ \frac{x-2}{3}\leqslant 1. \end{cases}$$

Решением системы неравенств являются значения $x\geqslant -1$ и $x\leqslant 5$. Итак, область определения функции есть отрезок $[-1, 5]$.

54. $y=\arcsin\sqrt{4x-3}$. **55.** $y=\arccos(3x-6)$.

56. $f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$. **57.** $y=\arccos\frac{3}{4+2\sin x}$.

Иногда область определения функции ограничивается физическим или геометрическим смыслом задачи. Так, для функции $S=\pi R^2$ область определения есть $(0, \infty)$, поскольку радиус может принимать только положительные значения, хотя функция существует и для отрицательных значений R.

Нельзя смешивать область определения функции с областью значений функции.

Область значений функции есть множество всех действительных значений, которые принимает функция. Например, область значений функции $y=\sin x$ есть совокупность всех значений y, для которых $-1\leqslant y\leqslant 1$, т. е. отрезок $[-1, 1]$, а областью определения той же функции $y=\sin x$ является совокупность всех действительных значений x, т. е. промежуток $(-\infty, \infty)$.

5. Способы задания функции

Функция считается заданной, если известна область определения функции и указано правило, по которому для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Такое правило можно указать различными способами; из них наиболее распространенными являются табличный, графический и аналитический.

Табличный способ состоит в том, что значения аргумента и соответствующие им значения функции записаны в виде таблицы.

Так, значения логарифмов чисел, тригонометрических функций, квадратов и кубов чисел и т. д. находят с помощью четырехзначных математических таблиц. Зная число (аргумент), по таблицам отыскивают значение функции (либо логарифм этого числа, либо тригонометрическую функцию угла и т. д.). Такой способ удобен, когда вычисления значений функции являются громоздкими.

Табличный способ широко используется на практике для записи результатов наблюдений и измерений.

Несмотря на простоту, такой способ задания функции не дает полного представления о характере функциональной зависимости между x и y, лишен наглядности. Однако иногда это единственный способ выражения функциональной зависимости.

Пусть, например, нас интересует изменение температуры тела больного в зависимости от времени. В этом случае ее измеряют через равные промежутки времени и записывают полученные данные в виде таблицы:

Температура, °С	36,5	36,8	37,5	38,2
Время суток, ч	10	12	14	16

Для большей наглядности каждую пару чисел изображают точкой на плоскости и затем соединяют эти точки отрезками ломаной.

Если же функция изображена в прямоугольной системе координат в виде графика, т. е. какой-то линии, где абсцисса каждой точки является аргументом, а ордината — функцией, то такой способ задания функции называется *графическим*. Например, пусть функция $y=f(x)$ изображена в виде графика (рис. 67) и мы хотим найти значение функции y при $x=2$. Восставив из точки $x=2$ перпендикуляр к оси Ox до пересечения с графи-

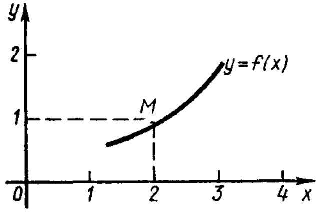


Рис. 67

ком, получим точку M, которую спроецируем на ось ординат и найдем ординату $y = 1$. Это значение соответствует значению функции $y = f(x)$ при $x = 2$. Аналогично можно найти значения функции и для других значений аргумента.

Графический способ задания функции удобен своей наглядностью при изучении различных процессов. На графике часто видны такие особенности поведения функции, которые трудно установить при других способах задания функции.

Иногда этот способ выражения зависимости между аргументом и функцией является единственно возможным, иногда же он применяется в качестве дополнительного — для наглядного изображения характера функциональной зависимости.

Например, зависимость между давлением и временем (барограмма) вычерчивается специальным метеорологическим прибором в виде некоторой кривой. В данном случае график является единственно возможным способом выразить эту функциональную зависимость.

58. Указать промежутки возрастания функции

x	-2	-1	0	1	2
y	9	2	0	2	9

Р е ш е н и е. В данном случае, хотя функция и задана таблицей, для наглядности строим график (рис. 68). Очевидно, что функция возрастает на интервале $(0, \infty)$.

Наиболее удобным является третий способ задания функции — аналитический.

При *аналитическом способе* зависимость между аргументом x и функцией y задается в виде математической формулы или уравнения. В этой формуле указаны действия, которые нужно произвести над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Придавая аргументу x различные значения, мы можем вычислить соответствующее значение y с необходимой точностью.

Примером функции, заданной аналитически, может служить функция $y = \frac{2x^3 - 5}{x+1}$.

Единственный недостаток аналитического способа — отсутствие наглядности. В математике предпочтение отдается этому способу. Зная закон соответствия $y = f(x)$, всегда можно составить таблицу и построить график. Другие способы задания функции такой универсальностью не обладают. На практике при исследовании различных зависимостей наиболее удобными является сочетание различных способов заданий функции.

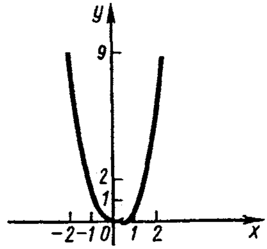


Рис. 68

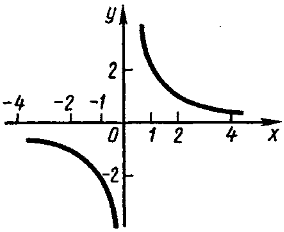


Рис. 69

59. Построить график функции $y=\frac{2}{x}$.

Решение. Составим таблицу значений функции:

-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-6	6	4	2	1	$\frac{1}{2}$

В соответствии с таблицей значений функции строим кривую (рис. 69).

6. Основные свойства функций

Определение 4. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на некотором интервале, если для любых x из этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. при $x_1<x_2$ имеет место неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (рис. 70).

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на некотором интервале, если для любых x из этого интервала большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. при $x_1<x_2$ имеет место неравенство $f(x_1)>$ $>f(x_2)$ (рис. 71).

Если же для любых значений x, взятых из некоторого промежутка и удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, вытекает нестрогое

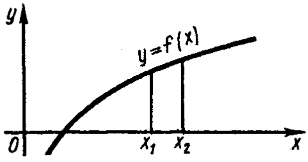


Рис. 70

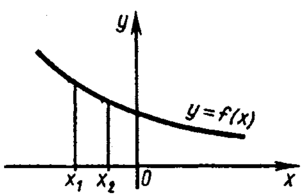


Рис. 71

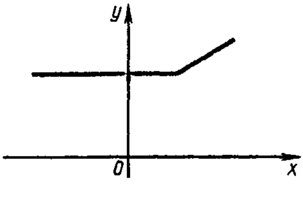


Рис. 72

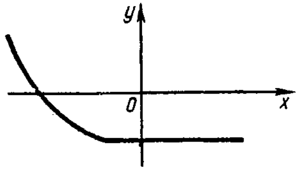


Рис. 73

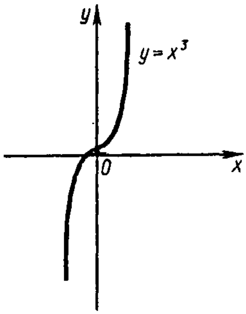


Рис. 74

неравенство $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ [или $f(x_1)\geqslant f(x_2)$], то функция называется *неубывающей (невозрастающей)*. Примеры неубывающей и невозрастающей функций изображены соответственно на рис. 72 и 73.

Функции только убывающие или только возрастающие называются *монотонными*.

Например, функция $y=x^3$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$ и возрастает в этом интервале (рис. 74). Функция $f(x)=1/x$ определена на двух интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$; в каждом из них она убывает (см. рис. 69). Функция $y=2^x$ возрастает, а функции $y=2^{-x}$ и $y=-2^x$ убывают в интервале $(-\infty, \infty)$ (рис. 75).

Функция $y=f(x)$ называется *кусочно-монотонной* в данном промежутке, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых функция монотонна.

Например, функция $y=x^2$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$ и является кусочно-монотонной на нем, так как в промежутке $(-\infty, 0)$ она убывает, а в промежутке $(0, \infty)$ возрастает (рис. 76). Функция $y=\sin x$ определена в интервале $(-\infty,\infty)$. Эта функция не является кусочно-монотонной, так как интервал $(-\infty, \infty)$ нельзя разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых функция была бы монотонной.

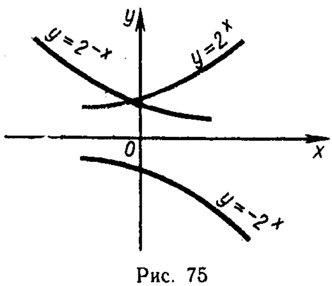


Рис. 75

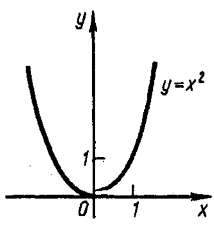


Рис. 76

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если при изменении знака у любого значения аргумента, взятого из области определения функции, значения функции не изменяются, т. е. $f(-x)=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если при изменении знака у любого значения аргумента, взятого из области определения функции, значения функции изменяют только знак, т. е. $f(-x)=-f(x)$.

Примерами четных функций могут служить функции $y=x^2$, $f(x)=\cos x$, примерами нечетных — функции $f(x)=\sin x$, $y=x^3$. Функции $y=x^3+1$, $y=\sin x+\cos x$ не обладают свойствами четности и нечетности, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 76), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 74).

60. Доказать, что функция $f(x)=x^2-5x\sin x$ является четной.

Решение. Имеем $f(-x)=(-x)^2-5(-x)\sin(-x)=x^2+$ $+5x\sin(-x)=x^2-5x\sin x=f(x)$, т. е. данная функция — четная.

61. Доказать, что функция $\varphi(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}+3x}$ нечетная.

Решение. Находим

$$\varphi(-x)=\frac{\cos(-2x)}{\sqrt[3]{-x}-3x}=\frac{\cos 2x}{-\sqrt[3]{x}-3x}=-\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}+3x}=-\varphi(x),$$

т. е. данная функция является нечетной.

62. Выяснить, является ли функция $g(x)=2^x-3x+1$ четной или нечетной.

Решение. Имеем $g(-x)=2^{-x}-3(-x)+1=2^{-x}+3x+1$. Как видно, в данном случае не выполняются условия четности и нечетности. Значит, функция $g(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

63—74. Установить, какая из данных функций является четной, а какая — нечетной:

63. $f(x)=2x^4$. **64.** $f(x)=-\dfrac{3}{x}$.

65. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$. **66.** $f(x)=\dfrac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

67. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. **68.** $\varphi(x)=2x+7$.

69. $f(x)=\text{const}$. **70.** $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

71. $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$. **72.** $y=\lg\dfrac{x+3}{x-3}$.

73. $y=2^x+2^{-x}$. **74.** $f(x)=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x$.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $l\neq 0$ (называемое *периодом*), что в каждой точке области определения функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+l)=f(x)$

Например, функции $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$ являются периодическими с периодами соответственно 2π и π, так как $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$.

Замечание. Кроме чисел 2π и π, периодами этих функций являются также и числа вида $2\pi k$ и πk, где k — любое целое число.

75. Доказать, что функция $f(x)=\sin 3x$ является периодической с периодом $l=2\pi/3$.

Решение. Так как $\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x$, то период функции $f(x)$ равен $2\pi/3$.

76. Доказать, что функция $y=\cos^2 x$ имеет период π.

77. Доказать, что функция $f(x)=\cos x^2$ не является периодической.

78. Найти период функции $y=\sin 2x$.

79. Найти период функции $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

Определение 7. Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и является монотонной, а область изменения функции y есть отрезок $[\alpha, \beta]$ (рис. 77). Каждому значению y_0 из отрезка $[\alpha, \beta]$ будет соответствовать одно значение x_0 из отрезка $[a, b]$ такое, что $y_0=f(x_0)$. Следовательно, на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена функция $x=\varphi(y)$. Эта функция $x=\varphi(y)$ называется *обратной* для функции $y=f(x)$ и, наоборот, функция $y=f(x)$ является обратной для функции $x=\varphi(y)$. Поэтому их называют *взаимно обратными*.

Графиками функций $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ служит одна и та же линия, так как эти функции выражают одну и ту же функциональную зависимость между переменными x и y.

Примерами взаимно обратных функций являются функции $y=ax+b$ и $x=\frac{y-b}{a}$, где $a\neq 0$, или функции $y=a^x$ и $x=\log_a y$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Построение их графиков отличается лишь тем, что значения независимой переменной для функции $y=f(x)$ откладывают на

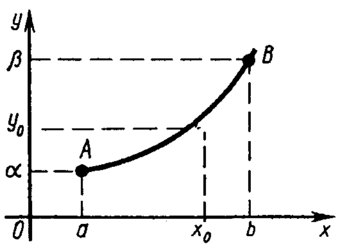


Рис. 77

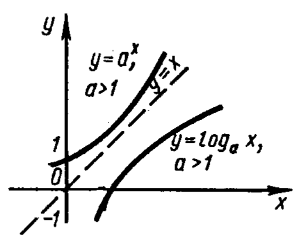


Рис. 78

горизонтальной оси Ox, а для функции $x=\varphi(y)$ — на вертикальной оси Oy. Чтобы избежать этого неудобства, в уравнении $x=\varphi(y)$ переставим переменные. Полученная функция $y=\varphi(x)$ также называется обратной для функции $y=f(x)$.

Так, функция $y=\frac{x-b}{a}$ является обратной для функции $y=ax+b$, а функция $y=\log_a x$ — обратной для функции $y=a^x$.

На рис. 78 изображены графики взаимно обратных функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ (при $a>1$), симметричные относительно прямой $y=x$.

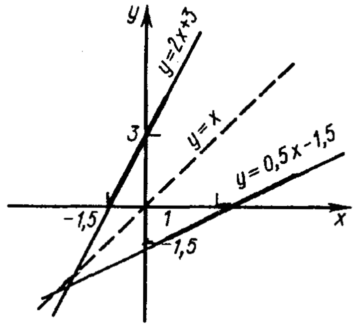


Рис. 79

80. Дана функция $y=2x+3$, $x\in[-1{,}5;\ 1]$. Найти функцию, обратную данной.

Решение. Решая данное уравнение относительно x, имеем $2x=y-3$, откуда $x=0{,}5y-1{,}5$. Переходя к обычным обозначениям, т. е. заменяя в последнем равенстве x на y, а y на x, получаем функцию, обратную данной: $y=0{,}5x-1{,}5$, $x\in[0,\ 5]$.

На рис. 79 изображены графики данной функции и обратной к ней, а также прямая $y=x$, относительно которой графики этих функций симметричны.

81. Найти функцию, обратную функции $y=3x+4$.

82. Показать, что функция $y=k/x$ $(k\neq 0)$ обратна сама себе.

83. Найти функцию, обратную функции $y=x^2$ $(-\infty<x<\infty)$.

Решение. Из уравнения $y=x^2$ видно, что значения функции y заполняют полуинтервал $[0,\ \infty)$. Если это уравнение разрешить относительно x, то получим уравнение $x=\pm\sqrt{y}$, из которого следует, что каждому значению y из полуинтервала $[0,\ \infty)$ соответствует не одно, а два значения x из интервала $(-\infty,\ \infty)$. Таким образом, функция $y=x^2$ на интервале $(-\infty,\ \infty)$ не имеет обратной функции (x через y выражается не однозначно).

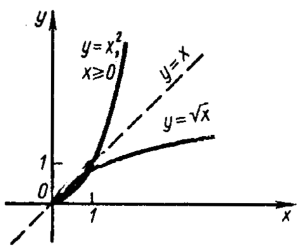


Рис. 80

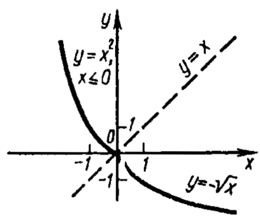


Рис. 81

Если рассматривать функцию $y=x^2$ на полуинтервале $[0, \infty)$, то $x=\sqrt{y}$ и каждому значению $y\geqslant 0$ соответствует только одно значение x. В этом случае обратная функция существует и определяется уравнением $y=\sqrt{x}$ (рис. 80).

Легко убедиться в том, что функция $y=x^2$ на полуинтервале $(-\infty, 0]$ также имеет обратную функцию. Действительно, в этом случае $x=-\sqrt{y}$, каждому значению $y\geqslant 0$ соответствует единственное значение x и обратная функция определяется уравнением $y=-\sqrt{x}$ (рис. 81).

Определение 8. Пусть y является функцией переменной u, а переменная u, в свою очередь, является функцией от переменной x, т. е. $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Тогда функция $y=f(\varphi(x))$ называется *функцией от функции* (или *сложной функцией*), если область определения функции f содержит множество значений функции φ. Переменная u в этом случае называется *промежуточной переменной.*

Например, функция $y=\lg(x^2+5x)$ является сложной функцией, так как ее можно представить в виде $y=\lg u$, где $u=x^2+5x$. Функция $y=\sin(2x+1)$ также есть сложная функция; ее можно представить в виде $y=\sin u$, где $u=2x+1$.

Сложная функция может содержать несколько промежуточных переменных. Например, если $y=2^t$, где $t=\cos u$, $u=x^2$, то сложная функция $y=2^{\cos x^2}$ содержит две промежуточные переменные.

84. Составить сложные функции $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$, если $\varphi(x)=3x+2$, $f(x)=x^2-1$.

Решение. Имеем $f(\varphi(x))=(3x+2)^2-1=9x^2+12x+3$; $\varphi(f(x))=3(x^2-1)+2=3x^2-1$. Из решения видно, что сложные функции $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$ различны.

85. Сложную функцию $y=\sin u$, где $u=\lg v$, $v=\sqrt{x}$, записать в виде одного равенства.

Решение. Подставив в равенство $u=\lg v$ значение $v=\sqrt{x}$, получим $u=\lg\sqrt{x}$. Далее, подставим полученное значение для u в равенство $y=\sin u$; тогда данная сложная функция примет вид $y=\sin(\lg\sqrt{x})$.

86. Сложную функцию $y=u^2$, где $u=\sin v$, $v=2x^3$, записать в виде одного равенства.

87. Сложную функцию $y=\operatorname{arctg} u$, где $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$, записать в виде одного равенства.

88. Сложную функцию $y=(2x-5)^{10}$ записать в виде цепочки равенств.

Решение. Обозначим $2x-5$ через u; тогда получим $y=u^{10}$, где $u=2x-5$.

89. Сложную функцию $y=\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ записать в виде цепочки равенств.

90. Сложную функцию $y=3^{\cos^5 x}$ записать в виде цепочки равенств.

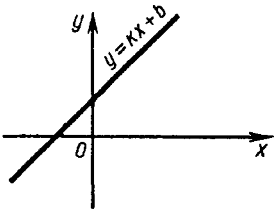


Рис. 82

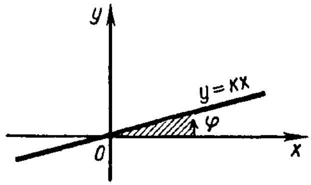


Рис. 83

7. Основные элементарные функции

Основные элементарные функции подробно изучались в школе. Напомним кратко основные свойства некоторых из них.

1. *Линейная функция* $y=kx+b$, где k и b — действительные числа. Область определения — множество всех действительных чисел. Графиком линейной функции является прямая (рис. 82).

Если $b=0$, то $y=kx$; эта функция выражает прямую пропорциональную зависимость между x и y. В этом случае прямая проходит через начало координат (рис. 83).

Угловой коэффициент k равен $\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс.

Функция возрастает, если $k>0$ (угол φ — острый; рис. 83); функция убывает, если $k<0$ (угол φ — тупой; рис. 84).

При $k=0$ получаем постоянную функцию $y=b$ (рис. 85); в частности, если $k=0$ и $b=0$, то $y=0$ (ось абсцисс).

Рассмотрим вопрос о четности и нечетности линейной функции.

Если $k=0$, то $f(x)=b$, $f(-x)=b$, т. е. в этом случае функция четная.

Если $b=0$, то $f(x)=kx$, $f(-x)=-kx$, т. е. в этом случае функция нечетная.

Если $k\neq 0$, $b\neq 0$, то $f(x)=kx+b$, $f(-x)=-kx+b$, т. е. в этом случае функция не является ни четной, ни нечетной.

2. *Степенная функция* $y=x^n$, где n — любое действительное число.

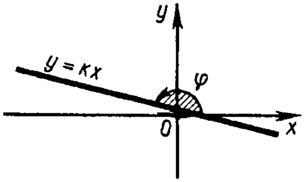


Рис. 84

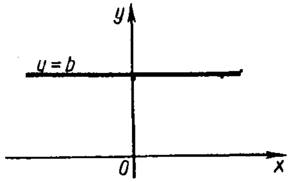


Рис. 85

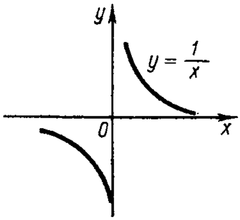


Рис. 86

При $n=2$ получим квадратичную функцию $y=x^2$. Ее графиком является парабола (см. рис. 76).

Отметим некоторые свойства функции $y=x^2$.

Область определения — множество всех действительных чисел. Функция четная, поскольку $x^2=(-x)^2$. Она ограничена снизу, так как $x^2\geqslant 0$. Функция возрастает при $x\in[0, \infty)$ и убывает при $x\in(-\infty, 0]$.

При $n=3$ получим функцию $y=x^3$, графиком которой является кубическая парабола (см. рис. 74).

Отметим некоторые свойства функции $y=x^3$.

Область определения — множество всех действительных чисел. Функция нечетная, так как $(-x)^3=-x^3$. Функция возрастает во всей области определения.

Степенная функция $y=x^n$ в случае, когда n — четное число, обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$, а в случае, когда n — нечетное число, — теми же свойствами, что и функция $y=x^3$.

При $n=-1$ получим функцию $y=1/x$, которая выражает обратную пропорциональную зависимость между x и y. Графиком функции является гипербола (рис. 86).

Отметим некоторые свойства функции $y=1/x$.

Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $x=0$. Функция нечетная, так как $f(-x)=-1/x=-f(x)$. Функция убывает при $x\in(-\infty, 0)$ и при $x\in(0, \infty)$.

3. *Показательная функция* $y=a^x$, где основание степени a — данное положительное число, не равное единице, а показатель степени x — переменная величина, которая может принимать любые действительные значения.

Основание степени a считается отличным от единицы, так как $a=1$ степень 1^x при всяком значении x равна 1, т. е. функция $y=a^x$ становится не зависящей от x. Кроме того, предполагается $a>0$, поскольку при $a<0$ для ряда значений x функция не существует. Например, при $a=-9$ и $x=1/2$ имели бы $a^x=(-9)^{1/2}=\sqrt{-9}$, а это есть мнимое выражение.

Функция $y=a^x$ определена для всех действительных значений, т. е. $x\in(-\infty, \infty)$.

Областью изменения функции служит интервал $(0, \infty)$, т. е. график находится в верхней полуплоскости (см. рис. 78).

Свойствами четности и нечетности функция не обладает.

Функция $y=a^x$ является монотонной; она возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

График проходит через точку (0; 1), так как $1=a^0$.

4. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$ $(a>0,\ a\neq 1)$. Эта функция является обратной по отношению к показательной функции, так как если $y=\log_a x$, то $x=a^y$. Отсюда следует, что гра-

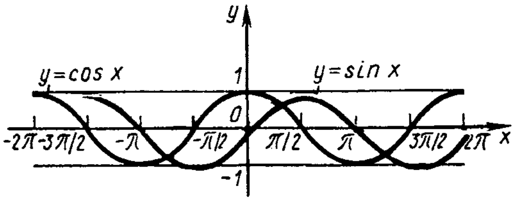


Рис. 87

фик логарифмической функции симметричен графику показательной функции относительно биссектрисы I и III координатных углов (см. рис. 78).

Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел, т. е. $x \in (0, \infty)$ (отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют).

Область значений функции — множество всех действительных чисел.

Свойствами четности и нечетности функция не обладает.

Функция $y = \log_a x$ является монотонной; она возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

График проходит через точку (1; 0), так как $\log_a 1 = 0$.

5. *Тригонометрические функции.* Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Они являются периодическими с периодом 2π.

Функция $y = \sin x$ — нечетная, поскольку $\sin(-x) = -\sin x$; функция $y = \cos x$ — четная, так как $\cos(-x) = \cos x$. Графики этих функций изображены на рис. 87.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена только в точках, где $\cos x = 0$, т. е. в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$, а функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена только в точках, где $\sin x = 0$, т. е. в точках $x = \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

При этом $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетные функции, так как $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Обе функции являются периодическими с периодом π.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ изображены на рис. 88, 89.

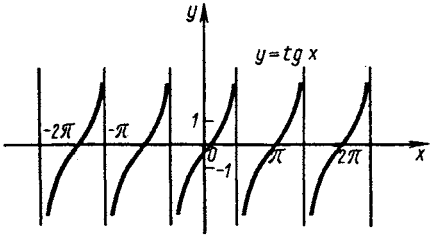


Рис. 88

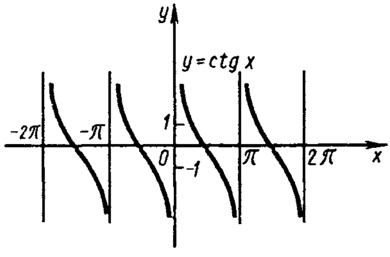


Рис. 89

Элементарными называются функции, образованные из основных элементарных функций с помощью конечного числа математических действий и образования из них сложных функций. Например, функции $y=\ln\sin x+x^5$, $y=\sqrt{x^3\cos x+\ln\operatorname{tg} x}$ являются элементарными.

§ 2. Предел и непрерывность функции

1. Предел переменной величины

Пусть переменная величина x в процессе своего изменения неограниченно приближается к числу 5, принимая при этом следующие значения: 4,9; 4,99; 4,999; ... или 5,1; 5,01; 5,001; .... В этих случаях модуль разности $|x-5|$ стремится к нулю: $|x-5|=0{,}1$; 0,01; 0,001; ....

Число 5 в приведенном примере называют *пределом* переменной величины x и пишут $\lim x=5$.

Определение 1. Постоянная величина a называется *пределом* переменной x, если модуль разности $|x-a|$ при изменении x становится и остается меньше любого как угодно малого положительного числа ε.

Итак, $\lim x=a$ (предел x равен a) или $x\to a$ (x стремится к a).

Замечания. 1. Предел постоянной величины равен самой постоянной: $\lim a=a$, так как $|a-a|<\varepsilon$.

2. Переменная величина может иметь только один предел.

3. Предел положительной переменной величины не отрицателен, предел отрицательной переменной величины не положителен.

91. Найти предел переменной величины $x=\dfrac{az+1}{z}$ при $z\to\infty$.

Решение. Преобразуем переменную, разделив все члены числителя на знаменатель. Получим: $x=a+\dfrac{1}{z}$; $x-a=\dfrac{1}{z}$.

Замечаем, что чем больше z, тем ближе значения переменной величины x к постоянной a, так как выполняется условие $|x-a|<\varepsilon$, где ε — как угодно малая величина. Следовательно, $\lim\limits_{z\to\infty} x=a$.

92. Показать, что при $t \to \infty$ предел переменной величины $x=\frac{6t^3-9t+1}{2t^3-3t}$ равен 3.

Р е ш е н и е. Находим разность между переменной величиной x и числом 3:

$$x-3=\frac{6t^3+9t+1}{2t^3+3t}-3=\frac{6t^3+9t+1-3(2t^3+3t)}{2t^3+3t}=\frac{6t^3+9t+1-6t^3-9t}{2t^3+3t}=$$

$$=\frac{1}{2t^3+3t}.$$

Если $t \to \infty$, то $\frac{1}{2t^3+3t} \to 0$. Значит, выполняется условие $|x-3|<\varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{t\to\infty} x=3$.

93. Показать, что при $x \to \infty$ предел переменной величины $y=\frac{2x^2+6x+1}{x^2+3x}$ равен 2.

2. Основные свойства пределов

1. *Предел алгебраической суммы конечного числа переменных величин равен алгебраической сумме пределов слагаемых:*

$$\lim(x+y+...+t)=\lim x+\lim y+...+\lim t.$$

2. *Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению их пределов:*

$$\lim(x\cdot y...t)=\lim x\cdot\lim y...\lim t.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim(cx)=\lim c\cdot\lim x=c\lim x.$$

Например, $\lim(5x+3)=\lim 5x+\lim 3=5\lim x+3$.

4. *Предел отношения двух переменных величин равен отношению пределов, если предел знаменателя не равен нулю:*

$$\lim\frac{x}{y}=\frac{\lim x}{\lim y},\quad \text{если } \lim y\neq 0.$$

5. *Предел целой положительной степени переменной величины равен той же степени предела этой же переменной:*

$$\lim x^n=(\lim x)^n.$$

Например,

$$\lim_{x\to-2}(x^3+3x^2)=\lim_{x\to-2}x^3+3\lim_{x\to-2}x^2=(-2)^3+3\cdot(-2)^2=-8+12=4.$$

6. *Если переменные x, y, z удовлетворяют неравенствам $x\leqslant y\leqslant z$ и $x\to a$, $z\to a$, то $y\to a$.*

Замечание. В свойствах 1—6 условие существования пределов обязательно.

3. Предел функции в точке

Выше мы рассматривали независимые переменные величины, каждая из которых стремится к своему пределу независимо от другой.

Пусть теперь даны две переменные величины x и y, связанные функциональной зависимостью $y=f(x)$. Рассмотрим вопрос о пределе функции при условии, что задан предел ее аргумента.

Если при x, стремящемся к a, функция $f(x)$ стремится к b, то говорят, что предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ равен b и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Отметим, что во всем дальнейшем изложении, где говорится о пределе функции в точке a, будем предполагать, что функция определена в некоторой окрестности точки a. В самой же точке a функция может быть не определена.

Замечание. За *окрестность* точки a принимается любой интервал, содержащий точку a.

Определение 2. Число b называется *пределом** функции $f(x)$ в точке a, если для всех значений x, достаточно близких к a и отличных от a, значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа b.

Например, пусть задана функция $f(x)=x+2$. Предположим, что $x\to 1$. Выясним, существует ли при этом условии предел данной функции, и если существует, то найдем его значение.

Имеем: $f(0{,}9)=2{,}9$; $f(0{,}99)=2{,}99$; $f(0{,}999)=2{,}999$, $f(1{,}1)=3{,}1$; $f(1{,}01)=3{,}01$; $f(1{,}001)=3{,}001$. Полученные результаты показывают, что при приближении x к 1 значения функции приближаются к числу 3. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

Однако такой метод нахождения предела очень громоздок, поэтому на практике он не применяется. Упростить решения задач на вычисление пределов функций позволяют основные свойства пределов, перечисленные выше.

94. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x)$.

Решение. Используя последовательно свойства 1, 3 и 5 предела, получим

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-2x)=\lim_{x\to 2}(3x^2)-\lim_{x\to 2}(2x)=3\lim_{x\to 2}x^2-2\lim_{x\to 2}x=$$

$$=3(\lim_{x\to 2}x)^2-2\lim_{x\to 2}x=3\cdot 2^2-2\cdot 2=8.$$

95. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$.

Решение. Чтобы применить свойство о пределе частного, проверим, не равен ли нулю предел делителя при $x=4$. Так как $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)=$

---

* Более строгое определение предела функции дается в полных курсах математического анализа. Ввиду сложности этого определения в данном пособии оно не приводится.

$=\lim\limits_{x\to 4} x-\lim 3=4-3=1\neq 0$, то в данном случае можно воспользоваться свойством 4:

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to 4}(x^2-2x)}{\lim\limits_{x\to 4}(x-3)}.$$

Но $\lim\limits_{x\to 4}(x^2-2x)=(\lim\limits_{x\to 4} x)^2-2\lim\limits_{x\to 4} x$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^2-2x}{x-3}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to 4} x\right)^2-2\lim\limits_{x\to 4} x}{\lim\limits_{x\to 4} x-\lim 3}=\frac{4^2-2\cdot 4}{4-3}=8.$$

96—98. Найти пределы:

96. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{7x-5}{10+2x}$. **97.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5x^2-2x+4}{(x-1)(x+1)}$. **98.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+2}}{2-\sqrt{x}}$.

4. Приращение аргумента и приращение функции

Если аргумент функции $y=f(x)$ изменяется от значения x до нового значения $x_н$, то разность этих значений $x_н-x$ называют *приращением аргумента* и обозначают символом Δx (читается: «дельта икс»). Следовательно, $\Delta x=x_н-x$, откуда $x_н=x+\Delta x$. Сама функция $y=f(x)$ при таком изменении аргумента принимает новое значение $y_н=f(x+\Delta x)$, т. е. получим *приращение функции* $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Геометрически приращение аргумента изображается приращением абсциссы точки кривой, а приращение функции — приращением ординаты этой точки (рис. 90).

99. Найти приращения аргумента и функции $y=2x^2+1$, если аргумент x изменяется от 1 до 1,02.

Решение. 1^0. Находим приращение аргумента: $\Delta x=1{,}02-1=$ $=0{,}02$.

2^0. Находим значение функции при старом значении аргумента, т. е. при $x=1$: $y=2\cdot 1^2+1=3$.

3^0. Находим значение функции при новом значении аргумента, т. е. при $x=1+0{,}02=1{,}02$:

$$y_н=y+\Delta y=2\cdot 1{,}02^2+1=2\cdot 1{,}0404+1=3{,}0808.$$

4^0. Вычитая из нового первоначальное значение функции, найдем приращение функции: $\Delta y=3{,}0808-3=0{,}0808$.

К тому же результату можно прийти иначе. Сначала найдем приращение данной функции в общем виде:

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^2+1-(2x^2+1)=4x\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

Теперь, подставляя сюда значения x и Δx, получим

$$\Delta y=4\cdot 1\cdot 0{,}02+2\cdot 0{,}004=0{,}0808.$$

100. Определить приращения аргумента и функции $y=x^2$, если аргумент x изменяется от 2 до 2,5.

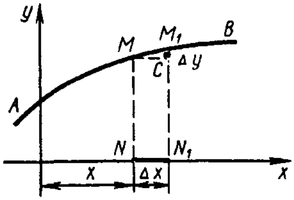


Рис. 90

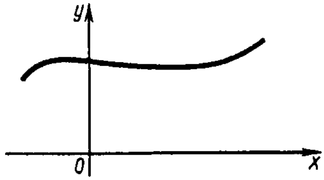


Рис. 91

Решение. Приращение аргумента есть $\Delta x = x_н - x = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$. Найдем приращение функции: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2{,}5^2 - 2^2 = 2{,}25$.

101. Дана функция $y = x^2 + 2x - 4$. Найти приращение Δy при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}5$.

102. Дана функция $y = 1/x$. Найти приращение Δy при изменении аргумента x от 1 до 1,2.

103. Найти приращение функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$.

5. Понятие о непрерывности функции

Наглядное представление о непрерывной функции состоит в том, что график такой функции можно начертить одним непрерывным движением, не отрывая карандаша от бумаги. В противном случае имеет место графическое изображение разрывной функции. На рис. 91 изображена некоторая непрерывная функция, на рис. 92 и 93 — разрывные функции.

Непрерывное изменение переменной величины легко представить себе интуитивно. В самом деле, когда мы говорим: «Температура воды при нагревании изменяется непрерывно» — мы имеем в виду, что за достаточно малый промежуток времени температура воды изменится достаточно мало, т. е. если температуру воды рассматривать как функцию времени, то в изменении этой функции наблюдается постепенность.

Примерами непрерывных функций могут служить также различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимость пройденного пути s от времени t. Одной из особенностей этой

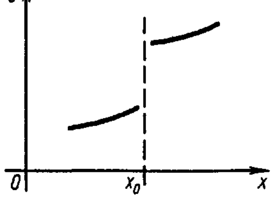


Рис. 92

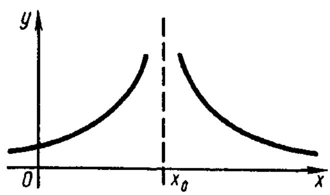


Рис. 93

зависимости является то, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути, т. е. график функции $s=f(t)$ изображается непрерывной линией.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=x_0$, если:

1) эта функция определена в точке $x=x_0$ (т. е. определенному значению аргумента x, равному x_0, соответствует вполне определенное значение функции y, равное y_0);

2) приращение функции в точке x_0 стремится к нулю при $\Delta x\to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0.$$

Кратко свойство непрерывности функции можно выразить так: функция называется непрерывной в данной точке, если $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Из рис. 90 видно, что если точка M_1 приближается по кривой $y=f(x)$ к точке M, то Δx и Δy как угодно уменьшаются, т. е. стремятся к нулю, и данная функция в точке M является непрерывной.

Итак, геометрически непрерывность функции $y=f(x)$ означает, что ординаты двух точек графика сколь угодно мало отличаются друг от друга, если достаточно мало отличаются их абсциссы. Поэтому график непрерывной функции представляет собой сплошную линию без разрывов.

Часто пользуются другим, равносильным приведенному, определением непрерывности функции в точке.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в данной точке* x_0, если ее предел в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке, т. е. если $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

Примером функции, непрерывной в любой точке x_0, может служить постоянная $f(x)=C$. В самом деле, в этом случае $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=C$ и $f(x_0)=C$.

Отметим следующие свойства непрерывных функций.

Если функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *непрерывны в точке* a, *то:*

1) *их сумма, разность, произведение являются функциями, непрерывными в этой точке;*

2) *частное* $f_1(x)/f_2(x)$ *есть непрерывная функция при условии* $f_2(a)\neq 0$.

Определение 5. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

104. Доказать непрерывность функции $y=ax^2+bx+c$ в точке x.

Решение. 1^0. Придадим аргументу x приращение Δx.

2^0. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - (ax^2+bx+c) = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x.$$

3^0. Находим предел функции при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x\to 0} (2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x) = 0,$$

так как предел каждого слагаемого равен нулю.

Следовательно, функция $y=ax^2+bx+c$ непрерывна в точке x. Так как x может принимать любые значения, то эта функция непрерывна для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

105. Исследовать на непрерывность функцию $y=x^2$.

Решение. Пусть приращение аргумента x равно Δx; тогда функция y получит какое-то приращение Δy. Имеем

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

откуда

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x+\Delta x).$$

Очевидно, что при любом фиксированном значении x и при Δx, стремящемся к нулю, Δy также стремится к нулю, т. е. функция $y=x^2$ непрерывна при любом значении $x \in (-\infty, \infty)$.

106. Показать, что функция $y=\sin x$ непрерывна при всех x.

Решение. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Очевидно, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. функция $y=\sin x$ непрерывна при всех $x \in (-\infty, \infty)$.

107—110. Исследовать на непрерывность функции:

107. $y=2x$. **108.** $y=3x^2$.

109. $y=5x^2-2x+3$. **110.** $y=\cos x$.

Можно доказать, что каждая элементарная функция непрерывна в любой точке из ее области определения.

Так, например, функция $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ непрерывна при всех x, кроме значений $x=2$ и $x=-2$, при которых она не существует. Функция $f(x)=\operatorname{tg} x$ непрерывна при всех значениях x, кроме $x=(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k — любое целое число.

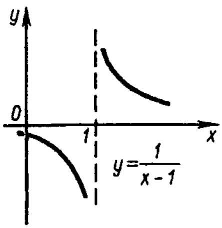


Рис. 94

Значение аргумента, при котором функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва*. На рис. 94 изображен график функции $y=\frac{1}{x-1}$, имеющий точку разрыва при $x=1$.

Примером функции, имеющей точку разрыва, является скорость тела, падающего на землю. Эта скорость, вообще говоря, есть непрерывная функция времени, но в момент удара можно считать, что она мгновенно (скачком) падает до нуля, т. е. функция скорости терпит разрыв.

111—113. Исследовать на разрыв функции:

111. $y=\frac{2}{x-5}$. **112.** $y=\frac{1}{x^2-1}$. **113.** $y=\frac{3}{x^2-2x+1}$.

Так как x_0 есть предел переменной величины x, то равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Эта формула выражает очень важное для вычисления пределов правило: если функция непрерывна, то при отыскании ее предела можно вместо аргумента подставить его предельное значение.

В дальнейшем мы будем пользоваться этим приемом, поскольку он значительно упрощает вычисления предела функции.

114. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+4x-3}{x+4}$.

Решение. При $x=1$ дробь $\frac{2x^3+4x-3}{x+4}$ определена, так как ее знаменатель отличен от нуля. Поэтому для вычисления предела достаточно заменить аргумент его предельным значением. Тогда получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+4x-3}{x+4}=\frac{2\cdot 1^3+4\cdot 1-3}{1+4}=\frac{3}{5}.$$

Указанное правило вычисления пределов нельзя применять в следующих случаях:

1) если функция при $x=a$ не определена;

2) если знаменатель дроби при подстановке $x=a$ оказывается равным нулю;

3) если числитель и знаменатель дроби при подстановке $x=a$ одновременно оказываются равными нулю или бесконечности.

В таких случаях пределы функций находят с помощью различных искусственных приемов.

115. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3-x}$.

Решение. Здесь непосредственный переход к пределу невозможен, поскольку предел делителя равен нулю: $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)=3-3=0$. Предел делимого также равен нулю: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=9-9=0$. Значит, имеем неопределенность вида 0/0. Однако отсюда не следует, что данная функция не имеет предела; для его нахождения нужно предварительно преобразовать функцию, разделив числитель и знаменатель на выражение $x-3$:

$$\frac{x^2-9}{3-x}=\frac{(x-3)(x+3)}{3-x}=-\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=-(x+3).$$

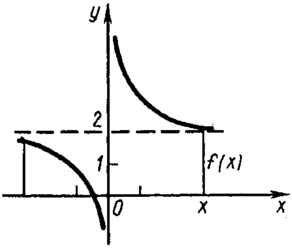


Рис. 95

Для выражения $-(x+3)$ предел при $x\to 3$ находится легко: $\lim\limits_{x\to 3}(-(x+3))= -\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=-6$.

Замечание. Сокращая дробь на $x-3$, мы полагаем, что $x\to 3$, но $x\neq 3$.

6. Предел функции на бесконечности

Определение 6. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *на бесконечности* (или при x, стремящемся к бесконечности), если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента x соответствующие значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A.

Из рис. 95 видно, что ординаты, изображающие значения функции, сколь угодно мало отличаются от числа $A=2$ для любых достаточно больших значений $|x|$.

116. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x+5}$.

Решение. При $x\to\infty$ знаменатель $x+5$ также стремится к бесконечности, а обратная ему величина $\dfrac{1}{x+5}\to 0$. Следовательно, произведение $\dfrac{1}{x+5}\cdot 3=\dfrac{3}{x+5}$ стремится к нулю, если $x\to\infty$. Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x+5}=0$.

Тождественные преобразования под знаком предела применимы не только в том случае, когда аргумент стремится к конечному пределу, но и при $x\to\infty$.

117. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель не имеют предела, так как оба неограниченно возрастают. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида ∞/∞. Разделим числитель и знаменатель почленно на x^3 (наивысшую степень x в данной дроби):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)}=2,$$

так как $1/x^2$ и $1/x^3$ при $x\to\infty$ стремятся к нулю.

Замечание. Прием деления числителя и знаменателя дроби на наивысшую степень переменной x, применяемый при раскрытии неопределенности вида ∞/∞, нельзя использовать для нахождения пределов функций, не приводящих к неопределенности указанного вида.

7. Замечательные пределы

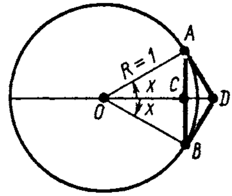


Рис. 96

Некоторые пределы невозможно найти теми способами, которые были изложены выше. Пусть например, требуется найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Непосредственная подстановка вместо аргумента его предела дает неопределенность вида 0/0. Невозможно также преобразовать числитель и знаменатель таким образом, чтобы выделить общий множитель, предел которого равен нулю.

Поступим следующим образом. Возьмем круг с радиусом, равным 1, и построим центральный угол AOB, равный $2x$ радианам (рис. 96). Проведем хорду AB и касательные AD и BD к окружности в точках A и B. Очевидно, что $|AC|=|CB|=\sin x$, $|AD|=|DB|=\operatorname{tg} x$ и $\smile AB=2x$, так как угол x измеряется в радианах. Учитывая, что дуга AB больше хорды AB и что ломаная ADB больше дуги AB, можем записать:

$$|AB|<\smile AB<|AD|+|DB|, \text{ или } 2\sin x<2x<2\operatorname{tg} x.$$

Разделив все члены этого неравенства на положительную величину $2\sin x$, получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}, \text{ или } 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Если $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Таким образом, переменная величина $\frac{\sin x}{x}$ заключена между единицей и величиной, стремящейся к единице. Следовательно, и она стремится к единице, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \quad (1)$$

Этот предел называют *первым замечательным пределом.*

118. Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$.

Решение. Приведем этот предел к виду (1). Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на 2, а постоянный множитель 2 вынесем на знак предела. Имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin 2\alpha}{2\alpha}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}.$$

Учитывая, что если $\alpha\to 0$, то и $2\alpha\to 0$, получим

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}=2\lim_{2\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1=2.$$

Если $x\to\infty$, то имеет место соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2{,}7182..., \quad (2)$$

которое называется *вторым замечательным пределом.* Доказательство его справедливости приводится в подробных курсах математического анализа.

Число e в математике имеет важное значение. Логарифмы при основании e называют *натуральными* и для них употребляют обозначение ln. Итак, $\ln x = \log_e x$. Например, $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

119. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x} = \frac{1}{e}.$$

8. Вычисление пределов

Сначала рассмотрим примеры непосредственного нахождения предела функции в точке.

120. Найти $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)$.

Решение. Для нахождения предела данной функции заменим аргумент x его предельным значением:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4) = 3^2-7\cdot 3+4 = -8.$$

121. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Решение. Проверим, не обращается ли знаменатель дроби в нуль при $x=2$: имеем $2^2+2\cdot 2+8=16\neq 0$. Подставив предельное значение аргумента, находим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8} = \frac{2^2+2+2}{2^2+2\cdot 2+8} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь такие примеры, когда применение свойств предела становится возможным лишь после некоторых предварительных преобразований.

122. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$.

Решение. Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, получим

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x} = \frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} =$$

$$= \frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} = \frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})} =$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0} 2}{5\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

123. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность типа 0/0. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и до перехода к пределу сократим дробь на множитель $x-2$. В результате получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=2.$$

Итак, чтобы найти предел частного двух функций, где пределы делимого и делителя равны нулю, нужно преобразовать функцию таким образом, чтобы выделить в делимом и делителе сомножитель, предел которого равен нулю, и, сократив дробь на этот сомножитель, найти предел частного.

124. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$.

Решение. Непосредственная подстановка $x=-2$ показывает, что имеет место неопределенность вида 0/0. Разложив числитель на множители и сократив дробь, находим

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2}.$$

Здесь предел делителя равен нулю. Таким образом, знаменатель дроби неограниченно убывает и стремится к нулю, а числитель приближается к -1. Ясно, что вся дробь неограниченно растет, что условно записывается так: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}=\infty$.

125—130. Найти пределы:

125. $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-6x+7)$. **126.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

127. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$. **128.** $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}$.

129. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$. **130.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

Перейдем к примерам нахождения предела функции на бесконечности.

131. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}$.

Решение. При $x\to\infty$ имеем неопределенность вида ∞/∞. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на x^3. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{2}{3},$$

так как $3/x$, $5/x^2$, $7/x^3$, $4/x$, $1/x^2$, $2/x^3\to 0$ при $x\to\infty$.

132—133. Найти пределы:

132. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+8}{2x^3-x+1}$. **133.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}$.

134. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на x^3 и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\infty,$$

поскольку числитель последней дроби стремится к пределу, отличному от нуля, а знаменатель — к нулю.

135. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

Решение. При стремлении аргумента x к бесконечности имеем неопределенность вида ∞/∞. Чтобы раскрыть ее, разделим числитель и знаменатель дроби на x. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}=1,$$

так как $4/x^2\to 0$ при $x\to\infty$.

136. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Решение. Предельный переход при $x\to\infty$ всегда можно заменить предельным переходом при $\alpha\to 0$, если положить $\alpha=1/x$ (способ замены переменной).

Так, полагая в данном случае $x=1/\alpha$, найдем, что $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-2x+3}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-2\cdot\frac{1}{\alpha}+3}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1-2\alpha+3\alpha^2}{\alpha^2}}}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3}{\sqrt{1-2\alpha+3\alpha^2}}=\frac{3}{1}=3.$$

137. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2}$.

Решение. I способ. Разделив числитель и знаменатель на x^2, находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{1}=3.$$

II способ. Положим $x=1/\alpha$; тогда $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$. Значит,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{\alpha^2}+5\cdot\frac{1}{\alpha}+1}{\frac{1}{\alpha^2}-2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3+5\alpha+\alpha^2}{1-2\alpha^2}=3.$$

138—141. Найти пределы:

138. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+5}{3x^3+7x+1}$. **139.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+8\cos x}{x}$.

140. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+8x-1}{x^5+7x^3+11}$ **141.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+\cos 2x}{2x+5}$.

142. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

Решение. Здесь требуется найти предел разности двух величин, стремящихся к бесконечности (неопределенность вида $\infty-\infty$). Умножив и разделив данное выражение на сопряженное ему, получим

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$$

Рассмотрим примеры, в которых используются замечательные пределы.

143. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$ (k — постоянная величина).

Решение. Произведем подстановку $kx=y$. Отсюда следует, что $y\to 0$ при $x\to 0$, а $x=y/k$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y/k}=\lim_{y\to 0}\frac{k\sin y}{y}=k\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=k,$$

так как $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

144. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{x}}{\frac{\sin lx}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin lx}{x}}=\frac{k}{l}.$$

Здесь мы разделили числитель и знаменатель дроби на x (это можно сделать, так как $x\to 0$, но $x\neq 0$), а затем воспользовались результатом предыдущего примера.

145. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$.

Решение. Преобразуем числитель к виду $1-\cos 8x=2\sin^2 4x$. Далее, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{\sin 4x}{x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4\cdot 4=16.$$

146. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. I способ. Здесь имеет место неопределенность вида 0/0. Применяя известную тригонометрическую формулу и выполняя элементарные преобразования, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x/2}=\frac{1}{2}.$$

II способ. Преобразуем числитель следующим образом:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=$$
$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

147. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Заменив $\operatorname{tg} x$ на $\sin x/\cos x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3}{\cos x}\right)=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos x}=1\cdot 3=3.$$

148—153. Найти пределы:

148. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

149. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 17x}{8x}$.

150. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$.

151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

152. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$.

153. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

154. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right)^{6}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right)^{6}.$$

Положим $x/2=y$. Тогда при неограниченном возрастании x переменная y также будет неограниченно возрастать. Поэтому, используя второй замечательный предел, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=$ $=e$. Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=e^{6}$.

155. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x}$.

Решение. Запишем основание степени в виде $\frac{3+x}{3}=1+\frac{x}{3}$, а показатель степени — в виде $\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{3}{3}=\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x}=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3/x\cdot 1/3}=\left(\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3/x}\right)^{1/3}=e^{1/3}=\sqrt[3]{e}.$$

156. Найти $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{\frac{x}{e}-1}=$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{z\to 0}\frac{\ln(z+1)}{z}=\frac{1}{e}\cdot 1=\frac{1}{e}\quad\left(\text{здесь }\frac{x}{e}-1=z\right).$$

157—160. Найти пределы:

157. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$. **158.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$.

159. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$. **160.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{3x}$.

§ 3. Производная

Задачи, приводящие к понятию производной
Определение производной
Общее правило нахождения производной
Частное значение производной
Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

1. Задачи, приводящие к понятию производной

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Ее решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков — И. Ньютона и Г. В. Лейбница.

Ньютон пришел к открытию дифференциального исчисления при решении задач о скорости движения материальной точки в данный момент времени (мгновенной скорости).

Как известно, *равномерным движением* называют такое движение, при котором тело в равные промежутки времени проходит равные по длине отрезки пути. Путь, пройденный телом в единицу времени, называют *скоростью* равномерного движения.

Однако чаще всего на практике мы имеем дело с неравномерным движением. Автомобиль, едущий по дороге, замедляет движение у переходов и ускоряет его на тех участках, где путь свободен; самолет снижает скорость при приземлении и т. д. Поэтому чаще всего нам приходится иметь дело с тем, что за равные отрезки времени тело проходит различные по длине отрезки пути. Такое движение называют *неравномерным*. Его скорость нельзя охарактеризовать одним числом. Так, например, при свободном падении тела оно за 1-ю секунду пройдет путь $s_1=\frac{gt^2}{2}=\frac{g\cdot 1^2}{2}\approx 4{,}9$ (м), а за 2-ю секунду — путь $s_2=\frac{g\cdot 2^2}{2}-s_1\approx 14{,}7$ (м)

Часто для характеристики неравномерного движения пользуются понятием *средней скорости* движения за время Δt, которое определяется соотношением

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs — путь, пройденный телом за время Δt.

Так, при свободном падении тела средняя скорость его движения за первые две секунды есть

$$v_{\text{ср}}=\frac{14{,}7+4{,}9}{2}\approx 9{,}8 \text{ (м/с)}.$$

Практически такая характеристика движения, как средняя скорость, говорит о движении очень мало. Действительно, при свободном падении тела средняя скорость за 1-ю секунду равна 4,9 м/с, а за 2-ю — 14,7 м/с, в то время как средняя скорость за первые две секунды составляет 9,8 м/с. Средняя скорость в течение первых двух секунд не дает никакого представления о том, как происходило движение: когда тело двигалось быстрее, а когда медленнее. Если же задать средние скорости движения для каждой секунды в отдельности, то мы будем знать, например, что во 2-ю секунду тело двигалось значительно быстрее, чем в 1-ю. Однако в большинстве случаев и такая характеристика нас мало устраивает. Ведь нетрудно понять, что в течение этой 2-й секунды тело также движется по-разному: в начале медленнее, в конце быстрее. А как оно движется где-то в середине этой 2-й секунды? Иными словами, как определить мгновенную скорость?

Пусть движение тела описывается законом $s=f(t)$. Рассмотрим путь, пройденный телом за время от t_0 до $t_0+\Delta t$, т. е. за время, равное Δt. В момент t_0 телом пройден путь $f(t_0)$, в момент $t_0+\Delta t$ — путь $f(t_0+\Delta t)$. Поэтому за время Δt тело прошло путь $f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ и средняя скорость движения тела за этот промежуток времени составит

$$v_{\text{ср}}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Чем меньше промежуток времени Δt, тем точнее можно установить, с какой скоростью движется тело в момент t_0, так как движущееся тело не может значительно изменить скорость за малый промежуток времени. Поэтому средняя скорость $v_{\text{ср}}$ при стремлении Δt к нулю приближается к действительной скорости движения и в пределе дает скорость движения v в данный момент времени t_0 (мгновенную скорость).

Таким образом,

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Определение 1. *Мгновенной скоростью* прямолинейного движения тела в данный момент времени t_0 называется предел средней скорости за время от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда промежуток времени Δt стремится к нулю.

Итак, чтобы найти скорость прямолинейного неравномерного движения в данный момент, нужно найти предел отношения приращения пути $\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ к приращению времени Δt при условии $\Delta t\to 0$, т. е.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}v_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Замечание. Эта же формула обобщается и на случай криволинейного движения, однако в этом случае помимо величины нужно учитывать также и направление скорости.

161. Определить среднюю скорость за промежуток времени $2\leqslant t\leqslant 2+\Delta t$, если закон движения задан формулой $s=t^2-t+1$, где t — время в секундах, s — расстояние в метрах. Вычислить среднюю скорость для следующих значений Δt: $\Delta t=0{,}1$; $\Delta t=0{,}01$; $\Delta t=0{,}001$; $\Delta t=0{,}0001$. Найти мгновенную скорость для момента $t=2$.

Решение. 1°. Имеем $v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$; $v_{\text{мгн}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

2°. Найдем путь, пройденный за время Δt:

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)=((t+\Delta t)^2-(t+\Delta t)+1)-(t^2-t+1)=$$
$$=2t\Delta t+(\Delta t)^2-\Delta t=(2t-1)\Delta t+(\Delta t)^2.$$

3°. Определим среднюю скорость:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=2t-1+\Delta t.$$

4^0. Результаты произведенных расчетов занесем в таблицу:

t	Δt	$2t-1$	$v_{ср}$
2	0,1	3	3,1
2	0,01	3	3,01
2	0,001	3	3,001
2	0,0001	3	3,0001

5^0. Из этой таблицы видно, что при $t=2$ по мере приближения Δt к нулю средняя скорость $v_{ср}$ стремится к мгновенной скорости, равной 3 м/с. Действительно,

$$v_{мгн}=\lim_{\Delta t\to 0} v_{ср}=\lim_{\Delta t\to 0}(2t-1+\Delta t)=(2t-1)|_{t=2}=3 \text{ (м/с)}.$$

162. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s=\frac{1}{2}t^2-3t+2$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти скорость движения точки в момент времени $t=3$.

163. Найти скорость равномерно ускоренного движения, заданного уравнением $s=\frac{gt^2}{2}$, в момент времени t (g — ускорение силы тяжести, постоянная величина для данной местности).

Лейбниц пришел к открытию дифференциального исчисления при решении задачи о построении касательной к любой кривой, заданной своим уравнением.

Решение этой задачи имеет большое значение. Ведь скорость движущейся точки направлена по касательной к ее траектории, поэтому определение скорости снаряда на его траектории, скорости любой планеты на ее орбите сводится к определению направления касательной к кривой.

Что же называется касательной к кривой в данной точке?

Дело в том, что определение касательной как прямой, имеющей с кривой только одну общую точку, справедливое для окружности, непригодно для многих других кривых. Например, синусоида $y=\sin x$ имеет только одну общую точку с любой прямой, параллельной оси Oy, но ни одну из этих прямых нельзя назвать касательной к синусоиде, так как это противоречило бы представлению о касательной как о такой прямой, с которой кривая в точке касания имеет одинаковое направление. Изображенная на рис. 97 касательная к кривой в точке M одновременно является и секущей, поскольку она имеет с кривой две общие точки M и N. Следует дать такое определение касательной к кривой, которое не только соответствовало бы интуитивному представлению о ней, но и позволило бы фактически находить ее направление, т. е. вычислять угловой коэффициент касательной.

Определение 2. *Касательной* к кривой в точке M (рис. 98) называется прямая MT, которая является предельным положением секущей MM_1, когда точка M_1, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке M.

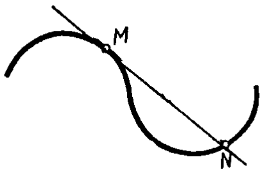


Рис. 97

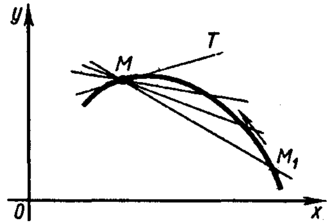


Рис. 98

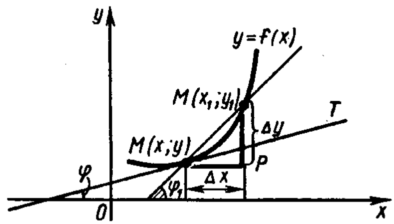


Рис. 99

Пусть дан график непрерывной функции $y=f(x)$ (рис. 99). Возьмем на кривой $y=f(x)$ точки $M(x;\,y)$ и $M_1(x_1;\,y_1)$, где $x_1=$ $=x+\Delta x$, $y_1=y+\Delta y$ (Δx — приращение аргумента, Δy — приращение функции). Проведем секущую MM_1, угловой коэффициент которой обозначим через k_1, т. е. $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1$. Из треугольника MM_1P находим

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Предположим, что точка M остается неподвижной, а точка M_1, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к M. Тогда:

1) секущая MM_1 поворачивается вокруг точки M, приближаясь к положению касательной;

2) $x_1\to x$, а следовательно, $\Delta x=(x_1-x)\to 0$;

3) угол φ_1 стремится к углу φ между касательной и осью Ox.

Пусть k — угловой коэффициент касательной, т. е. $k=\operatorname{tg}\varphi$. Так как $\operatorname{tg}\varphi_1$ — непрерывная функция (случай, когда $\varphi_1=\pi/2$, пока исключим из рассмотрения), то

$$\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\varphi_1\to\varphi}\operatorname{tg}\varphi_1=\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Итак, угловой коэффициент касательной определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Выразив угловой коэффициент касательной через значения аргументов $x+\Delta x$, x и соответствующие им значения функций, получим

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

164. Дана функция $f(x)=x^2-1$. Найти уравнение касательной к ее графику при $x=1$.

Решение. 1^0. Сначала найдем ординату точки касания: $f(1)=1^2-1=0$. Следовательно, $(1; 0)$ — точка касания.

2^0. Составим уравнение прямой, проходящей через точку $(1; 0)$. Для этого воспользуемся известным из аналитической геометрии уравнением $y-y_1=k(x-x_1)$, где $(x_1; y_1)$ — найденная точка $(1; 0)$. Тогда получим $y=k(x-1)$.

3^0. Чтобы составить уравнение касательной, нужно найти значение углового коэффициента $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left.\frac{\Delta y}{\Delta x}\right|_{x=1}$. Так как

$$\Delta y=\Delta f(x)=((x+\Delta x)^2-1)-(x^2-1)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-1-x^2+1=$$
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Следовательно, $k=2x|_{x=1}=2\cdot 1=2$.

4^0. Итак, уравнение касательной имеет вид

$$y=2(x-1),\text{ т. е. } y=2x-2 \text{ или } 2x-y-2=0.$$

165. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2$ при $x=-1$.

166. Найти тангенс угла наклона касательной к кривой $y=x^2+5x-2$ в точке $(1; 4)$.

167. Составить уравнение касательной к кривой $y=x^2-3x+4$ в точке $(3; 4)$.

2. Определение производной

Заметим, что при определении касательной к кривой и мгновенной скорости неравномерного движения, по существу, выполняются одни и те же математические операции:

1^0. Заданному значению аргумента дают приращение и вычисляют новое значение функции, соответствующее новому значению аргумента.

2^0. Определяют приращение функции, соответствующее выбранному приращению аргумента.

3^0. Приращение функции делят на приращение аргумента.

4^0. Вычисляют предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

К предельным переходам такого типа приводят решения многих задач. Возникает необходимость сделать обобщение и дать название этому предельному переходу.

Пусть величины x и y связаны функциональной зависимостью $y=f(x)$. Напомним, что приращением функции, соответствующим приращению аргумента Δx, называют разность $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

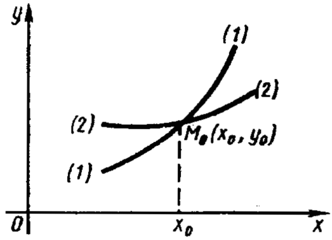


Рис. 100

Основной вопрос, который возникает при изучении функциональной зависимости $y=f(x)$, можно сформулировать так: с какой скоростью изменяется величина y при изменении величины x? Иначе говоря, как быстро «реагирует» функция y на изменения аргумента x? На рис. 100 изображены графики функций (1) и (2) для которых $M_0(x_0;\ y_0)$ — общая точка. Очевидно, что в точке x_0 функция (1) реагирует на изменения аргумента быстрее, чем функция (2): ее график круче поднимается (при увеличении аргумента), а также круче опускается (при уменьшении аргумента), чем график функции (2).

Хотя поставленный выше вопрос кажется интуитивно ясным, тем не менее необходимо четко определить, что именно следует понимать под скоростью изменения функций в точке.

Рассмотрим, например, две функции $y=x^2$ и $y=x^4$ и найдем приращения, которые они получают при изменении x от 1 до 3 ($\Delta x=2$).

Для функции $y=x^2$ находим, что $\Delta y=y_2-y_1=3^2-1^2=8$, а для функции $y=x^4$ — что $\Delta y=y_2-y_1=3^4-1^4=80$. Следовательно, функция $y=x^4$ изменяется гораздо быстрее, чем функция $y=x^2$.

Скорость изменения функции в зависимости от изменения аргумента можно, очевидно, охарактеризовать отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Это отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью* изменения функции на отрезке от x до $x+\Delta x$. Так как нас обычно интересует скорость изменения функции не на всем отрезке длины Δx, а именно при данном значении аргумента x, которое соответствует началу отрезка, то, очевидно, мы должны брать Δx все меньшим и меньшим, т. е. устремить его к нулю; иначе говоря, нужно рассмотреть предел дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Предел этого отношения при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует) представляет собой некоторую новую функцию от x. Эту функцию обозначают символами y', $f'(x)$, y'_x или $\frac{dy}{dx}$ и называют *производной* данной функции $y=$

$=f(x)$, так как она получена (произведена) из функции $y=f(x)$. Сама же функция $y=f(x)$ называется *первообразной* функцией по отношению к своей производной $y'=f'(x)$.

Определение 3. *Производной* функции $y=f(x)$ в данной точке x называют предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, т. е.

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

3. Общее правило нахождения производной

Операцию отыскания производной некоторой функции называют *дифференцированием* функции, а раздел математики, изучающий свойства этой операции, — *дифференциальным исчислением.*

Если функция имеет производную в точке $x=a$, то говорят, что она *дифференцируема в* этой *точке.* Если функция имеет производную в каждой точке данного промежутка, то говорят, что она *дифференцируема на* этом *промежутке.*

Определение производной не только с исчерпывающей полнотой характеризует понятие скорости изменения функции при изменении аргумента, но и дает способ фактического вычисления производной данной функции. Для этого необходимо выполнить следующие четыре действия (четыре шага), указанные в самом определении производной:

1^0. Находят новое значение функции, подставив в данную функцию вместо x новое значение аргумента $x+\Delta x$:

$$y_н=f(x+\Delta x)=y+\Delta y.$$

2^0. Определяют приращение функции, вычитая данное значение функции из ее нового значения:

$$\Delta y=y_н-y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

3^0. Составляют отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

4^0. Переходят к пределу при $\Delta x\to 0$ и находят производную:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Вообще говоря, производная — это «новая» функция, произведенная от данной функции по указанному правилу.

168. Найти производную функции $y=5x$.

Решение. 1^0. $y_н=5(x+\Delta x)=5x+5\Delta x$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=(5x+5\Delta x)-5x=5\Delta x$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5\Delta x}{\Delta x}=5$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}5=5$.

Следовательно, $(5x)'=5$.

169. Найти производную функции $y=3x$.

170. Продифференцировать функцию $y=x^2$.

Решение. 1^0. $y_н=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x}{\Delta x}+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

Таким образом, $(x^2)'=2x$.

171. Продифференцировать функцию $y=x^3$.

172. Найти производную функции $y=x^2+x$.

Решение. 1^0. $y_н=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+x+\Delta x$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+x+\Delta x)-(x^2+x)=x^2+2x\Delta x+$ $+(\Delta x)^2+x+\Delta x-x^2-x=2x\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=2x+\Delta x+1$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+1)=2x+1$.

Значит, $y'=2x+1$.

173. Найти производную функции $y=x^2-x$.

174. Найти производную функции $y=x^2-3x+5$.

Решение. 1^0. $y_н=(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+5=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-$ $-3x-3\Delta x+5$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=(x^2+2x\Delta x)+(\Delta x)^2-3x+3\Delta x+5)-(x^2-3x+5)=$ $=2x\Delta x+(\Delta x)^2-3\Delta x$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=2x+\Delta x-3$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-3)=2x-3$.

Итак, $(x^2-3x-5)'=2x-3$.

175. На кривой $y=x^2-3x+5$ найти точку, в которой ордината y возрастает в 5 раз быстрее, чем абсцисса x.

Решение. Находим производную $y'=2x-3$ (см. решение предыдущего примера). Так как производная характеризует скорость изменения ординаты y по сравнению с изменением абсциссы x, то из условия $y'=2x-3=5$ находим абсциссу искомой точки: $x=4$. Ординату находим из уравнения кривой: $y=4^2-3\cdot 4+5=9$. Итак, (4; 9) — искомая точка.

176. Даны функции $f(x)=x^2-x$ и $g(x)=x^2+x$. Требуется установить: а) при каком значении аргумента функция $f(x)$ возрастает в 2 раза быстрее, чем $g(x)$; б) существует ли такое значение x, при котором функции изменяются с одинаковой скоростью?

Решение. а) Находим производные данных функций: $f'(x)=2x-1$ и $g'(x)=2x+1$ (см. решения примеров 172 и 173). Согласно условию, должно выполняться равенство $2x-1=2(2x+1)$; решая это уравнение, находим $x=-3/2$.

б) Так как уравнение $2x-1=2x+1$ не имеет действительных корней, то на поставленный вопрос получаем отрицательный ответ.

4. Частное значение производной

Чтобы вычислить частное значение производной, нужно в общее выражение производной вместо x подставить его числовое значение $x=x_0$, т. е. вычислить значение $f'(x_0)$.

177. Найти производную функции $y=2x^3-x^2+5$ в точке $x=2$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции в общем виде, т. е. в произвольной точке x:

1^0. $y_н=y+\Delta y=2(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2+5=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+$ $+2(\Delta x)^3-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2+5$.

2^0. $\Delta y=6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-2x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2$.

3^0. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2-2x-\Delta x$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6x^2+6x\cdot\Delta x+2(\Delta x)-2x-\Delta x)=6x^2-2x$.

5^0. Подставив теперь в равенство $y'=6x^2-2x$ значение $x=2$, находим $y'_{x=2}=20$.

178. Найти $y'_{x=0,5}$, если $y=x^2-x$.

179. Найти $y'_{x=0}$, если $y=x^2-3x+5$.

180. Найти $y'_{x=2}$, если $y=-3/x$.

181. Найти $y'_{x=-1}$, если $y=1/x$.

182. Найти $y'_{x=2}$, если $y=1/x^2$.

183. Дана функция $y=\sqrt{x}$. Найти $y'_{x=9}$.

Решение. 1^0. $y_н=\sqrt{x+\Delta x}$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$.

3^0. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5^0. $y'_{x=9}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=9}=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$.

184. Найти $y'_{x=3}$, если $y=\sqrt{x+1}$.

185. Найти $y'_{x=3\sqrt{3}}$, если $y=\sqrt[3]{x}$.

186. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y=\sin 3x$ в точке $x=\pi/9$.

Решение. Дадим некоторому значению x приращение Δx; тогда функция y получит приращение

$$\Delta y = \sin(3(x+\Delta x)) - \sin 3x = 2\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\sin\frac{3\Delta x}{2}.$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}\right)=$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x} = 2\cos 3x\cdot\frac{3}{2} = 3\cos 3x.$$

Итак, $(\sin 3x)' = 3\cos 3x$.
Подставив вместо аргумента его значение $x=\pi/9$, получим

$$y'(\pi/9) = 3\cos\frac{\pi}{3} = 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

187. Найти $y'_{x=\pi/4}$, если $y=\cos x$.

188. Найти $y'_{x=2\pi/3}$, если $y=\sin x$.

5. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Поставим следующий вопрос: все ли функции имеют производную или только некоторые? Чтобы ответить на него, рассмотрим функцию $y=f(x)$. Производная этой функции определяется формулой $f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если указанный предел существует. Для существования этого предела необходимо, чтобы $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$ (в противном случае будет иметь место деление на нуль, что невозможно); отмеченное условие является условием непрерывности функции в данной точке. Отсюда вытекает следующее утверждение.

▲ **Теорема.** *Если функция дифференцируема в данной точке, то в этой точке она непрерывна.*

Из этой теоремы следует, что в точке разрыва $x=x_0$ (рис. 101) функция не может иметь производную, так как в этой точке приращение Δy равно конечной величине при $\Delta x\to 0$. В дальнейшем будет показано, что утверждение, обратное приведенной теореме, неверно. Если в какой-либо точке данная функция

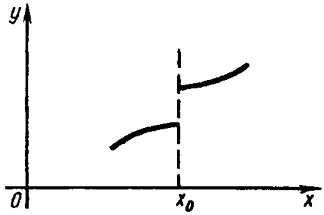


Рис. 101

$y = f(x)$ является непрерывной, то она может и не иметь производной в этой точке.

Все функции, рассматриваемые в дальнейшем, будем считать дифференцируемыми.

189. Показать, что в точке $x = \pi/2$ функция $y = \operatorname{tg} x$ не имеет производной.

Решение. В точке $x = \pi/2$ функция $\operatorname{tg} x$ не существует, т. е. не выполняется условие непрерывности функции; значит, в этой точке функция не имеет производной.

190. Почему в точке $x = 0$ функция $y = \ln x$ не имеет производной?

§ 4. Правила и формулы дифференцирования элементарных функций

1. Таблица правил и формул дифференцирования

Определение производной по формуле $f'_x = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ четко указывает действия, которые нужно выполнить для ее нахождения, что позволяет непосредственно вычислять производную любой элементарной функции. Необходимо хорошо овладеть непосредственным дифференцированием, поскольку оно позволяет вывести основные правила и формулы дифференцирования. Эти правила и формулы следует обязательно знать, чтобы не повторять все выкладки при нахождении производной данной функции. Ведь существует бесконечное множество функций и с их усложнением непосредственное дифференцирование становится все более трудоемким.

Поэтому целесообразно вывести формулы производных для основных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических) и сформулировать правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций, а также правило дифференцирования сложной функции, т. е. функции от функции.

Это позволит находить производные всех элементарных функций, которые могут быть получены из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Прежде чем доказывать правила и формулы дифференцирования, сведем их в таблицу и в дальнейшем будем пользоваться ею, подобно тому как в арифметике пользуются таблицей умножения.

Правила дифференцирования

I. $C'=0$, C — постоянная. II. $(x)'=1$.

III. $(u+v-w)'=u'+v'-w'$. IV. $(uv)'=u'v+v'u$.

V. $(Cu)'=Cu'$, C — постоянная. VI. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

VII. $y'_x=y'_u u'_x$.

Формулы дифференцирования

	Основные элементарные функции	*Сложные функции*
VIII.	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$.	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$.
IX.	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$,	$(\log_a u)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$.
X.	$(x^n)'=nx^{n-1}$,	$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$.
XI.	$(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,	$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.
XII.	$(a^x)'=a^x\cdot\ln a$,	$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$.
	$(e^x)'=e^x$,	$(e^u)'=e^u\cdot u'$
XIII.	$(\sin x)'=\cos x$,	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.
XIV.	$(\cos x)'=-\sin x$,	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.
XV.	$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$,	$(\operatorname{tg} u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.
XVI.	$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$,	$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.
XVII.	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.
XVIII.	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.
XIX.	$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$,	$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.
XX.	$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$,	$(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

2. Правила дифференцирования алгебраической суммы, произведения и частного

Производная постоянной. Пусть дана постоянная функция $y=C$. Тогда ее приращение $\Delta y=C-C=0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, т. е.

$$C'=0.$$

Итак, *производная постоянной равна нулю.*

Например, $(12)'=0$; $(\pi)'=0$; $(\ln 2)'=0$.

Производная независимой переменной. Пусть дана функция $y=x$. Найдем ее производную по общему правилу.

1^0. Так как $y=x$, то $y_{н}=x+\Delta x$.

2^0. Имеем $\Delta y=y_{н}-y=(x+\Delta x)-x=\Delta x$, т. е. приращение функции равно приращению аргумента.

3^0. Находим $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1$, как предел постоянной величины.

Следовательно,

$$x'=1,$$

т. е. *производная функции $y=x$ равна единице.*

Производная алгебраической суммы. Пусть дана функция $y=f(x)$, которую можно представить в виде алгебраической суммы слагаемых u, v, w, имеющих производную в точке x, т. е. $y=u+v-w$. Найдем производную y' по общему правилу.

1^0. Дадим аргументу приращение Δx; тогда функции y, u, v и w получат соответствующие приращения Δy, Δu, Δv и Δw, т. е.

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w).$$

2^0. $\Delta y=((u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w))-y$;

$\Delta y=((u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w))-(u+v-w)$;

$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w$.

3^0. Разделим обе части последнего равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

4^0. Переходя к пределу $\Delta x\to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x};$$

$$y'=u'+v'-w';\ (u+v-w)'=u'+v'-w'.$$

Очевидно, что полученную формулу можно обобщить на любое число слагаемых: *производная алгебраической суммы* *конечного числа слагаемых равна алгебраической сумме производных этих слагаемых.*

Производная произведения. Пусть дана функция $y=uv$, где u и v — дифференцируемые функции.

Следуя общему правилу нахождения производной, находим:

1^0. $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$.

2^0. $\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv$;

$\Delta y=\Delta u\cdot v+\Delta v\cdot u+\Delta u\cdot\Delta v$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

4^0. Перейдем к пределу; учитывая что u и v не зависят от Δx, выносим их за знак предела:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

В последнем равенстве $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, $\lim\limits_{\Delta x}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$, так как рассматриваемые функции непрерывны. Следовательно, $y'=u'v+v'u$ или

$$(uv)'=u'v+v'u.$$

Итак, *производная произведения двух функций равна производной первого сомножителя, умноженной на второй, плюс производная второго сомножителя, умноженная на первый.*

Следствие. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной.*

Действительно, пусть дана функция $y=Cu$, где C — постоянная. Найдем ее производную по правилу дифференцирования произведения. Имеем $y'=Cu'+C'u$. Так как $C'=0$, то

$$(Cu)'=Cu'.$$

Например, $(5x)'=5(x)'=5$.

191. Дана функция $y=kx$. Найти y'.

Решение. Применив сначала правило V, а затем правило II, получим

$$(kx)'=k(x)'=k\cdot 1=k.$$

Следовательно, $(kx)'=k$, где k — постоянный множитель.

192. Найти производную функции $y=x^2$.

Решение. Представим данную функцию в виде произведения: $x^2=x\cdot x$. Используя теперь правило IV, находим

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=x'x+xx'=2x,$$

поскольку $(x)'=1$. Итак, $(x^2)'=2x$.

193. Найти производную функции $y=3x^2$.

194. Найти производную функции $y=x^3$.

Решение. Представив данную функцию в виде произведения: $x^3 = x^2 \cdot x$ и снова применяя правило IV, найдем

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + (x)' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2.$$

195. Найти производную функции $y = 5x^3$.

196. Дана функция $y = x^4$. Найти y'.

Решение. Поступаем так же, как и в примере 194:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + (x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot x + x^3 = 3x^3 + x^3 = 4x^3.$$

Если рассмотренным выше способом продифференцировать функции x^5, x^6, x^7 и т. д., то в результате получим следующую общую формулу:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Производная степени равна произведению показателей степени на степень того же основания с показателем на единицу меньше.

В дальнейшем эта формула будет доказана для любого действительного показателя.

197. Найти производную функции $y = 9x^5$.

Решение. Используя правило V и формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, получим

$$y' = (9x^5)' = 9 \cdot 5x^4 = 45x^4.$$

При навыке промежуточные записи можно пропустить:

$$(9x^5)' = 45x^4.$$

198. Найти производную функции $y = x^3 + 6x$.

Решение. В правой части имеем алгебраическую сумму дифференцируемых функций, поэтому применяем правило III:

$$(x^3 + 6x)' = (x^3)' + (6x)'.$$

Используя результаты примеров 194 и 191, получим

$$(x^3)' + (6x)' = 3x^2 + 6.$$

199. Найти производную функции $y = 5x^2 - x + 4$.

Решение. $(5x^2 - x + 4)' = (5x^2)' - (x)' + (4)' = 5(x^2)' - 1 = 10x - 1$.

200—214. Найти производные следующих функций:

200. $y = 3x^{-2}$. **201.** $y = 4x^{-3}$. **202.** $y = 2x^{1/3}$.

203. $y = 2x^{1/4}$. **204.** $y = 3x^{-2/3}$. **205.** $y = 5x^{-3/5}$.

206. $y = 5\sqrt[5]{x^2}$. **207.** $y = 3\sqrt[3]{x}$. **208.** $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

209. $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$. **210.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$. **211.** $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$.

212. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}$. **213.** $y = \dfrac{6\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. **214.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$.

215. Найти $f'(1/2)$, если $f(x) = 1/x^4$.

216. Найти $f'(27)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$.

217. Найти $f'(-1)$, если $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$.

218. Найти $f'(0,5)$, если $f(x) = -x^3 + 9x^2 - x + 2$.

219. Найти производную функции $y = 1/x^3$.

Решение. Используя степень с отрицательным показателем, преобразуем данную функцию к виду $1/x^3 = x^{-3}$. Тогда получим

$$(1/x^3)' = (x^{-3})' = -3x^{-3-1} = -3x^{-4} = -3 \cdot \frac{1}{x^4} = -\frac{3}{x^4}.$$

220. Продифференцировать функцию $y = 2x^3(x^6 - 1)$.

Решение. I способ. Используя правило IV, получим

$$(2x^3(x^6 - 1))' = (2x^3)'(x^6 - 1) + (x^6 - 1)' \cdot 2x^3 = 6x^2(x^6 - 1) + 6x^5 \cdot 2x^3 =$$
$$= 6x^8 - 6x^2 + 12x^8 = 18x^8 - 6x^2 = 6x^2(3x^6 - 1).$$

II способ. Предварительно преобразуем данную функцию: $2x^3(x^6 - 1) = 2x^9 - 2x^3$. Тогда получим

$$y' = (2x^9 - 2x^3)' = 18x^8 - 6x^2 = 6x^2(3x^6 - 1).$$

221. Продифференцировать функцию $y = (x^2 + 2)(2x + 1)$.

Решение. I способ. Воспользуемся правилом IV при $u = x^2 + 2$, $v = 2x + 1$. Имеем

$$y' = (x^2 + 2)'(2x + 1) + (2x + 1)'(x^2 + 2) = 2x(2x + 1) + 2(x^2 + 2) =$$
$$= 4x^2 + 2x + 2x^2 + 4 = 6x^2 + 2x + 4.$$

II способ. Сначала перемножим выражения в скобках, а затем найдем производную:

$$((x^2 + 2)(2x + 1))' = (2x^3 + 4x + x^2 + 2)' = 6x^2 + 4 + 2x.$$

222—227. Найти производные следующих функций:

222. $y = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$. **223.** $f(x) = (x + 2)(2x^3 - x)$.

224. $f(t) = (t^2 + 1)(t^3 - t)$. **225.** $f(u) = (u^2 - u + 1)(2u^3 + 1)$.

226. $y = (z^2 + 1)(z^3 - 1)$. **227.** $y = (x^4 - 3)(x^2 + 2)$.

Производная частного. Пусть дана функция $y = \frac{u}{v}$, где u и v — дифференцируемые функции, причем $v \neq 0$. Следуя общему правилу нахождения производной, находим:

1^0. $y + \Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v}$.

2^0. $\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v}$, откуда после приведения к общему знаменателю находим

$$\Delta y = \frac{v \cdot \Delta u - u \cdot \Delta v}{v(v + \Delta v)}.$$

3^0. Разделим последнее равенство на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \Delta v)}.$$

4^0. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v)}.$$

Так как функции y, u и v непрерывны, то $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'$, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} = v'$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta v = 0$. Следовательно, $y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ или

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

Итак, *производная дроби равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя данной дроби, а числитель равен производной числителя данной дроби, умноженный на ее знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель.*

228. Найти производную функции $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 + 2}$.

Решение. Применяем правило VI:

$$y' = \frac{(x^2-2)'(x^2+2) - (x^2+2)'(x^2-2)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x(x^2+2) - 2x(x^2-2)}{(x^2+2)^2} =$$

$$= \frac{2x(x^2+2-x^2+2)}{(x^2+2)^2} = \frac{2x \cdot 4}{(x^2+2)^2} = \frac{8x}{(x^2+2)^2}.$$

229. Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. I способ. Применяем правило VI при $u = 1$, $v = x$. Тогда получим

$$y' = \frac{0 \cdot x - 1 \cdot 1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

II способ. Предварительно преобразуем данную функцию к виду $y = \frac{1}{x} = x^{-1}$, а затем применим формулу $(x^n) = nx^{n-1}$:

$$y' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-2} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}.$$

230—237. Найти производные следующих функций:

230. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$. **231.** $y = \frac{1 - x^5}{1 + x^5}$.

232. $y = \frac{3 - x}{x^2}$. **233.** $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

234. $y = \frac{1 + x^2}{3x}$. **235.** $y = \frac{2 + x^3}{2x}$.

236. $y = \frac{x^2 - x + 2}{x^2}$. **237.** $y = \frac{1}{1 - x^2}$.

3. Правило дифференцирования сложной функции

Сложная функция — это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция $y = \sin 3x$ является сложной. Если обозначить $3x = u$, то получим $y = \sin u$, где u — промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции $y = \cos^2 2x$ промежуточными функциями служат $u = \cos v$ и $v = 2x$.

Докажем теорему о дифференцируемости сложной функции.

▲ **Теорема.** *Если функция $f(u)$ дифференцируема по u, а $u(x)$ дифференцируема по x, то производная сложной функции $y = f(u(x))$ по независимой переменной x определяется равенством*

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

Доказательство. Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$, которая является сложной и имеет промежуточный аргумент u, зависящий от x.

По определению производной мы можем записать $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Умножив числитель и знаменатель функции, содержащейся под знаком предела, на приращение промежуточного аргумента Δu, имеем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Поскольку Δx стремится к нулю, в силу непрерывности функции $u(x)$ приращение Δu также стремится к нулю. Тогда получим

$$y' = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = y'_u u'_x,$$

т. е. *производная функции y по аргументу x равна производной этой функции по промежуточному аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u по основному аргументу x.*

Это правило иногда называют *правилом цепочки*. Оно остается справедливым и в случае, когда сложная функция состоит из любого конечного числа простых функций. Таким образом, производная сложной функции равна произведению производных от всех составляющих ее функций. При этом следует помнить, что каждую функцию нужно дифференцировать по ее собственному аргументу.

Если учесть, что производная — это скорость изменения функции при данном аргументе, то правило цепочки становится очевидным. Например, если y изменяется в 10 раз быстрее, чем $u(y'_u = 10)$, u — в 5 раз медленнее, чем $v(u'_v = 1/5)$, и v — в 4 раза быстрее, чем $x(v'_x = 4)$, то $y'_x = y'_u u'_v v'_x = 10 \cdot (1/5) \cdot 4 = 8$, т. е. y изменяется в 8 раз быстрее, чем x.

При дифференцировании сложных функций удобно ввести коэффициент сложности, указывающий количество простых функций, входящих в данную сложную функцию. Он обозначается цифрой в кружке после записи функции. Например, для функции $y=\cos 5x$ ② коэффициент сложности равен 2, так как в нее входят две простые функции $y=\cos u$ и $u=5x$. Для функции $y=\sin^2 3x$ ③ коэффициент сложности равен 3 (простыми функциями, составляющими данную, являются $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=3x$).

Очень важно правильно определить порядок следования промежуточных функций. Например, для функции $y=\ln \operatorname{tg}^2 3x$ ④, имеющей коэффициент сложности 4, промежуточные функции расположены в следующем порядке: 1) логарифмическая $\ln(\operatorname{tg}^2 3x)$; 2) степенная $(\operatorname{tg} 3x)^2$; 3) тригонометрическая $\operatorname{tg}(3x)$; 4) линейная $3x$.

Замечание. Отметим, что аргументом логарифмической функции является $\operatorname{tg}^2 3x$, т. е. все выражение, стоящее под знаком натурального логарифма; аргументом степенной функции является $\operatorname{tg} 3x$, т. е. все выражение, стоящее под знаком степени, и т. д.

238. Продифференцировать функцию $y=(x^2+3x)^5$.

Решение. Коэффициент сложности данной функции равен 2. Составляющими функции являются $y=u^5$, $u=x^2+3x$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции, находим

$$y'_x=y'_u u'_x=5(x^2+3x)^4(2x+3).$$

239. Учитывая, что $(\sin t)'=\cos t$, продифференцировать функцию $y=\sin 2x$.

Решение. Коэффициент сложности данной функции равен 2. Порядок следования промежуточных функций таков: $y=\sin u$, $u=2x$. Находим

$$y'=\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x.$$

240. Найти y', если $y=\sin^2 4x$.

Решение. Имеем $y=\sin^2 4x$ ③. Порядок следования функций: $y=u^2$; $u=\sin v$; $v=4x$. Значит,

$$y'=2\sin 4x(\sin 4x)'=2\sin 4x\cos 4x\cdot(4x)'=2\sin 4x\cos 4x\cdot 4=4\sin 8x$$

(в окончательной записи использована формула синуса двойного угла).

В дальнейшем, когда в практике дифференцирования накопится достаточный опыт, можно обходиться без промежуточных записей.

Например, если $y=\sin(x^2+1)$, то $y'=\cos(x^2+1)\cdot 2x=2x\cos(x^2+1)$.

241—246. Найти производные следующих функций:

241. $y=(9-x^2)^4$. **242.** $y=(x^4-x-1)^4$.

243. $y=\sqrt{x^3+1}$. **244.** $y=\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$.

245. $y=\sin 5x$. **246.** $y=\sin^2 3x$.

247. Учитывая, что $(\cos t)'=-\sin t$, найти производную функции $y=2\cos 5x$.

248. Найти y', если $y=\cos^3 2x$.

4. Дифференцирование логарифмических функций

Производные функций $y=\ln x$ и $y=\ln u$, где $u=f(x)$.

Выведем формулу дифференцирования логарифмической функции $y=\ln x$. Областью определения этой функции является интервал $(0, \infty)$. Найдем производную по общему правилу дифференцирования:

1^0. Дадим аргументу x приращение Δx; тогда y получит приращение Δy.

2^0. Найдем приращение функции:

$$
\begin{array}{r}
-\ y+\Delta y=\ln(x+\Delta x) \\
y=\ln x \\
\hline
\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x
\end{array}
$$

$$\Delta y=\ln\frac{x+\Delta x}{x};\quad \Delta y=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

3^0. Разделив обе части последнего равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Правую часть этого равенства умножим и разделим на x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

(это можно сделать, так как $x\neq 0$).

Используя свойство логарифмов $m\ln a=\ln a^m$, можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Пусть $\frac{x}{\Delta x}=n$, откуда $\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{n}$; подставив эти выражения в последнее равенство, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

4^0. Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$; из равенства $\frac{x}{\Delta x}=n$ следует, что $n\to\infty$, когда $\Delta x\to 0$, и условие $\Delta x\to 0$ можно заменить условием $n\to\infty$. Учитывая сказанное, имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Дробь $\frac{1}{x}$ можно вынести за знак предела, поскольку значения x не зависят от n; предел логарифма функции равен логарифму предела функции, так как логарифмическая функция непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ и $\ln e=1$, находим

$$y'=\frac{1}{x},\text{ или }(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Итак, *производная функции $y=\ln x$ равна единице, деленной на аргумент.*

Выведем формулу дифференцирования функции $y=\ln u$, где $u=f(x)$.

Используя формулу дифференцирования сложной функции $y'_x=y'_u u'_x$, получаем $(\ln u)'_x=(\ln u)'_u u'_x$, т. е.

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}.$$

Производная функции $y=\ln u$ равна дроби, знаменателем которой является промежуточный аргумент, а числителем — его производная по независимой переменной x.

249—260. Найти производные следующих функций:

249. $y=\ln x^2$.

Решение. $y'=\frac{1}{x^2}\cdot(x^2)'=\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{2}{x}$.

250. $y=\ln(x^3-1)$.

Решение. $y'=\frac{1}{x^3-1}(x^3-1)'=\frac{1}{x^3-1}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{x^3-1}$.

251. $y=\ln x^3$. **252.** $y=\ln(x^2+3)$.

253. $y=\ln\sin x$.

Решение. Здесь $u=\sin x$. Тогда получим

$$y'_x=\frac{u'_x}{u}=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x.$$

254. $f(x)=\ln^3(x^2-1)$.

Решение. Имеем $f(x)=\ln^3(x^2-1)$. Порядок следования промежуточных функций таков: $f(x)=u^3$; $u=\ln v$; $v=x^2-1$. Следовательно,

$$f'(x)=3\ln^2(x^2-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\frac{6x}{x^2-1}\ln^2(x^2-1).$$

255. $y=\ln\sin 3x$. **256.** $y=\ln^2\sin 2x$.

257. $y=\ln\sin^3 5x$. **258.** $y=\ln\frac{x+2}{x-2}$.

259. $y=\ln\sqrt{2x-1}$. **260.** $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Производные функций $y=\log_a x$ и $y=\log_a u$, где $u=f(x)$.

Если дан десятичный логарифм или логарифм числа по любому другому основанию, то следует воспользоваться формулой перехода от одной системы логарифмов к другой.

Известно, что

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Если положить $b = e$, то логарифм числа по основанию a можно выразить через натуральный логарифм, а именно:

$$\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}.$$

Воспользуемся последней формулой для нахождения производной функции $y = \log_a x$. Имеем

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом, *производная функции $y = \log_a x$ равна единице, деленной на произведение аргумента и натурального логарифма основания.*

Пусть теперь $y = \log_a u$, где $u = f(x)$. Тогда согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'_x = (\log_a u)'_u u'_x$. Но $(\log_a u)'_u = \dfrac{1}{u \ln a}$ и, следовательно,

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

261—278. Найти производные следующих функций:

261. $y = \log_2 x$.

Решение. $y' = (\log_2 x)' = \dfrac{1}{x \ln 2}$.

262. $y = \log_5 x$. **263.** $y = \log_{0,4} x$.

264. $y = \log_3 4x$.

Решение. I способ. Так как $\log_3 4x = \log_3 4 + \log_3 x$, то

$$y' = (\log_3 4 + \log_3 x)' = (\log_3 4)' + (\log_3 x)' = 0 + \frac{1}{x \ln 3} = \frac{1}{x \ln 3}.$$

II способ. $(\log_3 4x)' = \dfrac{1}{4x \ln 3}(4x)' = \dfrac{4}{4x \ln 3} = \dfrac{1}{x \ln 3}$.

265. $y = \log_2 3x$. **266.** $y = \log_{0,5} 5x$.

267. $u = \log_7 x^5$.

Решение. I способ. $(\log_7 x^5)' = (5 \log_7 x)' = \dfrac{5}{x \ln 7}$.

II способ. $(\log_7 x^5)' = \dfrac{1}{x^5 \ln 7}(x^5)' = \dfrac{5x^4}{x^5 \ln 7} = \dfrac{5}{x \ln 7}$.

268. $v = \log_5 t^3$. **269.** $s = \log_{1/3} t^4$.

270. $y = \lg(x - 1)$.

Решение. $y'=\frac{1}{(x-1)\ln 10}$.

271. $y=\lg(x+3)$. **272.** $y=\lg(x-6)$.

273. $y=\log_3(x^2+3x-1)$.

Решение. $y'=\frac{(x^2+3x-1)'}{(x^2+3x-1)\ln 3}=\frac{2x+3}{(x^2+3x-1)\ln 3}$.

274. $y=\log_2(z^2-2z)$. **275.** $y=\log_{0,3}(x^2+4x-3)$.

276. $u=\log_5\cos 7x$.

Решение. $u'=\frac{1}{\cos 7x\ln 5}(\cos 7x)'=\frac{-\sin 7x\cdot 7}{\cos 7x\ln 5}=-\frac{7\operatorname{tg}7x}{\ln 5}$.

277. $y=\log_7\cos\sqrt{1+x}$. **278.** $y=\lg\operatorname{ctg}x$.

5. Производная степенной функции

Найдем производную функции $y=x^n$, где n — любое действительное число. Для этого применим способ, который называется *логарифмическим дифференцированием*. Он заключается в том, что функцию сначала логарифмируют, а затем находят производную.

Прологарифмируем функцию $y=x^n$ по основанию e:

$$\ln y=n\ln x.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, имеем

$$(\ln y)'=(n\ln x)'.$$

Левую часть последнего равенства можно записать в виде $(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'_x$ (так как y — сложная функция от x), а правую часть — в виде $(n\ln x)'=\frac{n}{x}$. Поэтому $\frac{1}{y}\cdot y'_x=\frac{n}{x}$, т. е. $y'_x=y\times$ $\times\frac{n}{x}$. Но $y=x^n$ и, следовательно,

$$y'_x=x^n\cdot\frac{n}{x}=n\cdot x^{n-1},$$

откуда

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Мы получили обобщение известной формулы производной степени, справедливое для любого показателя.

Найдем производную функции $y=u^n$, где $u=f(x)$. Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции, получим $y'=y'_u u'_x=nu^{n-1}u'$. Итак,

$$(u^n)'=nu^{n-1}u'.$$

279—300. Найти производные следующих функций:

279. $y=2x^3-4x+2$.

Решение. $y' = (2x^3 - 4x + 2)' = (2x^3)' - (4x)' + (2)' = 6x^2 - 4.$

280. $y = \dfrac{3}{5x^2}.$

Решение. Преобразуем данную функцию к виду $y = \dfrac{3}{5x^2} = \dfrac{3}{5}x^{-2}$. Тогда получим

$$y' = \left(\frac{3}{5}x^{-2}\right)' = \frac{3}{5}(x^{-2})' = \frac{3}{5}(-2)x^{-3} = -\frac{6}{5}x^{-3} = -\frac{6}{5x^3}.$$

281. $y = \dfrac{1}{2}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3 + 3x^2 + x - 3.$ **282.** $y = \dfrac{3}{8x^4}.$

283. $y = \dfrac{1}{3}x^6 + \dfrac{7}{10x^5} - \dfrac{1}{6}x^3.$ **284.** $y = \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{6}{x^3}.$

285. $f(x) = \sqrt[4]{x^3}.$

Решение. Так как $f(x) = \sqrt[4]{x^3} = x^{3/4}$, то

$$f'(x) = (x^{3/4})' = \frac{3}{4}x^{3/4-1} = \frac{3}{4}x^{-1/4} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}}.$$

286. $y = \dfrac{2}{3x\sqrt{x}}.$

Решение. Здесь $y = \dfrac{2}{3x\sqrt{x}} = \dfrac{2}{3}x^{-3/2}$, откуда

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^{-3/2}\right)' = -\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-5/2} = -x^{-5/2} = -\frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$$

287. $y = x^2 + \dfrac{2}{x^4} - \sqrt[3]{x}.$

Решение. Имеем $y = x^2 + 2x^{-4} - x^{1/3}$. Следовательно,

$$y' = (x^2 + 2x^{-4} - x^{1/3})' = (x^2)' + (2x^{-4})' - (x^{1/3})' = 2x - 8x^{-5} - \frac{1}{3}x^{-2/3} =$$

$$= 2x - \frac{8}{x^5} - \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

288. $y = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{2x + 1}.$

Решение. Применяем правило дифференцирования частного и формулу X:

$$y' = \frac{(3x^2 - 4x + 1)'(2x + 1) - (2x + 1)'(3x^2 - 4x + 1)}{(2x + 1)^2} =$$

$$= \frac{(6x - 4)(2x + 1) - 2(3x^2 - 4x + 1)}{(2x + 1)^2} = \frac{12x^2 + 6x - 8x - 4 - 6x^2 + 8x - 2}{(2x + 1)^2} =$$

$$= \frac{6x^2 + 6x - 6}{(2x + 1)^2} = \frac{6(x^2 + x - 1)}{(2x + 1)^2}.$$

289. $y = \sqrt{x}(x^2 + 2x - 5).$

Решение. Здесь следует воспользоваться правилом дифференцирования произведения и формулой X. Имеем

$$y' = (\sqrt{x})'(x^2+2x-5)+(x^2+2x-5)'\sqrt{x}.$$

Так как $(\sqrt{x})' = (x^{1/2})' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x^2+2x-5)' = 2x+2$, то

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+2x-5)+(2x+2)\sqrt{x} = \frac{x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{2x}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}+$$

$$+2\sqrt{x} = \frac{1}{2}x\sqrt{x}+\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}+2\sqrt{x} = 2{,}5x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

290. $y = \sqrt[5]{x^3}$. **291.** $f(x) = 2x\sqrt[3]{x^2}$.

292. $u(t) = t^3 - \frac{1}{t^2} + t\sqrt[3]{t}$. **293.** $y = \frac{x^2-3x}{2x+1}$.

294. $y = \frac{\frac{1}{3}x^3-2x^2+x}{x^4-1}$. **295.** $y = \frac{x^3+3x^2}{3x-1}$.

296. $f(x) = x^3\sin x$.

Решение. Применяя формулы IV, X и учитывая, что $(\sin x)' = \cos x$, находим

$$f'(x) = (x^3)'\sin x + (\sin x)'x^3 = 3x^2\sin x + x^3\cos x = x^2(3\sin x + x\cos x).$$

297. $f(x) = x^2(\sqrt{x}+x-1)$. **298.** $y = \sqrt[3]{x^2}(2\sqrt{x}-3)$.

299. $s(t) = t(\sqrt{t}-5)$. **300.** $s(t) = \sqrt[3]{t}(t^2-\sqrt{5})$.

6. Производная показательной функции

Производную показательной функции также можно найти с помощью логарифмического дифференцирования.

Пусть дана функция $y = a^x$, где $a>0$ и $a \neq 1$. Логарифмируя обе части равенства по основанию e, получим $\ln y = x\ln a$. Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{1}{y}\cdot y' = \ln a,$$

откуда $y' = y\ln a$ или $y' = a^x \ln a$. Следовательно,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Итак, *производная показательной функции $y = a^x$ равна произведению этой функции на натуральный логарифм основания.*

Найдем производную функции $y = e^x$. Для этого в формуле $(a^x)' = a^x\ln a$ положим $a = e$; тогда получим $(e^x)' = e^x\ln e$. Но $\ln e = 1$ и, следовательно,

$$(e^x)' = e^x.$$

Итак, *производная функции $y = e^x$ равна самой функции $y = e^x$.*

Производные функций $y = a^u$ и $y = e^u$ найдем, применив формулу нахождения производной сложной функции. В результате получим

$$(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'; \; (e^u)' = e^u u'.$$

Производная функции $y = a^u$, где $u = f(x)$, равна самой функции, a^u, умноженной на натуральный логарифм основания и на производную промежуточного аргумента u.

Производная функции $y = e^u$, где $u = f(x)$, равна произведению самой функции e^u на производную промежуточного аргумента u.

301. Найти производную функции $y = 5^x$.

Решение. Используя формулу $(a^x)' = a^x \ln a$, получим

$$y' = (5^x)' = 5^x \ln 5.$$

302. Продифференцировать функцию $y = 2^{\sin x}$.

Решение. $y' = 2^{\sin x} \ln 2 (\sin x)' = 2^{\sin x} \ln 2 \cos x$.

303. Найти производную функции $y = 0{,}5^{\sin 4x}$.

Решение. $y' = 0{,}5^{\sin 4x} \ln 0{,}5 (\sin 4x)' = 0{,}5^{\sin 4x} \ln 0{,}5 \cdot \cos 4x \cdot 4 =$ $= 4 \cos 4x \cdot 0{,}5^{\sin 4x} \ln 0{,}5$.

304. Продифференцировать функцию $y = e^{x^2}$.

Решение. Используем формулу $(e^u)' = e^u u'$:

$$y' = (e^{x^2})' = e^{x^2}(x^2)' = e^{x^2} \cdot 2x = 2xe^{x^2}:$$

305. Найти значение производной функции $y = 2^x$ в точке $x = 1$.

Решение. Найдем производную по формуле XI: $y' = 2^x \ln 2$. Вычислим частное значение производной при $x = 1$:

$$y'(1) = (2^x \ln 2)_{x=1} = 2 \ln 2 = \ln 4.$$

306—311. Найти производные следующих функций:

306. $y = 3^x$. **307.** $f(x) = x^3 + 2^x$.

308. $f(x) = 3^{\sin x} - 2^{2x} + x^2$. **309.** $y = 2^{\sin 5x}$.

310. $f(x) = 3^{\sin^2 x}$. **311.** $y = a^{3x}$.

312. Найти значение производной функции $f(x) = 3^{2x}$ в точке $x = 2$.

313. Найти значение производной функции $y = 2^{x^2}$ в точке $x = -1$.

7. Дифференцирование тригонометрических функций

Производные функций $y = \sin x$ и $y = \sin u$, где $u = f(x)$.

Найдем производную функции $y = \sin x$ по общему правилу нахождения производной. Отметим, что функция $y = \sin x$ имеет производную при любом значении аргумента x.

1⁰. Придадим аргументу x приращение Δx; тогда функция получит приращение Δy:

$$y_н = y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

2^0. Вычитая из нового значения функции первоначальное, найдем значение приращения Δy:

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \\ y = \sin x \\ \hline \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x. \end{array}$$

Применим формулу разности синусов:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда получим

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x+\Delta x+x}{2}\sin\frac{x+\Delta x-x}{2} =$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

3^0. Находим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

4^0. Перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Поэтому, полагая $\frac{\Delta x}{2} = t$, получим

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t\to 0}\cos(t+x)\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}.$$

Но $\lim\limits_{t\to 0}\cos(x+t) = \cos x$, так как функция $y = \cos x$ непрерывна, а $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ (первый замечательный предел). Значит, $y' = \cos x$, т. е.

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Итак, *производная функции* $y = \sin x$ *равна* $\cos x$.

Выведем формулу дифференцирования функции $y = \sin u$, где u — функция от x. Применяя формулу $y'_x = y'_u u'_x$, находим

$$y'_x = (\sin u)'_u u'_x = \cos u \cdot u'_x.$$

Итак,

$$(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$$

314. Найти производную функции $y = \sin(x^3 - 3x^2)$.

Решение. Здесь $u = x^3 - 3x^2$, $y = \sin u$. Находим $u'_x = (x^3 - 3x^2)' = 3x^2 - 6x$. Тогда $y'_x = y'_u u'_x = (3x^2 - 6x)\cos(x^3 - 3x^2)$.

315. Продифференцировать функцию $y = \sin^3 4x$.

Решение. Применяем формулы VII, X, XIII:

$$y' = (\sin^3 4x)' = 3\sin^2 4x(\sin 4x)' = 3\sin^2 4x \cos 4x(4x)' = 3\sin^2 4x \cos 4x \cdot 4 = 12\sin^2 4x \cos 4x.$$

316. Найти значение производной функции $f(x) = \sin^4 x$ при $x = \pi/6$.

Решение. Используя формулы VII, X, XIII, найдем производную:

$$f'(x) = 4\sin^3 x \cos x.$$

Подставив значение $x = \pi/6$, вычислим значение производной:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

317. Найти y', если $y = \ln\sin^3 5x$.

Решение. Воспользуемся формулами VII, VIII, XIII:

$$y' = \frac{1}{\sin^3 5x}\cdot 3\sin^2 5x \cos 5x \cdot 5 = \frac{15\cos 5x}{\sin 5x} = 15\operatorname{ctg} 5x.$$

318—323. Найти производные следующих функций:

318. $y = \sin(x^2 - 3x + 5)$. **319.** $f(x) = \sin^2 5x$.
320. $y = \sin^4 3x$. **321.** $y = \ln\sin^2 3x$.
322. $y = \ln\sin\sqrt{x}$. **323.** $y = \ln^2 \sin x$.

324. Найти $f'(\pi/12)$, если $f(x) = \sin^2 x$.

325. Найти $f'(\pi/6)$, если $f(x) = 2\sin^3 2x$.

Производные функций $y = \cos x$ и $y = \cos u$, где $u = f(x)$.

Выведем формулу для нахождения производной функции $y = \cos x$. Используя формулу приведения, получим $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. Следовательно, $y' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)'$. Применим теперь правило дифференцирования сложной функции. Здесь $u = \frac{\pi}{2} - x$, $y = \sin u$. Найдем $y'_u = (\sin u)' = \cos u$, $u'_x = \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -1$. Значит,

$$y'_x = y'_u u'_x = \cos u(-1) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)(-1) = -\sin x,$$

т. е.

$$(\cos x)' = -\sin x.$$

Итак, *производная функции $y = \cos x$ равна* $-\sin x$.

Выведем формулу дифференцирования функции $y=\cos u$, где u — функция от x. Применяя формулу $y'_x=y'_u u'_x$, получим

$$y'_x=(\cos u)'_u\cdot u'_x=-\sin u\cdot u'_x.$$

Итак,

$$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'.$$

326. Найти производную функции $y=\cos x^4$.

Решение. Здесь $u=x^4$, $y=\cos u$. Находим $y'_u=-\sin u$, $u'_x=4x^3$. Следовательно, $y'_x=y'_u u'_x=-4x^3\sin x^4$.

327. Найти $(\cos^3 x)'$.

Решение. Здесь $u=\cos x$, $y=u^3$. Находим $y'_u=3u^2=3\cos^2 x$, $u'_x=(\cos x)'=-\sin x$; откуда $y'_x=3\cos^2 x(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x$.

328. Найти производную функции $y=\cos\left(\frac{x}{2}-x^5\right)$.

Решение. Имеем $u=\frac{x}{2}-x^5$, $y=\cos u$. Далее, находим $y'_u=-\sin u$, $u'_x=\frac{1}{2}-5x^4$, откуда $y'_x=-\left(\frac{1}{2}-5x^4\right)\sin\left(\frac{x}{2}-x^5\right)$.

329. Найти значение производной функции $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$ при $x=\pi/12$.

Решение. Предварительно преобразуем данную функцию:

$$f(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\cos 2x$$

(так как $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$). Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$f'(x)=(-\cos 2x)'=-(\cos 2x)'=-(-\sin 2x)\cdot(2x)'=2\sin 2x.$$

При $x=\frac{\pi}{12}$ имеем $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$.

330. Найти y', если $y=\sqrt{x}+\cos^2 3x$.

Решение. $y'=(\sqrt{x}+\cos^2 3x)'=(\sqrt{x})'+(\cos^2 3x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+$ $+2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3=\frac{1}{2\sqrt{x}}-3\sin 6x$.

Здесь мы воспользовались тем, что $(\sqrt{x})'=(x^{1/2})'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=$ $=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, а $2\sin 3x\cos 3x=\sin 6x$ (по формуле синуса двойного угла).

331—336. Найти производные следующих функций:

331. $y=\cos x^2$. **332.** $y=\cos^2 x$.

333. $y=\cos(x^2-3x)$. **334.** $y=\cos^3 5x$.

335. $y=\cos^4\left(\frac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+3x\right)$. **336.** $y=\sin^2 3x-\cos^2 3x$.

337. Найти $f'(\pi/4)$, если $f(x)=3\ln\cos^2 x$.

Производные функций $\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{tg} u$, где $u = f(x)$.

Для нахождения производной функции $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ воспользуемся правилом дифференцирования дроби: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$. Тогда получим

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Если $y=\operatorname{tg} u$, где $u=f(x)$, то, используя правило дифференцирования сложной функции, находим

$$y'_x=y'_u u'_x=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}.$$

Производные функций $y=\operatorname{ctg} x$ и $y=\operatorname{ctg} u$, где $u=f(x)$.

Найдем производную функции $y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$. Согласно правилу VI имеем

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Значит,

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Если дана функция $y=\operatorname{ctg} u$, где $u=f(x)$, то, воспользовавшись формулой VII, получим

$$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

338. Найти производную функции $y=\operatorname{tg} x^5$.

Решение. Здесь $u=x^5$, $y=\operatorname{tg} u$. Следовательно,

$$(\operatorname{tg} x^5)'=\frac{1}{\cos^2 x^5}\cdot(x^5)'=\frac{5x^4}{\cos^2 x^5}.$$

339. Найти производную функции $y=\operatorname{ctg}^3 x$.

Решение. $y'=(\operatorname{ctg}^3 x)'=3\operatorname{ctg}^2 x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{3\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}.$

340. Найти y', если $y=\operatorname{tg}\ln x-\operatorname{ctg}^3 x$.

341. Найти $f'(\pi/12)$, если $f(x)=\ln\operatorname{tg}3x$.

342. Найти $f'(\pi/8)$, если $f(x)=\operatorname{tg}^5 2x-\cos^3 2x+\sin^2 x$.

8. Дифференцирование обратных тригонометрических функций

Производные функций $y=\arcsin x$ и $y=\arcsin u$, где $u=f(x)$.

Найдем производную функции $y=\arcsin x$. Согласно определению арксинуса, имеем $\sin y=x$, где $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $\sin y$ — сложная функция, так как y зависит от x. Получим $\cos y\cdot y'=1$, откуда $y'=\frac{1}{\cos y}$. Но $\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}$ (берем только арифметический корень, поскольку для рассматриваемых значений y функция неотрицательна: $-\pi/2\leqslant y\leqslant\pi/2$). Далее, заменяя $\sin y$ на x, получим

$$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Так как по условию $y=\arcsin x$, то окончательно находим

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для функции $y=\arcsin u$, где $u=f(x)$, используя формулу производной сложной функции $y'_x=y'_u u'_x$, получим

$$(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

343. Найти y', если $y=\arcsin x^3$.

Решение. Используя формулу $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, имеем

$$y'=(\arcsin x^3)'=\frac{(x^3)'}{\sqrt{1-(x^3)^2}}=\frac{3x^2}{\sqrt{1-x^6}}.$$

344. Найти производную функции $y=\arcsin\ln x$.

Решение. Снова применяем формулу $(\arcsin u)'=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$:

$$y'=(\arcsin\ln x)'=\frac{(\ln x)'}{\sqrt{1-(\ln x)^2}}=\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}.$$

345. Продифференцировать функцию $y=\arcsin\operatorname{tg}^2 x$.

Решение. $y'=(\arcsin\operatorname{tg}^2 x)'=\frac{(\operatorname{tg}^2 x)'}{\sqrt{1-(\operatorname{tg}^2 x)^2}}=\frac{2\operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x)'}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4 x}}=$

$$=\frac{2\operatorname{tg}x\,\frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^4 x}}=\frac{2\operatorname{tg}x}{\cos^2 x\sqrt{1-\operatorname{tg}^4 x}}.$$

Здесь мы применили формулы $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

346. Найти y', если $y = \arcsin 5x$.

347. Найти y', если $y = \arcsin x^2$.

348. Найти $f'(1)$, если $f(x) = \arcsin(x^3/3)$.

Производные функций $y = \arccos x$ и $y = \arccos u$, где $u = f(x)$.

Найдем производную функции $y = \arccos x$. По определению арккосинуса имеем $\cos y = x$, где $0 \leqslant y \leqslant \pi$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $\cos y$ — сложная функция: $-\sin y \cdot y' = 1$, откуда $y' = -\frac{1}{\sin y}$. Далее, после соответствующих замен получим

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ т. е. } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для функции $y = \arccos u$, где $u = f(x)$, используя формулу производной сложной функции, находим

$$(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Замечание. Производные функций $\arcsin u$ и $\arccos u$ отличаются только знаком.

349—352. Найти производные следующих функций:

349. $y = \arccos x^2$. **350.** $y = \arccos 3x$.

351. $y = \arccos \ln x$. **352.** $y = \arccos \ln x^3$.

353. Найти $f'(1/3)$, если $f(x) = \arccos \sqrt{5}x$.

Производные функций $y = \operatorname{arctg} x$ и $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = f(x)$.

Найдем производную функции $y = \operatorname{arctg} x$. По определению арктангенса имеем $\operatorname{tg} y = x$, где $-\pi/2 < y < \pi/2$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $\operatorname{tg} y$ — сложная функция: $\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' = 1$, откуда $y' = \cos^2 y$. Далее, выразив $\cos^2 y$ из известного соотношения $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$, находим

$$y' = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}.$$

Отсюда, заменяя $\operatorname{tg} y$ на x, а y на $\operatorname{arctg} x$, получим

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

Для функции $y = \operatorname{arctg} u$, где $u = f(x)$, используя формулу производной сложной функции, имеем

$$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{u'}{1+u^2}.$$

Производные функций $y=\operatorname{arcctg} x$ и $y=\operatorname{arcctg} u$, где $u=f(x)$.

Найдем производную функции $y=\operatorname{arcctg} x$. По определению арккотангенса имеем $\operatorname{ctg} y=x$, где $0<y<\pi$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $\operatorname{ctg} y$ — сложная функция: $-\frac{1}{\sin^2 y}\cdot y'=1$, откуда $y'=-\sin^2 y$. Выразив $\sin^2 y$ из известного соотношения $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, получим

$$y'=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}.$$

Заменяя $\operatorname{ctg} y$ значением x, а y — значением $\operatorname{arcctg} x$, находим

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Для функции $y=\operatorname{arcctg} u$, где $u=f(x)$, используя формулу производной сложной функции, получим

$$(\operatorname{arcctg} u)'=-\frac{u'}{1+u^2}.$$

354. Найти y', если $y=\operatorname{arctg} 2x$.

Решение. $y'=\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'=\frac{2}{1+4x^2}$.

355. Найти y', если $y=\operatorname{arcctg} 3x$.

Решение. $y'=-\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot(3x)'=-\frac{3}{1+9x^2}$.

356. Найти y', если $y=\operatorname{arctg} x^2$.

Решение. $y'=\frac{1}{1+x^4}\cdot(x^2)'=\frac{2x}{1+x^4}$.

357. Найти $f'(1/5)$, если $f(x)=\operatorname{arctg} 5x+x^2$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot(5x)'+2x=\frac{5}{1+25x^2}+2x.$$

Следовательно,

$$f'(1/5)=\frac{5}{1+25\cdot\frac{1}{25}}+2\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=2{,}5+0{,}4=2{,}9.$$

358. Дано: $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. Найти $f'(1)$.

Решение. $f'(x)=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'-\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'=$

$$= -\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} - \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} - \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}};$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2(1+1)} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{13}{20}.$$

359—372. Найти производные следующих функций:

359. $y = \operatorname{arctg} 3x$. **360.** $y = \operatorname{arcctg} 5x$.

361. $y = \operatorname{arctg} x^3$. **362.** $y = \operatorname{arcctg} x^2$.

363. $y = \operatorname{arctg}\frac{2x}{1-x^2}$. **364.** $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{x}$.

365. $y = \ln \operatorname{arctg}\frac{x}{2}$. **366.** $y = \operatorname{arcctg} e^x$.

367. $y = \operatorname{arctg}\ln x^2$. **368.** $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

369. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+2x}$. **370.** $y = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

371. $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$. **372.** $y = \operatorname{arcctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

§ 5. Геометрический и механический смысл производной

Геометрический смысл производной
Механический смысл производной
Производная второго порядка и ее механический смысл
Приложения производной к решению физических задач

1. Геометрический смысл производной

Геометрическая интерпретация производной, впервые данная в конце XVII в. Лейбницем, состоит в следующем: *значение производной функции $y = f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в той же точке x* (см. рис. 99), т. е.

$$k = f'(x) = \operatorname{tg}\varphi. \qquad (1)$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную, то график этой функции в точке с абсциссой x имеет касательную, и, наоборот, если в некоторой точке с абсциссой x существует касательная к графику, то при этом значении x существует производная. Иначе говоря, существование касательной к кривой $y = f(x)$ в некоторой точке с абсциссой x необходи-

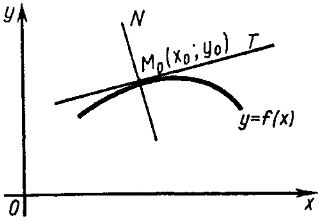


Рис. 102

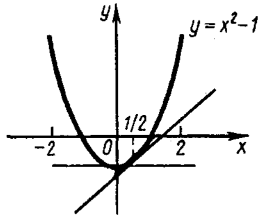


Рис. 103

мо и достаточно для существования производной $y' = f'(x)$ в точке x.

Геометрический смысл производной, выраженный равенством (1), дает наглядное представление о производной, позволяет проследить за ее изменением при движении точки M по кривой и дает возможность геометрически определить значение производной при данном значении x.

Из равенства (1) следует, что для нахождения углового коэффициента касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ нужно найти производную $y' = f'(x)$ и подставить в нее вместо x абсциссу точки касания: $k = f'(x_0)$.

Пусть дана непрерывная функция $y = f(x)$. Тогда в любой точке $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащей графику этой функции (рис. 102), можно провести касательную M_0T и нормаль M_0N (прямую, перпендикулярную касательной в точке касания). Уравнение касательной, как всякой прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, где x и y — текущие координаты. Но $k = y' = f'(x_0)$ и уравнение касательной запишется так:

$$y - y_0 = y'(x - x_0). \tag{2}$$

Уравнение нормали запишется в виде

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'}(x - x_0). \tag{3}$$

373. В какой точке касательная к кривой $y = x^2 - 1$: а) параллельна оси Ox; б) образует с осью Ox угол 45°?

Решение. а) Так как прямая параллельна оси Ox, то она образует с ней угол 0 и ее угловой коэффициент, равный тангенсу этого угла, равен нулю. Известно, что производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к кривой в этой точке, т. е. $f'(x_0) = 0$.

Найдем производную функции $y = x^2 - 1$; имеем $y' = (x^2 - 1)' = 2x$. Тогда $2x = 0$, т. е. $x_0 = 0$, откуда $y_0 = -1$. Итак, касательная к данной кривой параллельна оси Ox в точке $(0; -1)$ (рис. 103).

б) Поскольку прямая образует с осью Ox угол 45°, ее угловой коэффициент, равный тангенсу этого угла, равен единице. Ранее мы нашли производную функции $y = x^2 - 1$ в любой ее точке: $y' = 2x$. Найдем значение аргумента, при котором эта производная равна 1: $2x_0=1$, т. е. $x_0=1/2$. Тогда $y_0=-3/4$. Итак, касательная к данной кривой составляет с осью Ox угол 45° в точке $(1/2;\ -3/4)$ (рис. 103).

374. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y=x^3$ в точке $C(-2;\ -8)$.

Решение. Найдем производную функции $y=x^3$ в точке $x=-2$:

$$y'=(x^3)'=3x^2;\quad y'_{x=-2}=3(-2)^2=12.$$

Итак, угловой коэффициент касательной к кривой $y=x^3$ в точке $C(-2;\ -8)$ равен 12 (рис. 104).

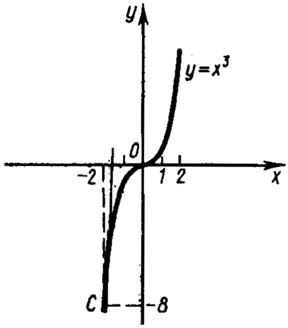


Рис. 104

375. Кривая задана уравнением $y=x^2+5x+3$. Определить углы наклона касательных к положительному направлению оси Ox, проведенных к кривой в точках с абсциссами $x=-2$ и $x=0$.

Решение. Найдем производную: $y'=2x+5$. Обозначив угол наклона касательной в точке с абсциссой $x=-2$ через α, а в точке с абсциссой $x=0$ — через β, получим

$$\operatorname{tg}\alpha=y'_{x=-2}=2(-2)+5=1,\quad \operatorname{tg}\beta=y'_{x=0}=2\cdot 0+5=5,$$

откуда $\alpha=\pi/4$ (или в градусной мере $\alpha=45°$), а $\beta=\operatorname{arctg}5$. По таблицам тригонометрических функций можно найти и градусную меру угла β: $\beta\approx 79°$.

376. На кривой $y=4x^2-6x+3$ найти точку, в которой касательная: а) параллельна прямой $y=2x$; б) перпендикулярна прямой $y=x/4$.

Решение. Пусть искомая точка касания есть $(x_0;\ y_0)$. Тогда, как известно, угловой коэффициент k касательной равен значению производной в точке касания, т. е.

$$k=y'_{x=x_0}=8x-6\big|_{x=x_0}=8x_0-6=2(4x_0-3).$$

Учитывая это, рассмотрим каждое из условий задачи.

а) Для того чтобы касательная была параллельна прямой $y=2x$, их угловые коэффициенты должны совпадать, т. е. $k=2$ или $2(4x_0-3)=2$. Решая последнее уравнение относительно x_0, получим: $4x_0-3=1$; $4x_0=4$; $x_0=1$. Подставляя найденное значение абсциссы искомой точки в уравнение кривой, найдем значение ее ординаты: $y_0=4\cdot 1^2-6\cdot 1+3=1$. Итак, $(1;\ 1)$ — искомая точка.

б) Из аналитической геометрии известно, что угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Так как угловой коэффициент прямой $y=x/4$ равен $1/4$, то угловой коэффициент k искомой касательной равен -4, и мы имеем уравнение $2(4x_0-3)=-4$, откуда $8x_0=-4+6$, т. е. $x_0=1/4$. Соответственно находим $y_0=4(1/4)^2-6(1/4)+3=7/4$. Следовательно, точка $(1/4;\ 7/4)$ — искомая.

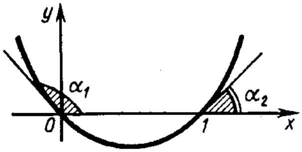


Рис. 105

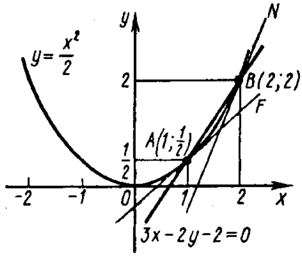


Рис. 106

377. Найти углы, под которыми парабола $y=x^2-x$ пересекает ось абсцисс (рис. 105).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox, для чего решим уравнение $x^2-x=0$, откуда $x_1=0$ и $x_2=1$. Углом кривой с осью Ox называют угол, который касательная, проведенная в точке пересечения кривой с осью Ox, образует с положительным направлением этой оси. Вычислим угловые коэффициенты касательных к параболе в точках $x_1=0$ и $x_2=1$. Находим производную: $y'=2x-1$, откуда $y'(0)=-1$ и $y'(1)=1$. Итак, $\operatorname{tg}\alpha_1=-1$ и $\operatorname{tg}\alpha_2=1$, т. е. $\alpha_1=3\pi/4$ и $\alpha_2=\pi/4$.

378. Под каким углом парабола $y=x^2/2$ пересекается с прямой $3x-2y-2=0$?

Решение. Этот вопрос может быть сформулирован иначе: под каким углом пересекаются касательные к кривой $y=x^2/2$, проведенные в точках ее пересечения с прямой $3x-2y-2=0$, и сама эта прямая?

Находим точки пересечения параболы $y=x^2/2$ и прямой $3x-2y-2=0$, для чего решаем систему уравнений $3x-2y-2=0$, $y=x^2/2$. Подставляя $y=x^2/2$ в первое уравнение, имеем $3x-x^2-2=0$ или $x^2-3x+2=0$, т. е. $x_A=1$, $x_B=2$. Отсюда получим $y_A=1/2$, $y_B=2$ (рис. 106).

Мы нашли две точки пересечения параболы $y=x^2/2$ и прямой $3x-2y-2=0$: $A(1;\ 1/2)$ и $B(2;\ 2)$. Найдем производные функции $y=x^2/2$ в этих точках:

$$y'=(x^2/2)'=x;\quad y'(1)=1;\quad y'(2)=2.$$

Следовательно, угловой коэффициент касательной AF, проведенной к кривой $y=x^2/2$ в точке $A(1;\ 1/2)$, равен 1, а угловой коэффициент касательной BN в точке $B(2;\ 2)$ равен 2. Найдем углы между этими касательными и прямой $3x-2y-2=0$. Уравнение прямой $3x-2y-2=0$ можно записать в виде $y=\frac{3}{2}x-1$. Таким образом, $k_{AB}=\frac{3}{2}$; $k_{AF}=1$, $k_{BN}=2$.

Из аналитической геометрии известна формула для нахождения тангенса угла между двумя прямыми по заданным угловым коэффициентам этих прямых:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{k_{AB}-k_{AF}}{1+k_{AB}k_{AF}}=\frac{\frac{3}{2}-1}{1+\frac{3}{2}\cdot 1}=\frac{1}{5};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{k_{BN}-k_{AB}}{1+k_{BN}k_{AB}}=\frac{2-\frac{3}{2}}{1+2\cdot\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}.$$

Итак, $\varphi_1=\operatorname{arctg}(1/5)$ — угол, образованный прямой AB с касательной AF, а $\varphi_2=\operatorname{arctg}(1/8)$ — угол, образованный этой прямой с касательной BN.

379. Составить уравнение касательной к параболе $y=x^2-4x$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Определим ординату y_0 точки касания, подставив в уравнение параболы значение абсциссы $x_0=1$; имеем $y_0=1-4\cdot1=-3$.

Для нахождения углового коэффициента касательной вычислим значение производной в точке касания: $f'(x)=2x-4$; $k=f'(1)=-2$.

Теперь, зная точку $(1;\ -3)$ и угловой коэффициент $k=y'=-2$, составим уравнение касательной:

$$y+3=-2(x-1),\ y+3=-2x+2 \text{ или } y=-2x-1.$$

380. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=\frac{1}{1+x^2}$ в точке $\left(2;\ \frac{1}{5}\right)$.

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $\left(2;\ \frac{1}{5}\right)$, имеет вид $y-\frac{1}{5}=k(x-2)$. Находим угловой коэффициент касательной:

$$k_1=y'_{x=2}=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_{x=2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=2}=-\frac{4}{25}.$$

Так как нормаль и касательная, проведенные в одной точке кривой, взаимно перпендикулярны, то угловой коэффициент нормали $k_2=25/4$. Подставляя полученные значения k_1 и k_2 в уравнение пучка прямых, найдем искомые уравнения касательной и нормали:

уравнение касательной: $y=\frac{-4x+13}{25}$ или $4x+25y-13=0$;

уравнение нормали: $y=\frac{125x-246}{20}$ или $125x-20y-246=0$.

381. Дана кривая $y=-x^2+4$. Провести к ней касательную в точке, абсцисса которой $x=-1$.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_{x=-1}=(-x^2+4)_{x=-1}=-(-1)^2+4=3$; значит, $A(-1;\ 3)$ — точка касания.

Уравнение любой прямой, проходящей через точку A, имеет вид $y-3=k(x+1)$. Для того чтобы прямая была касательной, необходимо и достаточно, чтобы $k=y'_{x=-1}$. Найдем угловой коэффициент k:

$$y'=(-x^2+4)'=-2x;\ k=y'_{x=-1}=(-2)(-1)=2.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y-3=2(x+1)$, т. е. $y=2x+5$.

382. В какой точке касательная к кривой $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x+4$ параллельна прямой $2x+2y-5=0$?

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k_1 = -1$. Угловой коэффициент касательной $k = y' = x^2 - 6x + 8$.

Из условия параллельности следует $k = k_1$. Тогда $x^2 - 6x + 8 = -1$; $x^2 - 6x + 9 = 0$; $(x-3)^2 = 0$. Следовательно, $x = 3$ — абсцисса точки касания. Подставляя это значение x в уравнение кривой, получим ординату точки касания: $y = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 + 4 = 10$.

Итак, в точке (3; 10) касательная к данной кривой параллельна прямой $2x + 2y - 5 = 0$.

383. Под каким углом пересекаются кривые $y = 2^x$ и $y = \sqrt{x+1}$?

Решение. Найдем точки пересечения данных кривых; решив уравнение $2^x = \sqrt{x+1}$, получим $x_1 = -0{,}5$, $x_2 = 0$.

Под углом между кривыми понимается угол между касательными в точке пересечения кривых. Величину угла находят, пользуясь известной формулой $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$, где k_1, k_2 — угловые коэффициенты касательных в точке их пересечения.

Найдем $y_1' = 2^x \ln 2$, $y_2' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Вычислим значения угловых коэффициентов в точках $x = -0{,}5$ и $x = 0$:

$$k_1(-0{,}5) = 2^{-0{,}5} \ln 2 = \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}, \quad k_2(-0{,}5) = \frac{1}{2\sqrt{0{,}5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad k_1(0) = \ln 2,$$

$$k_2(0) = \frac{1}{2}.$$

Итак, в точке $x = -0{,}5$ имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\ln 2}{\sqrt{2}}} = \frac{(1 - \ln 2)\sqrt{2}}{2 + \ln 2}, \text{ откуда } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{(1 - \ln 2)\sqrt{2}}{2 + \ln 2}.$$

В точке $x = 0$ имеем

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\frac{1}{2} - \ln 2}{1 + \frac{1}{2} \ln 2} = \frac{1 - 2\ln 2}{2 + \ln 2}, \text{ т. е. } \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1 - 2\ln 2}{2 + \ln 2}.$$

384. В какой точке касательная к кривой $y = x^2 + 2$ образует с осью Ox угол 30°?

385. Найти абсциссу точки параболы $y = -x^2 + x + \frac{3}{4}$, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

386. В какой точке касательная к графику функции $y = 2x^3 - 3x^2 + 4$ параллельна оси абсцисс?

387. В какой точке касательная к графику функции $y = \frac{x+2}{x-2}$ образует угол 135° с осью Ox?

388. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y = 3x^2 - 2x + 1$ в точке (1/2; 5).

389. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2-3$ при $x=1/2$.

390. Найти угол наклона касательной к кривой $y=\frac{1}{12}x^3+$ $+5$ в точке, абсцисса которой равна 2.

391. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная к кривой $y=x^3-x^2-7x+6$ в точке (2; —4)?

392. Найти углы, которые образует кривая $y=(4x-x^2)/4$ с осью Ox в точках (0; 0), (2; 1), (4; 0).

393. Определить, под какими углами синусоида $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс.

394. Найти угол наклона касательной к гиперболе $xy=a^2$ в точке (a; a).

395. Под каким углом кривая $y=\frac{x}{1+x^2}$ пересекается с осью Oy?

396. При каком значении a кривая $y=(ax-x^3)/4$ пересекает Ox под углом 45°?

397. В каких точках угловой коэффициент касательной к кубической параболе $y=x^3$ равен 3?

398. Составить уравнение касательной к параболе $y=x^2-$ $-3x-1$ в точке (3; 4).

399. Составить уравнение касательной к гиперболе $y=1/x$ в точке (1; 1).

400. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^2-3$ при $x=2$.

401. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3-4x^2+8x+6$ в точке (2; 14).

402. Найти касательную к кривой $y=x^3+x$ в точке с абсциссой $x=1$.

403. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y=x^2$ и $y=x^3$ параллельны?

404. Под какими углами пересекаются параболы $y=x^2$ и $y^2=x$?

2. Механический смысл производной

Механическое истолкование производной было впервые дано И. Ньютоном. Оно заключается в следующем: скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени, т. е.

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, если закон движения материальной точки задан уравнением $s=f(t)$, то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определенный момент времени нужно найти производную $s'=f'(t)$ и подставить в нее соответствующее значение t. Для определенности будем считать, что путь измеряется в метрах, а время — в секундах.

405. Путь, пройденный материальной точкой, задается следующей функцией времени: $s=3t^2-2t+4$. Найти скорость движения точки в конце 5-й секунды.

Решение. Находим производную: $\frac{ds}{dt}=6t-2$; при $t=5$ получим $\frac{ds}{dt}=6\cdot5-2=28$ (м/с). Итак, $v=\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=5}=28$ м/с.

406. Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3+t^2-4$. Найти ее скорость в момент времени $t=4$.

407. Найти скорость движения материальной точки в конце 3-й секунды, если движение точки задано уравнением $s=t^2+11t+30$.

408. Точка движется прямолинейно по закону $s=6t-t^2$. В какой момент ее скорость окажется равной нулю?

409. Два тела движутся прямолинейно: одно по закону $s=t^3+t^2-27t$, другое — по закону $s=t^2+1$. Определить момент, когда скорости этих тел окажутся равными.

410. Высота тела, брошенного вертикально вверх, меняется в зависимости от времени по закону $H=200t-4{,}9t^2$. Найти скорость тела в конце 10-й секунды. Сколько секунд тело будет лететь вверх и какой наибольшей высоты оно достигнет?

Решение. Скорость тела определяется выражением $v=\frac{dH}{dt}=200-9{,}8t$; при $t=10$ имеем $v=102$ (м/с).

В тот момент, когда тело достигает максимальной высоты, его скорость равна нулю. Следовательно, для этого момента $\frac{dH}{dt}=200-9{,}8t=0$, откуда $t=\frac{200}{9{,}8}\approx20{,}4$ (с).

Подставляя это значение в уравнение движения, получим наибольшую высоту, на которую поднимается тело:

$$s=200\cdot20{,}4-4{,}9\cdot20{,}4^2\approx2040{,}8 \text{ (м)}.$$

411. Для машины, движущейся со скоростью 30 м/с, тормозной путь определяется формулой $s(t)=30t-16t^2$, где $s(t)$ — путь в метрах, t — время торможения в секундах. В течение какого времени осуществляется торможение до полной остановки машины? Какое расстояние пройдет машина с начала торможения до полной ее остановки?

412. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки?

413. Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $s=2t^2+3t-1$. Найти кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 3 с после начала движения.

Решение. Найдем скорость движения тела в любой момент времени t:

$$v=\frac{ds}{dt}=4t+3.$$

Вычислим скорость тела в момент времени $t=3$:

$$v_{t=3}=4\cdot 3+3=15 \text{ (м/с)}.$$

Определим кинетическую энергию тела в момент времени $t=3$:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{8\cdot 15^2}{2}=900 \text{ (Дж)}.$$

414. Найти кинетическую энергию тела через 4 с после начала движения, если его масса равна 25 кг, а закон движения имеет вид $s=3t^2-1$.

3. Производная второго порядка и ее механический смысл

Производную от данной функции часто называют *первой производной* (или *производной первого порядка*). Очевидно, что производная также является функцией, и если она дифференцируема, то от нее, в свою очередь, можно взять производную, которую называют *второй производной* (или *производной второго порядка*) и обозначают y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производной третьего порядка (или *третьей производной*) называют производную от второй производной. Ее обозначают y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Например, для функции $y=x^4$ имеем $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$.

Вообще, *производной n-го порядка* от функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка. Ее обозначают: $y^{(n)}$, $f^n(x)\frac{d^ny}{dx^n}$. Таким образом, производную n-го порядка можно найти последовательным дифференцированием данной функции.

415—422. Найти производные второго порядка заданных функций:

415. $y=x^3$. **416.** $y=\sin x$.
417. $y=\cos^2 x$. **418.** $y=2^x$.
419. $y=\operatorname{ctg} x$. **420.** $y=\ln(2x-3)$.
421. $y=\sqrt{1+x^2}$. **422.** $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

423—432. Найти производные третьего порядка заданных функций:

423. $y=x^4$. **424.** $y=\frac{1}{5}x^5$.
425. $y=\cos x$. **426.** $y=e^x$.
427. $y=\sin^2 x$. **428.** $y=\ln x$.
429. $y=e^{2x}$. **430.** $y=\cos 5x$.
431. $y=x\ln x$. **432.** $y=e^x\cos x$.

Рассмотрим механический смысл производной второго порядка.

Пусть тело движется прямолинейно по закону $s=f(t)$. Как известно, скорость v движения тела в данный момент времени равна производной пути по времени, т. е. $v=s'$.

Если тело движется неравномерно, то скорость v с течением времени изменяется и за промежуток времени Δt получает приращение Δv. В этом случае величина отношения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, показывающая изменение скорости в единицу времени, называется *средним ускорением* в промежутке времени от t до $t+\Delta t$.

Пусть $\Delta t\to 0$; тогда $(t+\Delta t)\to t$, а среднее ускорение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ стремится к величине, которая называется *ускорением* в данный момент времени t. Следовательно, ускорение движущегося тела представляет собой скорость изменения его скорости.

Обозначив ускорение через a, получим

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'=(s')'=s''.$$

Таким образом, *ускорение прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.*

В этом и заключается механический смысл второй производной.

433. Точка движется прямолинейно по закону $s=3t^2-3t+8$. Найти скорость и ускорение точки в момент $t=4$.

Решение. Для определения скорости нужно найти первую производную данной функции при $t=4$. Имеем

$$v=s'=(3t^2-3t+8)'=6t-3;\quad v_{t=4}=6\cdot 4-3=21\ \text{(м/с)}.$$

Ускорение равно второй производной функции при $t=4$, т. е.

$$a=s''=(s')'=(6t-3)'=6.$$

Величина ускорения оказалась постоянной для любого значения t; значит, движение точки по заданному закону происходит с постоянным ускорением.

434. Материальная точка движется по закону $s=2t^3-6t^2+4t$. Найти ее ускорение в конце 3-й секунды.

Решение. Находим $v=s'=6t^2-12t+4$, $a=s''=12t-12$, откуда при $t=3$ получим $a=12\cdot 3-12=24$ (м/с^2).

435. В момент времени t тело находится на расстоянии $s=\frac{1}{4}t^4+4t^3+16t^2$ км от места отправления. Найти его ускорение через 2 ч.

Решение. Находим $v=s'=t^3+12t^2+32t$, $a=v'=s''=3t^2+24t+32$. При $t=2$ имеем $a=3\cdot 4+24\cdot 2+32=92$ (км/ч^2).

436. Вычислить ускорение материальной точки в конце 3-й секунды, если точка движется по закону $s=t^3+2t^2$.

437. Путь, пройденный клетью подъемной машины, определяется уравнением $h=4+5t$. Найти скорость и ускорение в любой момент времени.

438. Определить момент t, в который ускорение прямолинейного движения, совершаемого по закону $s=-\frac{1}{6}t^3+3t^2-5$, равно нулю. Какова при этом скорость?

439. Закон движения частицы определяется уравнением $s(t)=t^3-t$. Каково ускорение частицы в момент, когда ее скорость равна 11 м/с?

440. Точка движется вдоль оси абсцисс по закону $x=2t^3-4t^2+$ $+2t+3$, где t — время в секундах, отсчитываемое от $t=0$, а x — расстояние движущейся точки от начала координат в метрах. Требуется: а) определить закон изменения скорости и ускорения движения от времени t; б) найти начальную скорость и скорость в момент $t=3$ с; в) установить, существуют ли моменты времени, когда скорость равна нулю, и если да, то какие положения движущейся точки соответствуют этим моментам.

Решение. а) Для определения скорости движения найдем производную пути по времени:

$$v=\frac{dx}{dt}=6t^2-8t+2=2(3t^2-4t+1),$$

а для определения ускорения движения — производную скорости по времени:

$$a=\frac{dv}{dt}=2(6t-4)=4(3t-2).$$

б) Если $t=0$, то $v=2$ (м/с) (начальная скорость); если $t=3$, то $v=32$ (м/с).

в) Условие $v=0$ означает, что $3t^2-4t+1=0$. Решая это уравнение, получим $t=\frac{2}{3}\pm\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}=\frac{2}{3}\pm\frac{1}{3}$. Следовательно, значение $v=0$ достигается дважды: сначала — в момент $t=1/3$ с, а затем — в момент $t=1$.

Найдем абсциссы движущейся точки в эти моменты времени:

$$x\big|_{t=1/3}=(2t^3-4t^2+2t+3)_{t=1/3}=3\frac{8}{27}\text{ м};\quad x\big|_{t=1}=3\ (\text{м}).$$

441. Тело, масса которого 30 кг, движется прямолинейно по закону $s=4t^2+t$. Доказать, что движение тела происходит под действием постоянной силы.

Решение. Имеем $s'=8t+1$, $s''=8$. Следовательно, $a(t)=$ $=8$ (м/с^2), т. е. при данном законе движения тело движется с постоянным ускорением 8 м/с^2. Далее, так как масса тела постоянна (30 кг), то по второму закону Ньютона действующая на него сила $F=ma=$ $=30\cdot 8=240$ (Н) — также постоянная величина.

442. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t)=t^3-3t^2+2$. Найти силу, действующую на тело в момент времени $t=4$ с.

443. Показать, что если тело движется по закону $s=$ $=ae^t+be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

4. Приложения производной к решению физических задач

Как известно, производная характеризует мгновенную скорость прямолинейного движения. Однако этим не исчерпывается использование производной. При изучении неравномерно меняющихся величин скорость их изменения всегда выражается с помощью производной.

Понятие скорости, заимствованное из физики, удобно при исследовании поведения любой функции. Какую бы зависимость ни выражала функция $y=f(x)$, отчошение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения функции $f(x)$ относительно изменения аргумента x, а $f'(x_0)$ — мгновенная скорость изменения функции $f(x)$ при некотором значении $x=x_0$.

444. Найти скорость изменения функции $y=0{,}3x^2+0{,}2x-5$ в произвольной точке.

445. Определить скорость изменения функции $y=(x^2+2)x-$ -1 при $x=6$.

446. Доказать, что скорость изменения линейной функции постоянна.

447. Убедиться, что скорость изменения квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ выражается линейной функцией.

448. Стороны a и b прямоугольника изменяются по закону $a=(2t+1)$ см, $b=(3t+2)$ см. С какой скоростью изменяется его площадь S в момент времени $t=4$ с?

Р е ш е н и е. Находим $S=ab=(2t+1)(3t+2)=6t^2+7t+2$, $v=$ $=S'_t=(6t^2+7t+2)'=12t+7$. При $t=4$ получим $v_{t=4}=12\cdot4+7=$ $=55$ (см/с).

449. Основание параллелограмма a изменяется по закону $a=(2+3t)$ см, а высота h — по закону $h=(3t-1)$ см. Определить скорость изменения его площади в момент $t=2$ с.

450. Убедиться, что скорость изменения логарифмической функции $y=\ln x$, где $x>0$, обратно пропорциональна x.

451. Убедиться, что скорость изменения показательной функции $y=e^{kx}$, где $k\neq0$, пропорциональна y.

452. Чему равна скорость изменения функций $y=\sin x$? Вычислить ее значение для $x=\pi/4$.

Так как в практических приложениях нас обычно интересует не только сама функция, но и скорость ее изменения, то производная, будучи характеристикой скорости изменения функции, имеет самые широкие практические применения в вопросах физики, химии, геометрии и т. д. Приведем некоторые конкретные примеры использования понятия производной при определении скорости различных процессов.

1. Предположим, что в момент времени t масса еще не распавшегося радиоактивного вещества была равна m, а через некоторое время, в момент $t+\Delta t$, масса его уменьшилась (так как часть вещества превратилась в продукт распада) и стала равна $m+\Delta m$ (здесь Δm отрицательно, поскольку масса радиоактивного вещества с течением времени уменьшается). Таким образом, за время Δt масса имевшегося радиоактивного вещества изменилась на Δm.

Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ представляет собой среднюю скорость распада за промежуток времени Δt. Чем меньше этот промежуток, тем точнее указанное отношение выражает мгновенную скорость распада. Поэтому можно сказать, что мгновенная скорость распада в момент времени t равна $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}$.

2. Мгновенная мощность есть производная $W=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}$, где ΔA — работа, совершаемая за время Δt.

3. Если V — объем жидкости, на который действует внешнее давление P, то производная $k=\lim\limits_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta P}$, дает коэффициент сжатия жидкости при данном давлении.

4. Если твердое тело вращается вокруг оси, то угол поворота φ есть функция от времени t. Угловая скорость вращения в данный момент t численно равна производной $\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

5. Сила тока есть производная $I=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}$, где Δq — положительный электрический заряд, переносимый через сечение проводника за время Δt.

6. Теплоемкость при температуре T есть производная $C=$ $=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$, где ΔQ — количество теплоты, необходимое для изменения температуры на ΔT.

453. Маховик за время t поворачивается на угол $\varphi=8t-$ $-0{,}5t^2$ (t — в секундах, φ — в радианах). Определить угловую скорость ω в конце 3-й секунды. Найти момент, когда прекратится вращение.

Решение. Имеем $\varphi'_t=(8t-0{,}5t^2)'=8-t$. Так как $\omega=(8-t)$ рад/с, то при $t=3$ получим $\omega=5$ (рад/с). Вращение прекратится в момент, когда $\omega=8-t=0$, т. е. при $t=8$ с.

454. Маховик, задерживаемый тормозом, за t с поворачивается на угол $\varphi=5t-0{,}4t^2$ (рад). Определить угловую скорость ω

маховика в момент времени $t=2$ с и найти момент остановки вращения.

455. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента времени $t=0$, задается формулой $Q=3t^2-3t+4$. Найти силу тока в конце 6-й секунды.

Решение. Сила тока есть производная количества электричества по времени: следовательно, нужно найти производную функции $Q=3t^2-3t+4$ и вычислить ее значение при $t=6$ с. Имеем $I=Q'=6t-3$, откуда при $t=6$ получим $I=33$ (А).

456. Количество электричества q в проводнике меняется по закону $q=\sin(2t+1)k$. Определить скорость I изменения функции в любой момент времени t (I — в амперах, t — в секундах).

457. Найти силу тока I в момент $t=5$, если $q=(25e^{2t}+\cos(3t-1))k$ (I — в амперах, t — в секундах).

458. Сила тока I изменяется в зависимости от времени t по закону $I=0{,}4t^2$ (I — в амперах, t — в секундах). Найти скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

459. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнением $I=2t^2-5t$ (I — в амперах, t — в секундах). Найти скорость изменения силы тока в конце 10-й секунды.

460. Количество теплоты Q, получаемое некоторым веществом при нагревании его от 0 до T, определяется по формуле $Q=0{,}1054t+0{,}000002t^2$ (Q — в джоулях, t — в кельвинах). Найти теплоемкость этого вещества при 100 К.

Решение. Находим теплоемкость:

$$C=Q'_T=0{,}1054+0{,}000004T.$$

При $T=100$К получим

$$C_{T=100}=0{,}1054+0{,}000004\cdot 100=0{,}1058 \text{ (Дж/К)}.$$

461. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T=0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени 10 с?

Решение. Скорость нагревания тела есть производная температуры T по времени t:

$$\frac{dT}{dt}=(0{,}2t^2)'=0{,}4t.$$

Определим скорость нагревания тела при $t=10$:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=10}=0{,}4\cdot 10=4 \text{ (град/с)}.$$

462. Температура тела T изменяется в зависимости от времени t по закону $T=0{,}5t^2-2t$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t=5$ с?

§ 6. Дифференциал

1. Понятие дифференциала

Нахождение дифференциала функции, так же как и нахождение производной, является одной из основных задач дифференциального исчисления.

Пусть точка движется прямолинейно по закону $s=f(t)$; тогда ее скорость равна $v=f'(t)$. За время Δt точка пройдет некоторый путь Δs. Если Δt невелико, то скорость не успеет существенно измениться и движение можно считать равномерным. При этом пройденный точкой путь составит $v\Delta t=f'(t)\Delta t$; он пропорционален истекшему времени Δt. Произведение $f'(t)\Delta t$ называют *дифференциалом* пути и обозначают ds. Фактический путь Δs отличается от пути ds, но если промежуток времени Δt достаточно мал, то можно считать, что $ds \approx \Delta s$.

К такому же заключению можно прийти, рассматривая другие неравномерные процессы. Во всех случаях для перехода от неравномерных процессов к равномерным истинное изменение какой-либо величины заменяют ее дифференциалом. Эта замена основана на том, что на протяжении малого промежутка времени всякий процесс приближается к равномерному.

Дадим общее определение дифференциала.

Пусть дана функция $y=f(x)$, дифференцируемая в точке x. Это значит, что функция в точке x имеет производную, т. е. существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$. Следовательно, для функции $f(x)$ выполняется равенство $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Умножив обе части этого равенства на Δx, получим

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x. \tag{1}$$

Здесь y' есть функция от x и не зависит от Δx; следовательно, Δx входит в первое слагаемое в первой степени (т. е. линейно). Поэтому первое слагаемое представляет собой линейную часть приращения функции (про второе слагаемое этого сказать нельзя, поскольку α также зависит от Δx).

Тогда при $\Delta x\to 0$ вторым слагаемым $\alpha\Delta x$ можно пренебречь, и первое слагаемое $y'\Delta x$ будет являться главной частью приращения функции (исключая случай, когда $y'=0$).

Определение. Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной, называется *дифференциалом* функции и обозначается знаком d, т. е.

$$dy = y'\Delta x. \qquad (2)$$

Таким образом, для всякой функции $y=f(x)$ производная y' зависит только от одной переменной x, тогда как ее дифференциал зависит от двух независимых друг от друга переменных: x и Δx.

463. Найти приращение и дифференциал функции $y=x^2$ в точке $x=2$ при $\Delta x=0{,}1$.

Решение. $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$;

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,1}} = 2\cdot 2\cdot 0{,}1+(0{,}1)^2=0{,}4+0{,}01=0{,}41;$$

$$dy=y'\cdot\Delta x=(x^2)'\cdot\Delta x=2x\cdot\Delta x;\quad dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,1}} = 2\cdot 2\cdot 0{,}1=0{,}4.$$

464. Найти приращение функции $y=\frac{1}{2}x^2$ в точке $x=3$ при $\Delta x=0{,}01$.

465. Сравнить приращение и дифференциал функции $y=2x^3+5x^2$.

466. Дана функция $y=2x^2-3x+3$. Вычислить приращение и дифференциал функции при переходе аргумента от значения $x_1=1$ к значению $x_2=1{,}001$.

2. Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим график непрерывной функции $y=f(x)$ (рис. 107). Производная функции в точке с абсциссой x равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox, т. е.

$$y'=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Из рисунка видно, что касательная разбивает приращение функции $\Delta y=NM_1$ на два отрезка: M_1K, соответствующий в равенстве (1) слагаемому $\alpha\Delta x$, и NK, соответствующий в равенстве (1) слагаемому $y'\Delta x$.

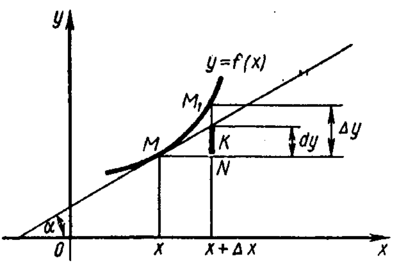


Рис. 107

Если приращение аргумента стремится к нулю (точка M_1 стремится занять положение M), то отрезок M_1K уменьшается значительно быстрее, чем отрезок NK.

Таким образом, приращение ординаты касательной NK является главной частью приращения функции $y=f(x)$.

Из треугольника MNK на-

находим $|NK|=|MN|\operatorname{tg}\alpha$. Так как $|MN|=\Delta x$, $\operatorname{tg}\alpha=y'$, то

$$|NK|=y'\Delta x=dy.$$

Итак, *дифференциал функции* $y=f(x)$ *геометрически изображается приращением ординаты касательной, проведенной в точке* $M(x;\,y)$ *при данных значениях* x *и* Δx.

3. Вычисление дифференциала

Рассмотрим функцию $y=x$. Из формулы $dy=y'\Delta x$ получаем $dx=\Delta x$, так как y можно заменить на x (по условию), а $y'=(x)'=1$.

Итак, дифференциал независимой переменной dx совпадает с его приращением Δx.

Учитывая это, дифференциал функции можно вычислить по формуле

$$dy=y'\,dx. \tag{3}$$

Так, если $y=x^3$, то $dy=(x^3)'dx=3x^2dx$; если $y=\sin x$, то $dy=\cos x\,dx$.

Очевидно, чтобы вычислить дифференциал функции, нужно ее производную умножить на dx.

Отсюда следует, что правила нахождения дифференциала остаются теми же, что и для нахождения производных.

Для удобства пользования выпишем основные формулы нахождения дифференциалов в виде таблицы:

I. $d(C)=0$.	II. $d(x)=dx$.
III. $d(u+v-w)=du+dv-dw$.	IV. $d(uv)=v\,du+u\,dv$.
V. $d(Cu)=C\,du$.	VI. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.
VII. $d(y(u(x)))=y'_u u'_x dx$.	VIII. $d(\ln x)=\dfrac{dx}{x}$.
IX. $d(\log_a x)=\dfrac{dx}{x\ln a}$.	X. $d(x^n)=nx^{n-1}dx$.
XI. $d(\sqrt{x})=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.	XII. $d(a^x)=a^x\ln a\,dx$.
XIII. $d(\sin x)=\cos x\,dx$.	XIV. $d(\cos x)=-\sin x\,dx$.
XV. $d(\operatorname{tg} x)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$.	XVI. $d(\operatorname{ctg} x)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.
XVII. $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.	XVIII. $d(\arccos x)=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
XIX. $d(\operatorname{arctg} x)=\dfrac{dx}{1+x^2}$.	XX. $d(\operatorname{arcctg} x)=-\dfrac{dx}{1+x^2}$.

467. Найти дифференциалы функций:

а) $y=\sqrt{x^3-3}$; б) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$; в) $y=x(x+1)$.

Решение. а) $dy=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}}dx$;

б) $dy=\frac{(x-1)'(x+2)-(x+2)'(x-1)}{(x+2)^2}dx=\frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2}dx=$

$=\frac{3}{(x+2)^2}dx=\frac{3dx}{(x+2)^2}$;

в) $dy=(x'(x+1)+(x+1)'x)dx=(x+1+x)dx=(2x+1)dx$.

468—477. Найти дифференциалы функций:

468. $y=\sqrt{2x}$. **469.** $y=\sqrt{x^2-3x}$.

470. $y=\frac{x}{x+5}$. **471.** $y=\frac{x-3}{x}$.

472. $y=\frac{x^2-1}{x+2}$. **473.** $y=\frac{x^2-3x+1}{x}$.

474. $y=x(x-3)$. **475.** $y=x^2(x+5)$.

476. $y=(x-3)(x+2)$. **477.** $y=(x^2-3x+2)(x^2+1)$.

4. Дифференциал сложной функции

Выведем формулу дифференциала сложной функции. При этом мы, конечно, можем воспользоваться формулой производной сложной функции. Однако сейчас мы убедимся в том, что нахождение дифференциала сложной функции имеет некоторые преимущества по сравнению с нахождением производной сложной функции.

Ранее было доказано, что $\Delta x=dx$ в том случае, когда аргумент x является независимой переменной. Поэтому и при решении предыдущих примеров, пользуясь формулой $dy=y'dx$, мы вычисляли дифференциалы лишь для тех функций, для которых аргумент x есть независимая переменная.

Пусть теперь дана функция $y=f(u(x))$, которая косвенно зависит от x через другую зависимую переменную u (например, $y=e^{\sin x}$ или $y=\operatorname{tg}x^5$), т. е. $f(u(x))$ — функция от функции или сложная функция. Очевидно, здесь x является независимой переменной, в то время как аргумент $u(x)$ есть зависимая переменная

Найдем дифференциал данной функции: $dy=(f(u(x)))'dx$. Но $(f(u(x)))'=f'_u u'_x$ согласно правилу производной сложной функции. Тогда

$$dy=f'_u u'_x dx.$$

Так как выражение $u'(x)dx$ есть дифференциал функции $u(x)$, то $u'(x)dx=du$ и, следовательно,

$$dy=f'(u)du. \tag{4}$$

Сравним теперь полученную формулу с формулой $dy=f'(x)dx$, где аргумент x есть независимая переменная и $dx=\Delta x$.

Хотя в формуле (4) аргумент u является зависимой переменной и $du \neq \Delta u$, но и в этом случае дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента.

Это свойство дифференциала сохранять неизменной формулу вычисления по отношению к любому преобразованию аргумента называется *инвариантностью* дифференциала.

Свойство инвариантности дифференциала позволяет вычисление дифференциала производить более наглядно.

Так, если $y_1 = e^{\sin x}$, то, используя формулу (4), получим $dy_1 = e^{\sin x} d(\sin x)$; если $y_2 = \sin 3x$, то $dy_2 = \cos 3x\, d(3x)$ и т. д.

При необходимости вычисление дифференциала можно продолжить, раскрыв выражение $du = u'(x)dx$. Для приведенных выше примеров имеем

$$dy_1 = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x\, dx;$$

$$dy_2 = \cos 3x d(3x) = 3\cos 3x\, dx.$$

478—489. Найти дифференциалы функций:

478. $y = \sin 5x$. **479.** $y = \cos^2 x$.

480. $y = \operatorname{tg}^3 4x$. **481.** $y = \operatorname{arctg} 2x$.

482. $y = \arccos x^3$. **483.** $y = \ln \sin x$.

484. $y = \ln \cos x^3$ **485.** $y = \ln \sin^3 5x$.

486. $y = \sqrt{\frac{1-x}{x^2}}$. **487.** $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$.

488. $y = \frac{\cos x}{1 - \sin x}$. **489.** $y = x^2 \sin \sqrt{x}$.

5. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Рассмотрим теперь вопрос об использовании дифференциала в приближенных вычислениях.

Для этого вернемся к формуле $\Delta y = y'\Delta x + \alpha\Delta x$, которую запишем в виде

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x,$$

где Δy — приращение функции, dy — дифференциал функции, а $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это позволяет сделать вывод о том, что

$$\Delta y \approx dy, \tag{5}$$

т. е. приближенное значение приращения функции совпадает с ее дифференциалом.

Функция может иметь довольно сложное выражение и ее приращение не всегда просто найти, но при достаточно малых значениях $|\Delta x|$ приращение функции можно заменить ее дифференциалом, исключая точки, где $y' = 0$.

Равенство (5) применяется для приближенных вычислений.

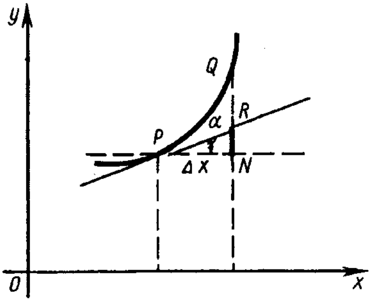


Рис. 108

Из рис. 108 видно, что дифференциал функции равен приращению $|NR|$ ординаты касательной, т. е. замена приращения функции на ее дифференциал геометрически означает, что *график функции заменяется отрезком PR касательной, проведенной к нему в точке касания P.* Такая замена естественна при достаточно малом $|\Delta x|$.

Итак, при достаточно малом $|\Delta x|$ приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ обладает достаточно высокой степенью точности. Отсюда находим

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx dy$$

или

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy. \qquad (6)$$

Это одна из основных формул для приближенных подсчетов.

Приближенное вычисление приращения функции

490. Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислить приближенно изменение функции $y=x^3-7x^2+80$ при изменении аргумента x от 5 до 5,01.

Решение. Находим

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = (3x^2-14x)\Delta x.$$

При $x=5$, $\Delta x=5{,}01-5=0{,}01$ получим

$$\Delta y\big|_{\substack{x=5,\\ \Delta x=0{,}01}} = (3\cdot 5^2-14\cdot 5)0{,}01=0{,}05.$$

491. Как приближенно изменится значение функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-5$ при изменении аргумента x от 3 до 3,1?

492. Найти приближенное значение приращения функции $y=3x^2+5x+1$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}001$.

493. С помощью дифференциала найти приближенно приращение функции $y=\ln x$ при $x=10$ и $\Delta x=0{,}01$.

494. На сколько увеличится объем шара при нагревании, если его радиус $R=5$ см удлинится на $\Delta R=0{,}002$ см?

495. Найти увеличение объема куба при нагревании, если его ребро 10 см удлинится на 0,01 см.

Вычисление погрешности приближенного приращения функции

496. Найти приближенно приращение функции $y=3x^2+2$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$. Определить абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Решение. Так как приращение аргумента — величина малая, то приращение функции можно заменить ее дифференциалом:

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2\\ dx=0{,}001}} = 6x\,dx\Big|_{\substack{x=2,\\ dx=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 = 0{,}012.$$

Найдем ошибку, полученную при замене приращения функции ее дифференциалом. Для этого вычислим точное значение приращения функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 + 2 - (3x^2+2) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + {}$$
$$+ 2 - 3x^2 - 2 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2;$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2,\\ \Delta x=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 + 3\cdot 0{,}000001 = 0{,}012003.$$

Сравнивая точное значение Δy с приближенным, видим, что абсолютная погрешность есть

$$\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}000003.$$

Относительная погрешность составляет

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000003}{0{,}012003} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\ \%.$$

497. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функций $y = x^3 + 2x$ ее дифференциалом в точке $x = 2$ при $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. $\Delta y = ((x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)) - (x^3 + 2x) = 3x^2\Delta x + {}$
$+ 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x;$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2,\\ \Delta x=0{,}1}} = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 2\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + 2\cdot 0{,}1 = 1{,}461;$$

$$dy = y'\Delta x = (3x^2+2)\Delta x;\quad dy\Big|_{\substack{x=2,\\ \Delta x=0{,}1}} = (3\cdot 2^2+2)\cdot 0{,}1 = 1{,}4;$$

$$|\Delta y - dy| = 1{,}461 - 1{,}4 = 0{,}061;\quad \delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}061}{1{,}461} \approx 0{,}042 = 4\ \%.$$

498. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = x^2 - 2x$ ее дифференциалом в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0{,}01$.

499. Найти абсолютную и относительную погрешности приближенного приращения функции $y = 2x^3 + 5$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

500. Ребро куба длиной 30 см увеличено на 0,1 см. Определить приближенно величину изменения объема куба и найти погрешность этого приближения.

Вычисление приращения функции с заданной точностью

501. С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции $y = x\sqrt{x^2+5}$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}2$.

Решение. Находим дифференциал данной функции:

$$dy = y'dx = \left(\sqrt{x^2+5} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx.$$

При $x=2$ и $\Delta x=0{,}2$ получим

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2,\\ dx=0,2}} = \left(\sqrt{4+5}+\frac{4}{\sqrt{4+5}}\right)\cdot 0{,}2 \approx 0{,}866 \approx 0{,}87.$$

502. С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,001 приращение функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ при $x=1$ и $\Delta x=0{,}2$.

Применение дифференциала для установления ошибок в вычислениях

503. Непосредственным измерением нашли, что диаметр круга равен 6,4 см, причем максимальная ошибка не превышает 0,05 см. Найти приближенно максимальную ошибку в оценке площади, вычисляемой по формуле $S=\frac{1}{4}\pi x^2$ (x — диаметр).

Решение. Очевидно, что точная величина максимальной ошибки есть ΔS, причем x изменяется от 6,4 до 6,45. Приближенная же величина максимальной ошибки есть соответствующий дифференциал dS. Находим

$$dS=S'(x)dx=\frac{1}{2}\pi x\,dx\Big|_{\substack{x=6,4\\ dx=0,05}}=\frac{1}{2}\pi\cdot 6{,}4\cdot 0{,}05=0{,}5024\ (\text{см}^2).$$

Относительная ошибка в оценке площади составляет

$$\frac{dS}{S}=\frac{2dx}{x}=\frac{2\cdot 0{,}05}{6{,}4}\approx 0{,}015=1{,}5\,\%.$$

504. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении площади квадратной комнаты, если длина стороны измерена с погрешностью не более 0,05 м и составляет 4,6 м.

505. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении объема куба, если ребро, равное 12,5 см, измерено с погрешностью, не превышающей 0,01 см.

506. Доказать, что относительная погрешность корня равна относительной погрешности подкоренного числа, деленной на показатель степени корня.

507. Доказать, что относительная погрешность $\sqrt[3]{x}$ равна $dx/(3x)$.

508. Найти относительную погрешность, допускаемую при вычислении стороны квадрата, если его площадь 68,5 см^2 измерена с погрешностью 0,05 см.

509. Площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi R^2$. При измерении радиус R оказался равным 5,2 см, причем максимально возможная при этом погрешность измерения ΔR не превышает 0,05 см. Определить абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при вычислении площади круга по указанной формуле.

Нахождение приближенного значения функции

510. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt{3x^2+1}$ при $x=1{,}02$.

Решение. Воспользуемся формулой (6), т. е. $f(x+\Delta x)\approx$

$\approx f(x)+dy$. В данном случае следует принять $x=1$. Тогда $\Delta x=$ $=1{,}02-1=0{,}02$. Значение функции при $x=1$ определяется легко: $f(1)=\sqrt{3\cdot 1^2+1}=2$. Далее, находим

$$dy=(\sqrt{3x^2+1})'dx=\frac{6x\,dx}{2\sqrt{3x^2+1}}=\frac{3x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}},$$

откуда

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0{,}02}}=\frac{3\cdot 1\cdot 0{,}02}{\sqrt{3\cdot 1^2+1}}=\frac{0{,}06}{2}=0{,}03.$$

Следовательно,

$$f(1{,}02)\approx f(1)+0{,}03=2+0{,}03=2{,}03.$$

Если значение данной функции при $x=1{,}02$ вычислить непосредственно, то получим $f(1{,}02)=\sqrt{3\cdot 1{,}02^2+1}=2{,}03007\ldots$, т. е. разность между точным значением данной функции при $x=1{,}02$ и ее приближенным значением является числом очень малым: $2{,}03007-2{,}03=$ $=0{,}00007$.

Замечания. 1. Чтобы правильно применять формулу приближенного вычисления значения функции, нужно научиться подбирать функцию $f(x)$. Так, для нахождения $2{,}08^6$ нужно взять $f(x)=x^6$, $x=2$, $\Delta x=0{,}08$; для вычисления $\sqrt[3]{9}$ — взять $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=8$, $\Delta x=1$.

2. При использовании дифференциала функции для приближенного вычисления значения функции и ее приращения нужно помнить, что формулы $\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x$ и $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x)\Delta x$ дают достаточно точные результаты только при условии, что $|\Delta x|$ близко к нулю.

Например, вычисляя значение функции $f(x)=x^3+2x$ при $x=3{,}986$, следует положить $x_0=4$, $\Delta x=-0{,}014$ (было бы ошибкой полагать $x_0=$ $=3$; $\Delta x=0{,}986$).

511. Вычислить $\operatorname{tg}46°$, исходя из значения функции $y=\operatorname{tg}x$ при $x=45°$ и заменяя ее приращение дифференциалом.

Решение. Здесь $x=45°$, $\Delta x=46°-45°=1°$. Чтобы воспользоваться формулой (6), нужно углы выразить в радианах: $x=\pi/4$, $\Delta x=$ $=0{,}0175$.

Вычисляем дифференциал функции при $x=\pi/4$ и $dx=\Delta x=0{,}0175$:

$$dy=\frac{1}{\cos^2 x}dx\Big|_{\substack{x=\pi/4,\\ dx=0{,}0175}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot 0{,}0175=0{,}0350.$$

Следовательно, $\Delta y\approx 0{,}0350$.

Теперь находим

$$\operatorname{tg}46°=y+\Delta y\Big|_{\substack{x=\pi/4\\ dx=0{,}0175}}\approx\operatorname{tg}45°+0{,}0350=1{,}0350.$$

Вычисления с помощью четырехзначных таблиц дают: $\operatorname{tg}46°=$ $=1{,}0355$.

512. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[5]{x}$ и найдем ее дифференциал: $dy=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}dx$. Вычислим приращение функции Δy при изменении x от 32 до 31, т. е. при $\Delta x=-1$:

$$\Delta y \approx dy = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} dx \Big|_{\substack{x=32,\\ dx=-1}} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{8}(-1) = -0{,}025.$$

Следовательно,

$$\sqrt[5]{31} = y + \Delta y \Big|_{\substack{x=32\\ dx=-1}} \approx y + dy = \sqrt[5]{32} - 0{,}025 = 1{,}975.$$

513. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x^2 + 2x}$ при $x = 2{,}004$, исходя из ее точного значения при $x_0 = 2$ и заменяя Δy на dy.

Решение. Здесь начальное значение $x_0 = 2$, наращенное значение $x = x_0 + \Delta x = 2{,}004$, $\Delta x = 2{,}004 - 2 = 0{,}004$.

Найдем начальное значение функции: $y|_{x=2} = \sqrt[3]{2^2 + 4} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Найдем дифференциал:

$$dy = (\sqrt[3]{x^2 + 2x})' dx = ((x^2 + 2x)^{1/3})' dx = \frac{1}{3}(x^2 + 2x)^{-2/3}(2x + 2) dx.$$

При $x = 2$ и $dx = 0{,}004$ получим $dy = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot 6 \cdot 0{,}004 = 0{,}002$.

Вычислим приближенное значение функции: $y|_{x=2{,}004} = 2 + 0{,}002 = 2{,}002$.

514. Вычислить приближенно $3{,}002^4$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4$. Здесь $x_1 = 3{,}002$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}002$ и, следовательно, $f(x_1) = f(3{,}002) = 3{,}002^4$. Находим $f(x_0) = f(3) = 3^4 = 81$, $f'(x_0)\Delta x = 4 \cdot 3^3 \cdot 0{,}002 = 4 \cdot 27 \cdot 0{,}002 = 0{,}216$. Итак, $3{,}002^4 \approx 81 + 0{,}216 = 81{,}216$.

Проверка показывает, что точное значение числа $3{,}002^4$ равно 81,216116096016. Относительная погрешность достаточно мала и составляет 0,00014 %.

515. Вычислить приближенно $1{,}998^5$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^5$. Здесь $x_1 = 1{,}998$, $x_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}002$, $f(x_1) = f(1{,}998) = 1{,}998^5$. Далее, находим $f(x_0) = f(2) = 2^5 = 32$, $f'(x_0)\Delta x = 5 \cdot 2^4(-0{,}002) = 5 \cdot 16(-0{,}002) = -0{,}16$.

В результате получаем $1{,}998^5 \approx 32 - 0{,}16 = 31{,}84$.

516. Найти приближенно $\sin 31°$.

Решение. Будем искать приближенное значение функции $y = \sin x$ при $x = 31°$, исходя из ее точного значения при $x = 30°$. Имеем $\sin 30° = 0{,}5$, $dx \approx \Delta x = 31° - 30° = 1°$ (или в радианах $dx = 0{,}0175$).

Найдем $dy = \cos x\, dx$. Далее, при $x = 30°$, $dx = 0{,}0175$ получим $dy = \cos 30° \cdot 0{,}0175 = 0{,}866 \cdot 0{,}0175 = 0{,}015$.

Таким образом, $\sin 31° \approx \sin 30° + dy = 0{,}5 + 0{,}015 = 0{,}515$.

517—520. Вычислить приближенные значения следующих функций:

517. $y = x^3$ при $x = 10{,}03$.

518. $y = x^4 - 2x + 4$ при $x = 3{,}002$.

519. $y = \sqrt{x}$ при $x = 24{,}99$.

520. $y = \sqrt{x^3 - 2x}$ при $x = 1{,}96$.

521—535. Найти приближенные значения:

521. $2{,}005^4$.	**522.** $2{,}002^{10}$.	**523.** $2{,}995^5$.
524. $1{,}995^{10}$.	**525.** $1{,}998^6$.	**526.** $\sqrt{1{,}07}$.
527. $\sqrt{0{,}84}$.	**528.** $\sqrt[3]{0{,}95}$.	**529.** $\sqrt{25{,}4}$.
530. $\sqrt{81{,}8}$	**531.** $\sqrt{36{,}7}$.	**532.** $\sqrt[3]{26{,}8}$.
533. $\cos 61°$.	**534.** $\sin 60°3$.	**535.** $2^{2{,}98}$

§ 7. Исследование функций и построение графиков

Возрастание и убывание функций
Исследование функции на экстремум с помощью первой производной
Исследование функции с помощью второй производной
Наибольшее и наименьшее значения функции
Практическое применение производной
Вогнутость и выпуклость. Точки перегиба
Построение графиков функций

1. Возрастание и убывание функций

Понятие производной — одно из важнейших в математике. С помощью производной, учитывая ее механический смысл (скорость изменения некоторого процесса) и геометрический смысл (угловой коэффициент касательной), можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, что позволило очень точно строить их графики, находить их наибольшие и наименьшие значения и т. д.

Познакомимся с основными идеями, связанными с исследованием функций. Для этого рассмотрим график какой-нибудь функции $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ (рис. 109).

Интуитивно ясно, что в интервалах (a, x_1) и (x_2, b) данная функция возрастает, а в интервале (x_1, x_2) — убывает.

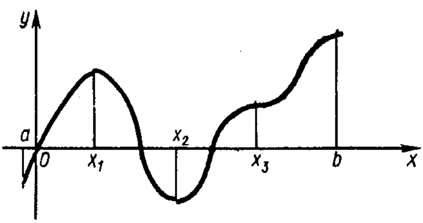


Рис. 109

В дальнейшем будем рассматривать только дифференцируемые функции.

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* в некотором интервале, если в точках этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Согласно определению возрастающей на некотором интервале функции имеем: если $x_2>x_1$, то $f(x_2)>f(x_1)$; если же $x_2<x_1$, то $f(x_2)<f(x_1)$. Отсюда следует, что если $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$, а если $x_2-x_1<0$, то $f(x_2)-f(x_1)<0$.

Так как разности, стоящие в левых частях полученных неравенств, являются приращениями аргумента и функции, то приходим к заключению, что если $\Delta x>0$, то $\Delta y>0$, а если $\Delta x<0$, то и $\Delta y<0$. Иными словами, приращения Δx и Δy имеют одинаковые знаки.

Тогда в обоих случаях отношение приращения функции к приращению аргумента положительно, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Далее, поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на рассматриваемом интервале, то, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0$, а это значит, что $f'(x)>0$.

Рассуждая аналогично, можно показать, что в случае убывания функции ее производная отрицательна, т. е. $f'(x)<0$.

Все вышеизложенное можно сформулировать как необходимый признак возрастания (убывания) функции.

▲ **Теорема 1.** *Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) в данном интервале, то производная этой функции не отрицательна (не положительна) в этом интервале.*

Геометрически утверждение теоремы означает, что касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы α с положительным направлением оси Ox или, быть может, в отдельных точках, вроде точки M (рис. 110), касательная парал-

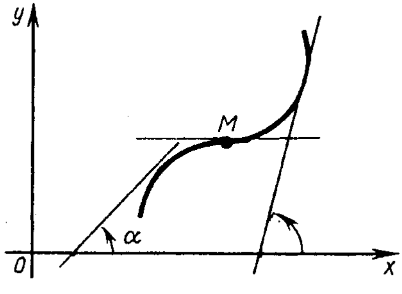


Рис. 110

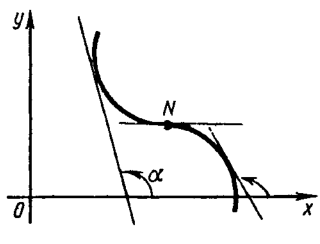


Рис. 111

лельна оси Ox; значит, $f'(x)=$ $=\operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$. Аналогично, касательные к графику убывающей функции образуют тупые углы α с положительным направлением оси Ox или, быть может, в отдельных точках, вроде точки N (рис. 111), касательная параллельна оси Ox; поэтому $f'(x)=$ $=\operatorname{tg}\alpha \leqslant 0$.

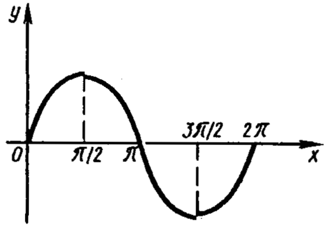


Рис. 112

Интервалы, на которых функция только возрастает или же только убывает, называются *интервалами монотонности* функции, а сама функция называется *монотонной* на этих интервалах.

Например, функция $y=\sin x$ (рис. 112) не монотонна на интервале $0<x<2\pi$, но является монотонной на интервале $\pi/2<x<3\pi/2$ (во всех точках этого интервала функция убывает).

Обратное заключение также справедливо, оно выражается следующей теоремой.

▲ **Теорема 2.** *Если производная функции $y=f(x)$ положительна (отрицательна) в некотором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает).*

Поясним эту теорему геометрически. Имеем $f'(x)=k=\operatorname{tg}\alpha$. Если $f'(x)>0$, то $\operatorname{tg}\alpha>0$, т. е. угол α — острый, а это возможно лишь при возрастании функции (рис. 113).

Если же $f'(x)<0$, то $\operatorname{tg}\alpha<0$, т. е. угол α — тупой, а это возможно лишь при убывании функции (рис. 114).

Таким образом, возрастание или убывание функции на интервале вполне определяется знаком производной этой функции. В интервале знакопостоянства производной функция является монотонной.

536. Показать, что функция $y=2x^3+3x^2-12x+1$ убывает в интервале $(-2, 1)$.

Решение. Достаточно убедиться в том, что производная функции при $-2<x<1$ отрицательна. Находим

$$y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1).$$

Множитель $x+2$ на интервале $(-2, 1)$ положителен, а множитель $x-1$ отрицателен. Значит, производная во всех точках указанного интервала отрицательна, а, следовательно, функция убывает.

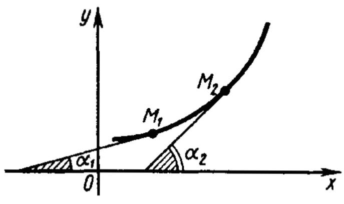


Рис. 113

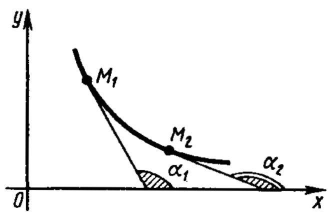


Рис. 114

537. Показать, что функция $y=\operatorname{tg} x$ в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ монотонно возрастает.

Решение. Находим производную $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$. В указанном интервале $\cos x$ изменяется от 0 до 1; поэтому $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}>0$. Следовательно, данная функция является возрастающей.

538. Исследовать поведение функции $f(x)=3+\sqrt{x}$ в точке $x=4$.

Решение. Найдем производную; $f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$. Вычислим значение производной при $x=4$: $f'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}=\frac{1}{4}>0$. Отсюда заключаем, что данная функция возрастает в точке $x=4$.

539. Показать, что функция $y=\sqrt{2x-x^2}$ возрастает в интервале $(0, 1)$ и убывает в интервале $(1, 2)$.

540. Показать, что функция $y=x^3+x$ везде возрастает.

541. Показать, что функция $y=\operatorname{arctg} x - x$ везде убывает.

542. Показать, что функция $y=\frac{x^2-1}{x}$ возрастает в любом интервале, не содержащем точки $x=0$.

Мы установили, что интервалы возрастания или убывания функции совпадают с интервалами, в которых производная этой функции сохраняет знак. Следовательно, переход от возрастания к убыванию или обратно возможен лишь в точках, где производная меняет знак. Такими точками могут служить только такие точки, в которых $f'(x)=0$, а также точки разрыва.

Поэтому интервалы монотонности мы получим, если разделим область определения функции на части, границами которых служат те точки, в которых $f'(x)=0$, и точки разрыва.

Сформулируем теперь правило нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$.

1^0. Вычисляют производную $f'(x)$ данной функции.

2^0. Находят точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $f(x)$.

3^0. Найденными точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы являются интервалами монотонности.

4^0. Исследуют знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x)>0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает; если же $f'(x)<0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

Замечание. В зависимости от условий задачи правило нахождения интервалов монотонности может упрощаться.

543—563. Найти интервалы монотонности следующих функций:

543. $y=x^2-4x+1$.

Решение. 1^0. Находим производную данной функции: $y'=2x-4$.

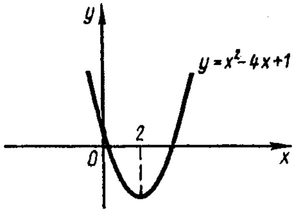


Рис. 115

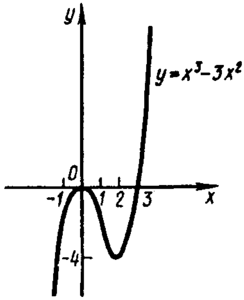


Рис. 116

2^0. Находим критические точки функции: $2x-4=0$; $2x=4$; $x=2$.

3^0. Область определения функции $(-\infty, \infty)$ разбивается на интервалы $(-\infty, 2)$ и $(2, \infty)$.

4^0. На интервале $(-\infty, 2)$ имеем $y'<0$; например, $(2x-4)|_{x=0}=-4$. Следовательно, на интервале $(-\infty, 2)$ функция убывает. На интервале $(2, \infty)$ имеем $y'>0$; например, $(2x-4)|_{x=3}=2\cdot 3-4=2$. Значит, на интервале $(2, \infty)$ функция возрастает (рис. 115).

544. $f(x)=x^3-3x^2$.

Решение. 1^0. Находим $f'(x)=3x^2-6x$.

2^0. Находим критические точки: $3x^2-6x=0$; $3x(x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$.

3^0. Область определения функции $(-\infty, \infty)$ разбивается на интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, \infty)$.

4^0. Имеем $f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=9>0$; следовательно, в интервале $(-\infty, 0)$ функция возрастает; $f'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1=-3<0$; значит, в интервале $(0, 2)$ функция убывает; $f'(3)=3\cdot 3^2-6\cdot 3=9>0$; поэтому в интервале $(2, \infty)$ функция возрастает (рис. 116).

545. $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$.

546. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^2\cos x}.$$

Если $0<x<\pi/2$, то $x<\operatorname{tg} x$, $x^2\cos x>0$ и, значит, $f'(x)<0$. Отсюда следует, что $f(x)$ убывает на $(0, \pi/2)$.

547. $y=x(1+\sqrt{x})$

Решение. Так как $y=x(1+\sqrt{x})=x+x^{3/2}$, то $y'=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$. Область определения данной функции — промежуток $[0, \infty)$. Так как производная положительна в этом промежутке, то функция возрастает во всей области определения.

548. $y=x-2\sin x$, если $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Решение. 1^0. Имеем $y'=1-2\cos x$.

2^0. Находим критические точки: $1-2\cos x=0$; $2\cos x=1$; $\cos x=1/2$; $x_1=\pi/3$, $x_2=5\pi/3$ (для данного условия).

3^0. Указанная область исследования $[0, 2\pi]$ разбивается на промежутки $[0, \pi/3]$, $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi]$.

4^0. Находим $y'(\pi/4) = 1 - 2\cos(\pi/4) = 1 - 2\cdot\sqrt{2}/2 = 1 - \sqrt{2} < 0$, следовательно, в промежутке $[0, \pi/3)$ функция убывает; $y'(\pi/2) = 1 - 2\cos(\pi/2) = 1 - 0 = 1 > 0$; значит, в промежутке $(\pi/3, 5\pi/3)$ функция возрастает; $y'(11\pi/6) = 1 - 2\cos(11\pi/6) = 1 - 2\cdot\sqrt{3}/2 = 1 - \sqrt{3} < 0$; поэтому в промежутке $(5\pi/3, 2\pi)$ функция убывает.

549. $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

Решение. 1^0. Функция существует только при $x > 0$. Находим производную:

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x}.$$

2^0. Производная равна нулю в точке $x_1 = 1/2$ ($x_2 = -1/2$ — посторонний корень).

3^0. Область определения функции $(0, \infty)$ разобьем на два интервала $(0, 1/2)$ и $(1/2, \infty)$.

4^0. В интервале $(0, 1/2)$ производная отрицательна, а в интервале $(1/2, \infty)$ — положительна. Следовательно, рассматриваемая функция убывает в интервале $(0, 1/2)$ и возрастает в интервале $(1/2, \infty)$.

550. $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$.

551. $\varphi(x) = 1 - x^3$.

552. $y = x^5 - 5x$.

553. $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

554. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$.

555. $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$.

556. $y = \ln x$.

557. $y = \sqrt{2x - x^2}$.

558. $y = \sin x$.

559. $y = \ln\sqrt{1 + x^2}$.

560. $f(x) = \frac{e^x}{x}$.

561. $f(x) = x + \cos x$.

562. $y = 2x + \sin x$.

563. $y = x + \frac{1}{x}$.

2. Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

На рис. 116. изображен график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим окрестность точки $x = 0$, т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функции $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимается в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1, 1)$ наибольшее значение, равное нулю, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют *точкой максимума** этой функции.

Аналогично, точку $x = 2$ называют *точкой минимума*** функции $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше, чем ее значение в остальных точках некоторой окрестности точки $x = 2$.

* От лат. maximum — «наибольший».
** От лат. minimum — «наименьший».

Определение 2. Точка $x=a$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если имеет место неравенство $f(a)>f(x)$ (соответственно $f(a)<f(x)$) для любого x из некоторой окрестности точки $x=a$.

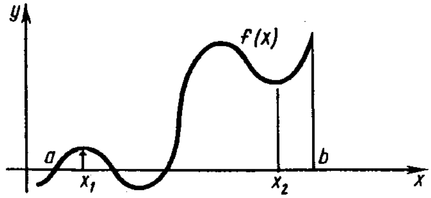


Рис. 117

Если $x=a$ — точка максимума (минимума) функции $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $x=a$. Максимум и минимум функции объединяют названием *экстремум* функции, а точки максимума и минимума называют *точками экстремума* (*экстремальными точками*).

Не следует считать, что максимум функции является наибольшим значением во всей области определения этой функции; он является наибольшим лишь по сравнению со значениями функции, взятыми в некоторой окрестности точки максимума.

На данном интервале функция может иметь несколько максимумов и несколько минимумов, причем некоторые из максимумов могут быть меньше некоторых минимумов.

Из рис. 117 видно, что значение $f(x_1)$, представляющее собой максимум функции $f(x)$, не является наибольшим значением этой функции на интервале (a, b) и, более того, $f(x_1)$ меньше, чем значение $f(x_2)$, являющееся минимумом данной функции.

Аналогично, минимум функции не обязательно является наименьшим значением данной функции.

Определим, при каких условиях функция имеет максимум или минимум.

▲ **Теорема 3** (необходимый признак экстремума). *Если $x=a$ является точкой экстремума функции $y=f(x)$ и производная в этой точке существует, то она равна нулю:* $f'(a)=0$.

Доказательство. Производная функции $f(x)$ в точке $x=a$ не может быть отличной от нуля, так как в случае $f'(a)>0$ функция $f(x)$ возрастала бы в некотором интервале, содержащем точку a, а в случае $f'(a)<0$ — убывала бы в некотором интервале, содержащем точку a; другими словами, при $f'(a)>0$ и $f'(a)<0$ функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке a, что противоречит условию. Значит, $f'(a)=0$.

Геометрически необходимый признак экстремума означает, что *если $x=a$ — точка экстремума функции $y=f(x)$, то касательная* (в том случае, когда она существует) *к графику этой функции в точке* $(a; f(a))$ *параллельна оси Ox* (рис. 118).

Легко убедиться в том, что необходимое условие экстремума функции не является достаточным, т. е. из того факта, что $f'(a)=0$, вовсе не следует, что функция $f(x)$ имеет экстремум при $x=a$. Например, для функции, изображенной на рис. 119, касательная

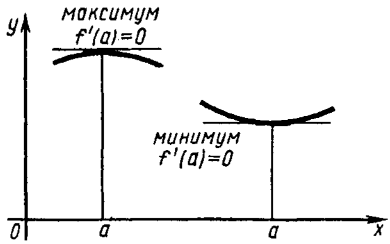


Рис. 118

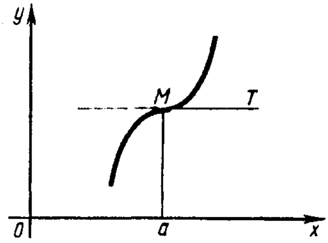


Рис. 119

MT параллельна оси Ox, т. е. $f'(a)=0$, однако экстремума в этой точке функция не имеет.

Таким образом, обращение первой производной в нуль является необходимым, но не достаточным условием экстремума.

▲ **Теорема 4** (достаточный признак экстремума). *Если производная $f'(x)$ при переходе x через a меняет знак, то a является точкой экстремума функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть при переходе x через a производная меняет знак с плюса на минус. Тогда слева от a производная положительна и, следовательно, здесь находится интервал возрастания функции. Справа же от a производная отрицательна, и поэтому здесь находится интервал убывания функции. Точка отделяющая интервал возрастания функции от интервала убывания, есть точка максимума.

Аналогично доказывается, что если при переходе x через a производная меняет знак с минуса на плюс, то a является точкой минимума.

Смысл теоремы 4 наглядно иллюстрирует рис. 120. Точка a — критическая, так как $f'(a)=0$. Слева от этой точки, т. е. при $x<a$, имеем $f'(x)>0$; касательная к кривой образует с осью Ox острый угол и функция возрастает.

Справа от этой точки, т. е. при $x>a$, имеем $f'(x)<0$; касательная к кривой образует с осью Ox тупой угол и функция убывает. При $x=a$ функция переходит от возрастания к убыванию, т. е. имеет максимум.

Для функции, изображенной на рис. 119, при переходе через критическую точку $x=a$ производная не меняет знак и в этой точке нет экстремума.

Таким образом, исследование производной $y'=f'(x)$ позволяет во многом изучить поведение функции $y=f(x)$. При этом нужно понимать, что в своих рассуждениях мы с помощью известного графика функции находили значения производной на тех или иных участках кривой. На практике же, конечно, поступают наоборот: рассматривают производную некоторой функции и с ее помощью исследуют характер функции.

Нетрудно выделить основные моменты этого исследования.

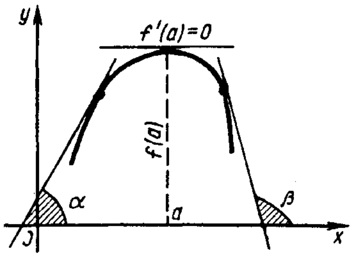


Рис. 120

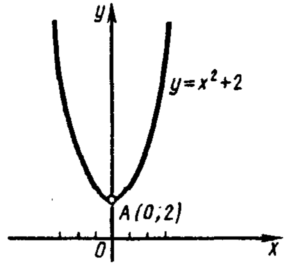


Рис. 121

1^0. Находят производную $f'(x)$.

2^0. Находят все критические точки из области определения функции.

3^0. Устанавливают знаки производной функции при переходе через критические точки и выписывают точки экстремума.

4^0. Вычисляют значения функции $f(x)$ в каждой экстремальной точке.

564—580. Исследовать на экстремум следующие функции:

564. $y = x^2 + 2$.

Решение. 1^0. Находим производную: $y' = (x^2 + 2)' = 2x$.

2^0. Приравниваем ее нулю: $2x = 0$, откуда $x = 0$ — критическая точка.

3^0. Определяем знак производной при значении $x<0$, например при $x = -1$: $y'_{x=-1} = 2(-1) = -2$. Определяем знак производной при $x>0$, например при $x=1$: $y'_{x=1} = 2 \cdot 1 = 2$. Так как при переходе через $x=0$ производная изменяет знак с минуса на плюс, при $x=0$ функция имеет минимум.

4^0. Находим минимальное значение функции, т. е. $f(0) = 0^2 + 2 = 2$. Теперь можно на чертеже изобразить вид кривой вблизи точки $A(0; 2)$ (рис. 121).

565. $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$.

Решение. 1^0. Находим производную $y' = x^2 - 4x + 3$.

2^0. Приравниваем ее нулю и решаем уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$. Его корни $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ — критические точки.

3^0. Производную можно представить в виде произведения множителей: $y' = (x-1)(x-3)$. Исследуем критическую точку $x_1 = 1$, определяя знак y' вблизи этой точки слева и справа от нее. Так как $y'_{x<1} > 0$, $y'_{x>1} < 0$, то при $x_1 = 1$ функция имеет максимум. Аналогично, для точки $x_2 = 3$ получим $y'_{x<3} < 0$, $y'_{x>3} > 0$. Следовательно, при $x_2 = 3$ функция достигает минимума.

4^0. Находим $y|_{x=1} = \frac{7}{3}$, $y|_{x=3} = 1$.

График функции изображен на рис. 122.

566. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 9x - 6$.

Решение. Найдем $f'(x) = 3x^2 + 6x + 9 = 3(x^2 + 2x + 3)$. Приравняв

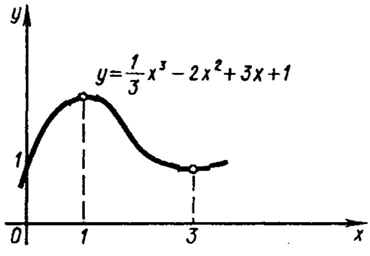


Рис. 122

производную нулю, видим, что уравнение $x^2+2x+3=0$ не имеет действительных корней, а это означает, что непрерывная функция $f(x)$ не имеет ни максимумов, ни минимумов. Действительно, $f'(x)=3((x+1)^2+2)>0$ при любом значении x; следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей области определения и не может иметь экстремумов.

567. $y=(x-5)e^x$.

Решение. 1^0. $y'=(x-5)'e^x+(e^x)'(x-5)=e^x+e^x(x-5)=e^x(x-4)$.

2^0. $e^x(x-4)=0$; $e^x\neq 0$; $x-4=0$; $x=4$.

3^0. В интервале $(-\infty, 4)$ производная отрицательна, а в интервале $(4, \infty)$ положительна. Следовательно, при $x=4$ функция имеет минимум.

4^0. $f(4)=y_{\min}=-e^4$.

568. $y=1-\sqrt[5]{(x-2)^4}$.

Решение. 1^0. $y'=-\frac{4}{5}(x-2)^{-1/5}=-\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}$.

2^0. Производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует лишь при $x=2$. Это и есть критическая точка.

3^0. В интервале $(-\infty, 2)$ производная положительна, в интервале $(2, \infty)$ отрицательна; следовательно, при $x=2$ функция имеет максимум.

4^0. Находим $f(2)=y_{\max}=1$.

569. $f(x)=\sin x+\cos x$.

Решение. 1^0. $f'(x)=\cos x-\sin x$.

2^0. Решим уравнение $\cos x-\sin x=0$; разделив обе его части на $\cos x$, получим $1-\operatorname{tg}x=0$, $\operatorname{tg}x=1$, т. е. $x=\pi/4$.

3^0. При $x<\pi/4$, например при $x=0$, имеем $f'(0)=\cos 0-\sin 0=1>0$; при $x>\pi/4$, например при $x=\pi/3$, получим $f'(\pi/3)=\cos(\pi/3)-\sin(\pi/3)=1/2-\sqrt{3}/2<0$. Значит, при $x=\pi/4$ функция имеет максимум.

4^0. $f(\pi/4)=\sin(\pi/4)+\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2=\sqrt{2}$, т. е. $(\pi/4; \sqrt{2})$ — точка максимума.

Замечание. При исследовании функции на экстремум производную $f'(x)$ полезно предварительно разложить на множители; этим упрощается исследование ее знака в окрестности критического значения.

Для оформления записи исследования функции можно пользоваться таблицей, в первой строке которой записаны интервалы знакопостоянства производной и критические точки функции; во второй — знаки первой производной в этих интервалах и ее значения в критических точках; в третьей — поведение функции в этих интервалах и ее значения в критических точках.

570. $y=xe^x$.

Решение. 1^0. Находим производную:

$$y'=(xe^x)'=x'e^x+(e^x)'x=e^x+xe^x=e^x(1+x).$$

2^0. Находим критические точки: $e^x(1+x)=0$, $x=-1$.

3^0. Исследуем знаки производной слева и справа от критической точки:

$$y'(-2)=e^{-2}(1-2)=\frac{1}{e^2}(-1)<0,\ y'(1)=e(1+1)=2e>0.$$

Следовательно, при $x=-1$ функция имеет минимум $y_{\min}=y(-1)=$ $=(-1)e^{-1}=-1/e=-0{,}369$.

Составим таблицу:

x	$(\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	убывает	$y_{\min}=-1/e$	возрастает

571. $y=x^2-x-6$. **572.** $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$.

573. $y=1-6x-x^2$. **574.** $y=x^3-6x+1$.

575. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$. **576.** $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$.

577. $f(x)=ax^2+bx+c$. **578.** $y=(2x+1)\sqrt[3]{x-2}$.

579. $f(x)=2^x x^{-2}$. **580.** $y=5^x+5^{-x}$.

581. Может ли точка экстремума функции быть одновременно и точкой экстремума ее производной?

3. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной

Часто бывает рациональнее исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной. Рассмотрим сущность этого метода.

Знак первой производной данной функции характеризует возрастание и убывание функции. Точно так же знак второй производной связан с возрастанием и убыванием первой производной.

Если первая производная в некотором интервале дифференцируема и возрастает, то в каждой точке этого интервала вторая производная положительна; если же первая производная убывает, то вторая производная в каждой точке этого интервала отрицательна.

Теперь выясним, как изменяется первая производная в точках экстремума и близких к ним точках с увеличением аргумента. Первая производная при переходе через точку максимума меняет знак с плюса на минус; иными словами, она от положительных значений переходит через нуль к отрицательным, т. е. убывает, а значит, ее производная должна быть отрицательна. Итак, в точке максимума данной функции первая производная равна нулю, а вторая производная отрицательна.

Аналогично можно показать, что в точке минимума функции первая производная равна нулю, а вторая положительна.

Отсюда вытекает правило исследования функции на экстремум с помощью второй производной:

1^0. Находят первую производную $f'(x)$.

2^0. Приравняв ее к нулю, находят действительные корни полученного уравнения (т. е. критические значения x_1, x_2, ..., x_n).

3^0. Находят вторую производную $f''(x)$.

4^0. Во вторую производную подставляют поочередно все критические значения; если при этой подстановке вторая производная окажется положительной, то в этой точке функция имеет минимум; если же вторая производная окажется отрицательной, то функция имеет максимум.

Замечание. Если при подстановке критического значения во вторую производную она обратится в нуль, то ничего определенного относительно существования экстремума сказать нельзя, а исследование нужно продолжить с помощью первой производной.

582—599. Исследовать на экстремум с помощью второй производной следующие функции:

582. $y=4x-x^2$.

Решение. 1^0. Находим первую производную: $y'=4-2x$.

2^0. Решая уравнение $4-2x=0$, получим критическую точку $x=2$.

3^0. Вычисляем вторую производную: $y''=-2$.

4^0. Так как y'' отрицательна в любой точке, то и $y''(2)=-2<0$. Это означает, что функция в точке $x=2$ имеет максимум. Найдем его значение: $y(2)=4\cdot 2-2^2=4$, т. е. $y_{max}=4$.

583. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$.

Решение. 1^0. $y'=x^2-5x+6$.

2^0. $x^2-5x+6=0$, т. е. $x_1=2$, $x_2=3$ — критические точки.

3^0. $y''=2x-5$.

4^0. Так как $y''_{x=2}=2\cdot 2-5=-1<0$, то при $x_1=2$ имеем максимум, равный $y_{max}=4/3$. Так как $y''_{x=3}=2\cdot 3-5=1>0$, то при $x_2=3$ имеем минимум $y_{min}=9/2$.

584. $y=x^5$.

Решение. 1^0. Находим первую производную: $y'=5x^4$.

2^0. Решая уравнение $5x^4=0$, получаем критическую точку $x=0$.

3^0. Вычисляем вторую производную и находим ее значение в критической точке: $y''=20x^3$, $y''(0)=0$.

4^0. Так как вторая производная в критической точке равна нулю, то имеем сомнительный случай.

Поэтому исследуем функцию с помощью первой производной. Для этого берем сначала $x_1=-1<0$, а затем $x_2=1>0$. Тогда $y'(-1)=$ $=5(-1)^4=5\cdot 1=5>0$ и $y'(1)=5\cdot 1^2=5>0$, т. е. при переходе x через критическую точку $x=0$ производная не меняет знак, а это значит, что функция не имеет ни максимума, ни минимума.

585. $y=x^6$.

Решение. 1^0. $y'=6x^5$.

2^0. $6x^5=0$, т. е. $x=0$.

3^0. $y''=30x^4$.

4^0. Так как $y''(0)=0$, то способ исследования с помощью второй производной неприменим.

Исследуем функцию на экстремум с помощью первой производной. Если $x<0$, то $y'<0$, а если $x>0$, то $y'>0$. Следовательно, в точке $x=0$ функция имеет минимум $y=0$.

586. $y=x^4-8x^2$.

Решение. 1^0. $y'=4x^3-16x$.

2^0. $4x^3-16x=0$; $x^3-4x=0$; $x(x^2-4)=0$; $x^2-4=0$ и $x=0$. Таким образом, $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$ — критические точки.

3^0. $y''=12x^2-16$.

4^0. Имеем $y''(-2)=12(-2)^2-16=48-16=32>0$; $y''(0)=12\cdot 0^2-{}$ $-=-16<0$; $y''(2)=12\cdot 2^2-16=48-16=32>0$.

Вычисляем минимум и максимум функции в соответствующих точках:

$$y_{\min}=y(-2)=(-2)^4-8(-2)^2=-16,\ y_{\max}=y(0)=0^4-8\cdot 0^2=0,$$
$$y_{\min}=y(2)=2^4-8\cdot 2^2=-16.$$

587. $f(x)=\sin x+\cos x$ в интервале $(0, 2\pi)$.

Решение. 1^0. Имеем $f'(x)=\cos x-\sin x$.

2^0. Найдем критические точки: $\cos x-\sin x=0$; $1-\operatorname{tg} x=0$; $\operatorname{tg} x=1$; $x_1=\pi/4$, $x_2=5\pi/4$.

3^0. Находим $f''(x)=-\sin x-\cos x$.

4^0. Исследуем знаки второй производной в критических точках:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}<0,\ f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}=$$
$$=\sqrt{2}>0.$$

Следовательно, при $x=\pi/4$ функция имеет максимум $f(\pi/4)=\sqrt{2}$, а при $x=5\pi/4$ — минимум $f(5\pi/4)=-\sqrt{2}$.

588. $y=x+\cos 2x$ в интервале $(0, \pi/4)$.

Решение. 1^0. Имеем $y'=1-2\sin 2x$.

2^0. Определим критические точки, принадлежащие заданному интервалу: $1-2\sin 2x=0$, $\sin 2x=1/2$, $2x=\pi/6$, $x=\pi/12$.

3^0. Находим $y''=-4\cos 2x$.

4^0. Так как $y''(\pi/12)=-4\cos(\pi/6)=-2\sqrt{3}<0$, то при $x=\pi/12$ функция имеет максимум:

$$y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx 1{,}13.$$

589. $y=x^2e^{-x}$.

Решение. 1^0. $y'=2xe^{-x}-xe^{-x}=x^2e^{-x}(2-x)$.

2^0. $y'=0$ при $x_1=0$ и $x_2=2$.

3^0. $y''=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}-e^{-x}(2-4x+x^2)$.

4^0. $y''(0)=2>0$, $y''(2)=e^{-2}(-2)<0$; $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(2)=$ $=4e^{-2}$.

590. $y=2x^3+6x^2-18x+120$;

591. $u(x)=3x^4-4x^3$.

592. $y=2x^2-x^4$.

593. $y=\dfrac{4x}{1+x^2}$.

594. $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

595. $y=\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$.

596. $y=\frac{x^2}{x^2+5x+6}$.

597. $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}$.

598. $y=\sin x$.

599. $y=\frac{\ln x}{x}$.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. В этом случае, как известно, она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке. Во многих прикладных вопросах бывает важно найти те точки отрезка $[a, b]$, которым отвечают наибольшее и наименьшее значения функции.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение достигается на концах отрезка $[a, b]$.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y=f(x)$, нужно:

1^0. Найти все критические точки, принадлежащие промежутку $[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках.

2^0. Вычислить значения функции на концах отрезка $[a, b]$, т. е. найти $f(a)$ и $f(b)$.

3^0. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке $[a, b]$; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

600. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-6x$ на отрезке $[-3, 4]$.

Решение. 1^0. Найдем критические точки функции в промежутке $(-3, 4)$. Имеем $y'=3x^2-6$; решая уравнение $3x^2-6=0$, получим $x_1=\sqrt{2}$ и $x_2=-\sqrt{2}$. Эти точки принадлежат данному отрезку.

Вычислим значения функции в критических точках:

$$y(-\sqrt{2})=(-2)^3-6(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=4\sqrt{2};$$
$$y(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3-6\sqrt{2}=2\sqrt{2}-6\sqrt{2}=-4\sqrt{2}.$$

2^0. Находим значения функции на концах отрезка: $y(-3)=-9$, $y(4)=40$.

3^0. Сравнивая значения функции в критических точках и ее значения на концах отрезка, заключаем, что $y=-9$ является наименьшим, а $y=40$ — наибольшим значением функции на указанном отрезке.

601. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-6x+5$ на отрезке $[-5/2, 3/2]$.

Решение. 1^0. Находим критические точки, принадлежащие интервалу $(-5/2, 3/2)$:

$$f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1);\quad 6(x^2-1)=0;\quad x_1=-1,\ x_2=1.$$

Вычислим значения функции в этих точках:

$$f(-1)=2(-1)^3-6(-1)+5=9;$$

$$f(1)=2\cdot 1^3-6\cdot 1+5=1.$$

2^0. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right)=2\left(-\frac{5}{2}\right)^3-6\left(-\frac{5}{2}\right)+5= =-11\frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-6\cdot\frac{3}{2}+5=2\frac{3}{4}.$$

3^0. Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке есть $f(-1)=9$, а наименьшее $f\left(-\frac{5}{2}\right)=-11\frac{1}{4}$ (рис. 123).

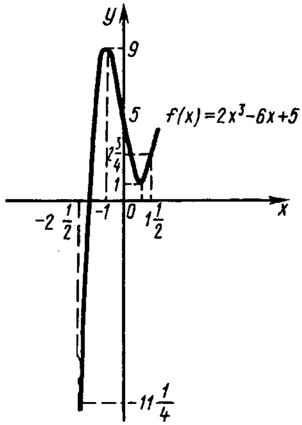


Рис. 123

602. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^5-5x^4+5x^3+3$ на отрезке $[-1, 2]$.

Решение. 1^0. Находим критические точки, принадлежащие интервалу $(-1, 2)$, и значения функции в этих точках:

$$y'=5x^4-20x^3+15x^2;\ 5x^4-20x^3+15x^2=0;\ 5x^2(x^2-4x+3)=0;$$
$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3.$$

Критическая точка $x_3=3$ не принадлежит заданному отрезку.

Вычисляем значения функции в двух других критических точках: $y(0)=3$, $y(1)=4$.

2^0. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка: $y(-1)=-8$; $y(2)=-5$.

3^0. Сравнивая полученные результаты, заключаем, что наибольшее значение функции $y(1)=4$, наименьшее $y(-1)=-8$.

603. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt{100-x^2}$ на отрезке $[-6, 8]$.

Решение. 1^0. Находим критические точки на отрезке $[-6, 8]$:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}.$$

На рассматриваемом отрезке имеем только одну критическую точку $x=0$; при этом $f(0)=10$.

2^0. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-6)=\sqrt{100-36}=8,\ f(8)=\sqrt{100-64}=6.$$

3^0. Обозначая через M наибольшее, а через m — наименьшее значение функции на отрезке, получаем $M=f(0)=10$, $m=f(8)=6$; здесь наименьшее значение достигается на конце отрезка.

Замечание. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функций можно упростить, если воспользоваться следующими свойствами непрерывных функций:

1) если функция $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна и возрастает, то $m=f(a)$ и $M=f(b)$;

2) если функция $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна и убывает, то $m=f(b)$ и $M=f(a)$;

3) если функция $y=f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке только одну точку максимума x_0 (и ни одной точки минимума), то наибольшее значение на данном отрезке есть $M=f(x_0)$;

4) если функция $y=f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке только одну точку минимума x_0 (и ни одной точки максимума), то наименьшее значение на данном отрезке есть $m=f(x_0)$.

604—609. Найти наибольшее значение M и наименьшее значение m следующих функций на указанных отрезках:

604. $f(x)=x^2-4x+3$ на $[0, 3]$.

605. $y=x^2-6x+8$ на $[1, 4]$.

606. $y=x^3-3x^2+3x+2$ на $[2, 5]$.

607. $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на $[-2, 1]$.

608. $f(x)=x\ln x-x$ на $[1/e, e]$.

609. $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ на $[0, \pi/2]$.

5. Практическое применение производной

Рассмотрим задачи, связанные с практическим применением производной. При их решении не дается готовой функции для исследования, а ее нужно составить самостоятельно по условию задачи. При этом сначала следует установить, какую величину выбрать за независимую переменную. В задачах, где выбор может быть сделан не единственным образом, следует остановиться на таком выборе, при котором исследуемая функция оказывается более простой.

610. Разложить число 100 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим первое число через x. Тогда второе число равно $100-x$. Затем составим функцию $y=x(100-x)$. По условию, аргумент x должен быть таким, чтобы функция приняла максимальное значение, т. е. чтобы произведение в правой части равенства было наибольшим. Поэтому найдем то значение x, при котором функция имеет максимум:

$$y=100x-x^2;\quad y'=100-2x;\quad 100-2x=0;\quad x=50.$$

Найдем вторую производную: $y''=-2$. Так как $y''(50)=-2<0$, то при $x=50$ функция достигает максимума. Значит, первое число $x=50$ и второе $100-x=100-50=50$. Итак, оба числа должны быть одинаковы.

611. Найти число, которое, будучи сложено со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

Решение. Обозначим искомое число через x. Тогда надо найти такое x, при котором функция $y=x+x^2$ имеет минимум. Находим это значение x:

$$y' = 1 + 2x;\ 1 + 2x = 0;\ 2x = -1;\ x = -1/2;\ y'' = 2,\ y''(-1/2) = 2 > 0,$$

т. е. при $x = -1/2$ достигается минимум. Итак, искомое число равно $-1/2$.

612. Путь s, пройденный за время t материальной точкой, брошенной вертикально вверх с начальной скоростью v_0, выражается формулой $s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$, где g — ускорение силы тяжести. Определить высоту наибольшего подъема точки.

Решение. Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $s(t)$. Так как из физических соображений следует, что в начальный и конечный моменты $s = 0$ и что в течение всего полета $s > 0$, то наибольшее значение s должно совпадать с ее максимумом. Находим производную: $s' = -gt + v_0$; критическая точка есть $t = v_0/g$. При переходе через эту точку s' меняет знак с плюса на минус, т. е. функция имеет максимум. В наличии максимума можно убедиться и с помощью знака второй производной: $s'' = -g < 0$.

Подставляя значение $t = v_0/g$ в формулу для s, получим высоту наибольшего подъема точки: $s_{\max} = v_0^2/(2g)$.

613. Требуется вырыть силосную яму объемом 32 м^3, имеющую квадратное дно, так чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?

Решение. Пусть сторона дна есть x, тогда площадь дна составит x^2, высота ямы $\frac{32}{x^2}$, а площадь стенки $\frac{x \cdot 32}{x^2} = \frac{32}{x}$. Сумму площадей дна и четырех стенок обозначим через S, т. е.

$$S = x^2 + 4\frac{32}{x}.$$

Найдем производную S по x:

$$S' = 2x - \frac{4 \cdot 32}{x^2};\ S' = 0;\ x = 4.$$

Поскольку $S'' = 2 + \frac{2 \cdot 4 \cdot 32}{x^3}$, $S''(4) > 0$, заключаем, что при $x = 4$ функция имеет минимум.

Итак, сторона дна ямы равна 4 м, а высота ямы есть $32/4^2 = 2$ м.

614. Имеется квадратный лист жести, сторона которого $a = 60$ см. Вырезая по всем его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить коробку (без крышки). Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объем?

Решение. По условию, сторона квадрата $a = 60$. Обозначим сторону вырезаемых по углам квадратов через x. Дном коробки является квадрат со стороной $a - 2x$, а высота коробки равна стороне x вырезаемого квадрата. Следовательно, объем коробки выразится функцией

$$V = (a - 2x)^2 x.$$

Найдем значение x, при котором функция примет наибольшее значение. Для этого сначала преобразуем функцию, а затем исследуем ее на экстремум:

$$V=(a^2-4ax+4x^2)x; \quad V=4x^3-4ax^2+a^2x;$$
$$V'=12x^2-8ax+a^2; \quad 12x^2-8ax+a^2=0;$$
$$x=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-12a^2}}{12}=\frac{4a\pm\sqrt{4a^2}}{12}=\frac{4a\pm 2a}{12}; \quad x_1=\frac{a}{2}, \; x_2=\frac{a}{6}.$$

Очевидно, что значение $x=a/2$ не отвечает условию, так как в этом случае квадрат был бы разрезан на четыре равные части и никакой коробки не получилось бы. Поэтому исследуем функцию на экстремум в критической точке $x_2=a/6$:

$$V''=24x-8a; \quad V''\left(\frac{a}{6}\right)=24\frac{a}{6}-8a=4a-8a=-4a<0,$$

т. е. при $x=a/6$ достигается максимум. Итак, сторона вырезаемого квадрата должна быть равна $x=a/6$. В данном конкретном случае при $a=60$ см получим $x=10$ см.

615. Из круглого бревна радиуса R требуется вырезать прямоугольную балку максимальной прочности. Известно, что прочность балки прямо пропорциональна произведению ее ширины на квадрат высоты. Какими должны быть размеры балки, чтобы ее прочность была максимальной?

Решение. Обозначим ширину балки через x, ее высоту — через y, а прочность (на изгиб) — через J, имеем $J=kxy^2$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, нужно найти максимум функции $J=kxy^2$. Чтобы выразить прочность балки через одну из неизвестных величин, заметим, что $x^2+y^2=4R^2$, откуда $y^2=4R^2-x^2$ и $J=kx(4R^2-x^2)$.

Находим производную и приравниваем ее нулю:

$$J'=4kR^2-3kx^2=0 \quad \text{или} \quad k(4R^2-3x^2)=0.$$

Так как $k\neq 0$, то $4R^2-3x^2=0$, откуда $x=\pm 2R/\sqrt{3}$.

По смыслу задачи исследованию подлежит только положительный корень $x=2R/\sqrt{3}$. Поскольку $J''=-6kx<0$ при $x=2R/\sqrt{3}$, заключаем, что при $x=2R/\sqrt{3}$ прочность балки окажется максимальной.

616. Оросительный канал имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон площадь сечения канала является наибольшей?

Решение. Обозначим меньшее основание трапеции через a, угол наклона боковых сторон — через α и площадь сечения — через S (рис. 124). По условию, $|AB|=|AD|=|BC|=a$.

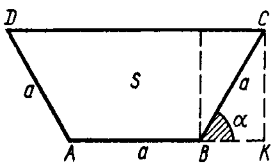


Рис. 124

Из треугольника BCK найдем $|BK|=a\cos\alpha$. Тогда $|CD|=a+2a\cos\alpha$. Высота трапеции равна $|CK|=a\sin\alpha$. Определим площадь трапеции:

$$S=\frac{|AB|+|DC|}{2}|CK|=\frac{a+a+2a\cos\alpha}{2}a\sin\alpha=$$
$$=a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Чтобы найти наибольшее значение площади $S=S(\alpha)$, нужно найти критические точки, принадлежащие интервалу $(0, \pi/2)$, вычислить значения функции $S(\alpha)$ в этих точках и на концах интервала $(0, \pi/2)$, а затем из полученных результатов выбрать наибольший.

Найдем производную:

$$S'(\alpha)=a^2((1+\cos\alpha)'\sin\alpha+(1+\cos\alpha)(\sin\alpha)')=$$
$$=a^2(-\sin^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha)=a^2(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1).$$

Приравняем производную нулю и решим полученное уравнение:

$$2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0;\quad \cos\alpha_1=1/2;\quad \cos\alpha_2=-1,$$

откуда $\alpha_1=\pm\pi/3+2\pi n$, $\alpha_2=\pi+2\pi n$. Интервалу $(0, \pi/2)$ принадлежит только критическая точка $\alpha_1=\pi/3$.

Найдем $S(\alpha_1)=S\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, $S(0)=0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2$. Сравнивая полученные результаты, заключаем, что функция $S(\alpha)$ принимает наибольшее значение при $\alpha=\pi/3$.

Таким образом, площадь сечения канала является наибольшей, если угол наклона боковых сторон равен 60°.

617. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна окажется наиболее экономичным?

Решение. Плавание окажется наиболее экономичным, если затраты на 1 км пути будут наименьшими. Из условия вытекает, что за сутки расходы составят $a+kv^3$ (k — коэффициент пропорциональности); при этом за сутки пути судно пройдет $24v$ км. Следовательно, расходы на 1 км пути составят

$$P=\frac{a+kv^3}{24v}.$$

Эта функция при $v=0$ имеет бесконечный разрыв, но нулевая скорость для нас не представляет интереса.

Найдем производную: $P'_v=\frac{2kv^3-a}{24v^2}$. Критическое значение v получим, решая уравнение $P'_v=0$, т. е. $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. При переходе через это значение P' меняет знак с минуса на плюс; следовательно, функция имеет минимум.

Итак, наиболее экономичная скорость плавания есть $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$.

618. Разложить число a на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

619. Найти такое число, чтобы разность между этим числом и его квадратом была наибольшей.

620. Найти такое число, чтобы разность между этим числом и квадратным корнем из него была наименьшей.

621. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

622. Тело движется по закону $s=18t+9t^2-t^3$. Найти его максимальную скорость.

623. Количество Q вещества, получающегося в процессе химической реакции, выражается формулой $Q=3+9t^2-t^3$, где t — время. Найти максимальную скорость реакции.

624. Прилегающую к дому прямоугольную площадку нужно оградить решеткой длиной 120 м. Определить размеры площадки, так чтобы она имела наибольшую площадь.

625. Определить размеры открытого бассейна объемом 256 м^3, имеющего квадратное дно, так чтобы на облицовку его стен и дна было израсходовано наименьшее количество материала.

626. Какой из равнобедренных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

627. Найти отношение высоты к диаметру конуса, имеющего при заданном объеме наименьшую боковую поверхность.

628. Из всех цилиндров с площадью полной поверхности $S=48\pi$ см^2 найти тот, который имеет наибольший объем.

6. Вогнутость и выпуклость. Точки перегиба

Чтобы исследовать более подробно особенности поведения функции, введем понятия вогнутости и выпуклости и точек перегиба графика функции. Рассмотрим кривые, изображенные на рис. 125.

Будем предполагать, что линия, заданная уравнением $y=f(x)$, имеет в точке $(a;\ f(a))$ касательную, не параллельную оси ординат.

Определение 3. Кривая называется *выпуклой* в точке $x=a$, если в некоторой окрестности этой точки она расположена под своей касательной в точке $(a;\ f(a))$.

Кривая называется *вогнутой* в точке $x=a$, если в некоторой окрестности этой точки она расположена над своей касательной в точке $(a;\ f(a))$.

Кривая выпукла (соответственно вогнута) в некотором промежутке, если она выпукла (вогнута) во всех точках этого промежутка.

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

▲ **Теорема 5** (признак вогнутости и выпуклости). *Если вторая производная функции $y=f(x)$ в данном промежутке положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна — выпукла в этом промежутке.*

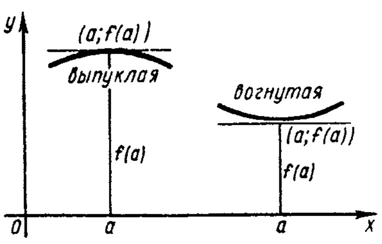


Рис. 125

Не проводя строгого доказательства, ограничимся лишь геометрическими соображениями, иллюстрирующими справедливость этой теоремы. Если

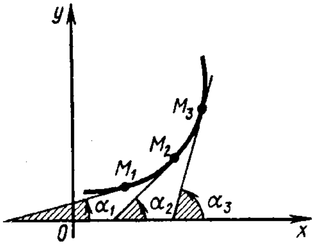


Рис. 126

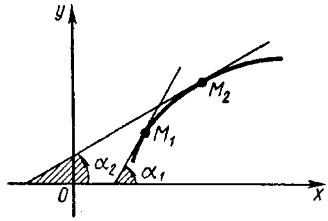


Рис. 127

$f''(x)=(f'(x))'>0$, то $f'(x)$ — возрастающая функция. Следовательно, проведя касательные к графику функции в точках M_1, M_2, ... (рис. 126), получим, что тангенсы углов α_1, α_2, ... растут вместе с ростом x: $\operatorname{tg}\alpha_1<\operatorname{tg}\alpha_2<...$, т. е. функция $y'=\operatorname{tg}\alpha$ возрастает, поэтому ее производная $(y')'=y''$ положительна. А это означает, что графиком функции $f(x)$ является вогнутая кривая.

Аналогично можно показать, что из условия $f''(x)<0$ в некотором промежутке следует выпуклость кривой в этом промежутке (рис. 127).

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующее правило:

1^0. Находят вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю или не существует.

2^0. Определяют интервалы, на которые область определения функции разбивается найденными точками.

3^0. Устанавливают знаки второй производной в каждом из указанных интервалов. Если $f''(x)<0$, то в рассматриваемом интервале кривая выпукла; если $f''(x)>0$ — вогнута.

629. Исследовать на выпуклость и вогнутость кривую $y=x^2-x$.

Решение. 1^0. Найдем вторую производную: $y'=2x-1$; $y''=2$.

2^0. Так как вторая производная положительна для любого x, то кривая вогнута на всей области определения $(-\infty, \infty)$.

630. Определить промежутки выпуклости кривой $y=x^3$.

Решение. 1^0. Найдем вторую производную: $y'=3x^2$; $y''=6x$. Она равна нулю в точке $x=0$.

2^0. Точка $x=0$ разбивает область определения функции на интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

3^0. Условием выпуклости кривой является $f''(x)<0$. Тогда $6x<0$, $x<0$, т. е. кривая выпукла в интервале $(-\infty, 0)$.

631. Найти промежутки выпуклости и вогнутости кривой $y=x^4-2x^3+36x^2-x+7$.

Решение. 1^0. Найдем вторую производную:

$$y'=4x^3-6x^2+72x-1;\quad y''=12x^2-12x+72=12(x+2)(x-3);\quad y''=0$$
$$\text{при } x_1=-2 \text{ и } x_2=3.$$

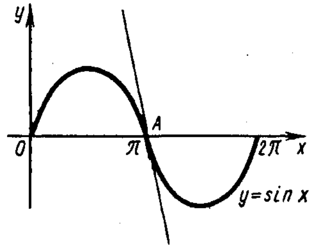


Рис. 128

2^0. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ и $(3, \infty)$.

3^0. В промежутке $(-\infty, -2)$ кривая вогнута, так как везде в этом промежутке $y''>0$; в промежутке $(-2, 3)$ — выпукла, так как $y''<0$; в промежутке $(3, \infty)$ — вогнута ($y''>0$).

632—635. Исследовать функции на выпуклость и вогнутость:

632. $y=x^3-3x^2-18x+7$. **633.** $y=(x-1)(x-2)(x-3)$.

634. $y=(x-1)^4(3x+7)$. **635.** $y=\frac{x^2+4}{x}$.

Как мы уже отмечали, иногда кривая в одной своей части выпукла, а в другой вогнута; так, например, часть синусоиды (рис. 128) выпукла выше оси Ox и вогнута ниже оси Ox, причем точка A служит границей между ними. Касательная, проведенная к кривой в этой точке, является общей для ее выпуклой и вогнутой части; эта касательная в то же время пересекает кривую в точке касания; поэтому синусоида в точке A ни выпукла, ни вогнута. Эта точка носит название точки перегиба.

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой.

▲ **Теорема 6** (признак существования точки перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ непрерывна и меняет знак при переходе через $x=x_0$, то $(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y=f(x)$.*

Замечание. Так как $f''(x)$ непрерывна и в точке $x=x_0$ меняет знак, то при $x=x_0$ вторая производная равна нулю. Точки, в которых вторая производная данной функции обращается в нуль, принято называть *критическими точками* II рода. Возможны случаи, когда вторая производная в точке перегиба не существует, но мы их не рассматриваем.

Доказательство. Пусть, например, $f''(x_0)=0$ в точке x_0 и $f''(x)$ знак меняет с плюса на минус. Это означает, что слева от x_0 кривая вогнута, а справа — выпукла, т. е. точка x_0 отделяет область вогнутости от выпуклости и является точкой перегиба.

Из признака существования точки перегиба следует правило ее нахождения:

1^0. Находят вторую производную исследуемой функции $f(x)$.

2^0. Находят все критические точки II рода из области определения функции.

3^0. Устанавливают знаки второй производной функции при переходе через критические точки II рода. Изменение знака $f''(x)$ указывает на наличие точки перегиба.

4^0. Находят ординаты точек перегиба.

636. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривую $f(x)=x^3-3x^2+5$.

Решение. 1^0. Определяем первую и вторую производные: $f'(x)=3x^2-6x$; $f''(x)=6x-6=6(x-1)$.

2^0. Из уравнения $f''(x)=0$ имеем $6(x-1)=0$, т. е. $x=1$ — критическая точка II рода.

3^0. Если $x<1$, то $f''(x)<0$ и в промежутке $(-\infty, 1)$ кривая выпукла. Если $x>1$, то $f''(x)>0$ и в промежутке $(1, \infty)$ кривая вогнута, а $x=1$ — абсцисса точки перегиба.

4^0. При $x=1$ получим $f(1)=3$, т. е. $M(1; 3)$ — точка перегиба.

637. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривую $y=x^3-6x^2+4$.

Решение. 1^0. $y'=3x^2-12x$; $y''=6x-12$.

2^0. Из уравнения $6x-12=0$ находим $x=2$.

3^0. Если $x<2$, то $y''<0$; следовательно, в интервале $(-\infty, 2)$ кривая выпукла. Если $x>2$, то $y''>0$; значит, в интервале $(2, \infty)$ кривая вогнута.

Итак, при переходе через $x=2$ вторая производная $y''(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, кривая имеет точку перегиба, абсцисса которой равна 2.

4^0. Подставляя в уравнение кривой $x=2$, найдем ординату точки перегиба: $y=2^3-6\cdot 2^2+4=-12$. Итак, $(2; -12)$ — точка перегиба.

638. Найти точки перегиба кривой $y=\dfrac{8}{x^2+4}$.

Решение. 1^0. $y'=-\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$; $y''=-\dfrac{16(x^2+4)^2-2(x^2+4)2x\cdot 16x}{(x^2+4)^4}=$

$=\dfrac{16(x^2+4)-64x^2}{(x^2+4)^3}=\dfrac{48x^2-64}{(x^2+4)^3}$.

2^0. $\dfrac{48x^2-64}{(x^2+4)^3}=0$, отсюда $48x^2-64=0$, $x^2=\dfrac{4}{3}$, $x_{1,2}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $x_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $x_2=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

3^0. Исследуем значение $x_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Если $x<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, например $x=0$, то $y''=\dfrac{-64}{64}=-1<0$; если $x>\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, например $x=2$, то $y''=\dfrac{48\cdot 4-64}{8^3}>0$. Итак, при $x_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ имеем точку перегиба.

Исследуем значение $x_2=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Если $x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, например $x=-2$, то $y''=\dfrac{128}{512}>0$; если $x>-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, например $x=0$, то $y''=-1<0$. Значит, при $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ также имеем точку перегиба.

4^0. Находим

$$y_1=\frac{8}{(2/\sqrt{3})^2+4}=\frac{3}{2},\quad y_2=\frac{8}{(-2/\sqrt{3})^2+4}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, $(2/\sqrt{3}; 3/2)$ и $(-2/\sqrt{3}; 3/2)$ — точки перегиба.

639. Исследовать функцию $y=x^3-3x^2-9x+11$ на максимум, минимум и точку перегиба.

Решение. Найдем первую и вторую производные:

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3);\quad f''(x)=6x-6.$$

Приравняем первую производную нулю. Из уравнения $x^2-2x-3=0$ находим $x_1=-1$, $x_2=3$. Подставив эти значения во вторую производную, получим $f''(-1)=-12<0$, $f''(3)=12>0$. Следовательно, при $x=-1$ функция имеет максимум, а при $x=3$ — минимум.

Найдем ординаты точек максимума и минимума: $f(-1)=-1-3+$ $+9+11=16$, $f(3)=-16$. Таким образом, $A(-1;\ 16)$ точка максимума, $B(3,\ -16)$ — точка минимума.

Приравняем вторую производную нулю. Имеем $f''(x)=6x-6=0$, откуда $x=1$. Определим знак $f''(x)$ в интервалах $(-\infty,\ 1)$ и $(1,\ \infty)$: $f''(0)=-6<0$, $f''(2)=6>0$. Следовательно, при $x=1$ график имеет точку перегиба. Найдем ординату точки перегиба: $f(1)=1-3-9+11=$ $=0$. Итак, $C(1;\ 0)$ — точка перегиба данной кривой.

640—643. Исследовать на вогнутость, выпуклость и точки перегиба функции:

640. $y=x^3-3x^2+1$. **641.** $y=x^{5/3}+x$.

642. $y=-x^3+3x^2$. **643.** $y=x^4-6x^2+5$.

7. Построение графиков функций

При построении графиков функций с помощью производных полезно придерживаться такого плана:

1°. Находят область определения функции и определяют точки разрыва, если они имеются.

2°. Выясняют, не является ли функция четной или нечетной; проверяют ее на периодичность.

3°. Определяют точки пересечения графика функции с координатными осями, если это возможно.

4°. Находят критические точки функции.

5°. Определяют промежутки монотонности и экстремумы функции.

6°. Определяют промежутки вогнутости и выпуклости кривой и находят точки перегиба.

7°. Используя результаты исследования, соединяют полученные точки плавной кривой. Иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Этот план исследования функции и построения ее графика является примерным, его не всегда надо придерживаться пунктуально: можно менять порядок пунктов, некоторые совсем опускать, если они не подходят к данной функции. В частности, если нахождение точек пересечения с осями координат связано с большими трудностями, то это можно не делать; если выражение для второй производной окажется очень сложным, то можно ограничиться построением графика на основании результатов исследования первой производной; если функция — четная, то ее график симметричен относительно оси Oy, поэтому достаточно построить график для положительных значений аргумента, принадлежащих области определения функции, и т. п.

644—674. Исследовать функции и построить их графики:

644. $f(x)=x^2+2x-3$.

Решение. 1^0. Функция определена на интервале $(-\infty, \infty)$. Точек разрыва нет.

2^0. Имеем $f(-x)=(-x)^2+2(-x)-3=x^2-2x-3$. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3^0. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если $y=0$, то $x^2+2x-3=0$, откуда $x=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2$, т. е. $x_1=-3$, $x_2=1$. Значит, кривая пересекает ось абсцисс в точках $(-3; 0)$ и $(1; 0)$. Если $x=0$, то из равенства $y=x^2+2x-3$ следует $y=-3$, т. е. кривая пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$.

4^0. Найдем критические точки функции. Имеем $y'=2x+2$; $2x+2=0$; $2(x+1)=0$; $x=-1$.

5^0. Область определения функции разделится на промежутки $(-\infty, -1)$ и $(-1, \infty)$. Знаки производной $f'(x)$ в каждом промежутке можно найти непосредственной подстановкой точки из рассматриваемого промежутка. Так, $f'(-2)=-2<0$, $f'(2)=2>0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty, -1)$ функция убывает, а в промежутке $(-1, \infty)$ — возрастает. При $x=-1$ функция имеет минимум, равный $f(-1)=$ $=f_{\min}=(-1)^2+2(-1)-3=1-2-3=-4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f_{\min}=-4$	$\nearrow$

6^0. Находим $f''(x)=2$, т. е. $f''(x)>0$. Следовательно, кривая вогнута на всей области определения и не имеет точек перегиба.

7^0. Построим все найденные точки в прямоугольной системе координат и соединим их плавной линией (рис. 129).

645. $y=x^3-12x+4$.

Решение. 1^0. Область определения $(-\infty, \infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2^0. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3^0. Если $x=0$, то $y=4$, т. е. график функции пересекает ось ординат в точке $(0, 4)$.

4^0. Имеем $y'=0$, $y'=3x^2-12$, $3x^2-$ $-12=0$, $3(x+2)(x-2)=0$; $x_1=-2$, $x_2=2$ — критические точки функции.

5^0. Исследуем функцию на монотон-

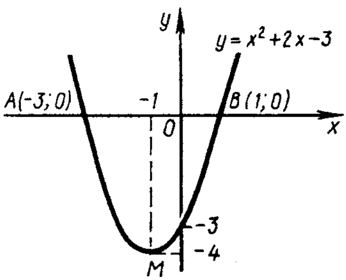


Рис. 129

ность и экстремум. Ее область определения разделится на промежутки $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ и $(2, \infty)$. Имеем $y'_{x=-3} = 3(-3)^2 - 12 = 15 > 0$, $y'_{x=0} = -12 < 0$, $y'_{x=3} = 3 \cdot 3^2 - 12 = 15 > 0$. Значит, в промежутках $(-\infty, -2)$ и $(2, \infty)$ функция возрастает, а в промежутке $(-2, 2)$ — убывает. При $x = -2$ функция имеет максимум: $y_{x=-2} = (-2)^3 - 12(-2) + 4 = -8$, а при $x = 2$ — минимум: $y_{x=2} = 2^3 - 12 \cdot 2 + 4 = -12$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$y_{max} = 20$	$\searrow$	$y_{min} = -12$	$\nearrow$

6°. Находим $y'' = (3x^2 - 12)' = 6x$; $6x = 0$; $x = 0$. Определим знаки второй производной слева и справа от точки $x = 0$: $y''_{x=-1} = -6 < 0$; $y''_{x=1} = 6 > 0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty, 0)$ кривая выпукла, а в промежутке $(0, \infty)$ — вогнута. При $x = 0$ имеем точку перегиба; ее ордината $y = 0 - 12 \cdot 0 + 4 = 4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; \infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	Выпукла	Точка перегиба (0; 4)	Вогнута

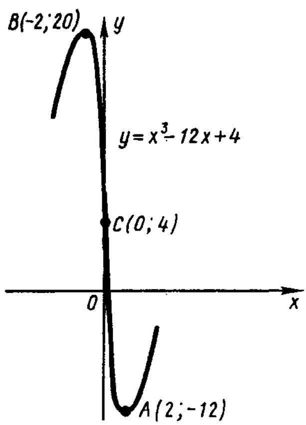


Рис. 130

7°. Кривая изображена на рис. 130.

646. $y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2$.

Решение. 1°. Область определения функции — интервал $(-\infty, \infty)$. Точек разрыва нет.

2°. Здесь $f(-x) = f(x)$, так как x входит только в четных степенях. Следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy.

3°. Чтобы определить точки пересечения графика с осью ординат, полагаем $x = 0$, тогда $y = 0$. Значит, кривая пересекает ось Oy в точке (0; 0).

Чтобы определить точки пересечения графика с осью абсцисс, полагаем $y = 0$:

$$\frac{1}{4}x^4 - \frac{3}{2}x^2 = 0;\ x^4 - 6x^2 = 0;$$

$$x^2(x^2 - 6) = 0.$$

Отсюда $x^2=0$, $x_{1,2}=0$, т. е. две точки пересечения слились в одну точку касания; кривая в точке (0; 0) касается оси Ox. Далее, имеем $x^2-6=0$, т. е. $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}\approx\pm 2{,}45$.

Итак, в начале координат O (0; 0) кривая пересекает ось Oy и касается оси Ox, а в точках A (—2,45; 0) и B (2,45; 0) пересекает ось Ox.

4⁰. Найдем критические точки функции:

$$y'=x^3-3x;\ x^3-3x=0;\ x(x^2-3)=0;\ x_1=0;\ x^2-3=0;$$
$$x_{2,3}=\pm\sqrt{3}\approx\pm 1{,}7.$$

Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$.

5⁰. Исследуем критические точки с помощью второй производной. Находим $y''=3x^2-3$. При $x=0$ получим $y''_{x=0}=-3$, т. е. $y_{\max}=0$, и, значит, O (0; 0) — точка максимума. Далее при $x=\sqrt{3}$ имеем $y''_{x=\sqrt{3}}=6$, т. е. $y_{\min}=\frac{1}{4}(\sqrt{3})^4-\frac{3}{2}(\sqrt{3})^2=-2{,}25$. Таким образом, $D(\sqrt{3};\ -2{,}25)$ — точка минимума, а вследствие симметрии минимум достигается также в точке $C(-\sqrt{3};\ -2{,}25)$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
y'	—	0	+	0	—	0	+
y	↘	$y_{\min}=-2{,}25$	↗	$y_{\max}=0$	↘	$y_{\min}=-2{,}25$	↗

6⁰. Имеем $y''=3(x^2-1)=0$, $3(x-1)(x+1)=0$, $x_{1,2}=\pm 1$. Точки $x=-1$ и $x=1$ разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ имеем $y''>0$, т. е. здесь кривая вогнута, а в интервале $(-1, 1)$ имеем $y''<0$, т. е. здесь она выпукла. При $x=-1$ и $x=1$ получаем точки перегиба E и F, ординаты которых одинаковы: $y(-1)=y(1)=-1{,}25$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
y''	+	0	—	0	+
y	Вогнута	Точка перегиба (—1;—1,25)	Выпукла	Точка перегиба (1; 1,25)	Вогнута

7⁰. График изображен на рис. 131.

647. $y=e^{-x^2}$.

Решение. 1⁰. Функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty, \infty)$.

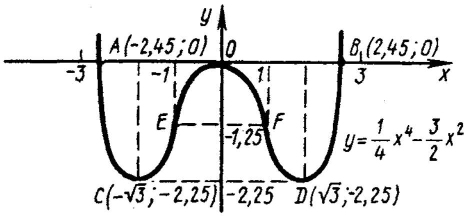


Рис. 131

2^0. Функция четная, так как $f(-x)=f(x)$. Ее график симметричен относительно оси ординат.

3^0. Если $x=0$, то $y=e^{-x^2}=e^0=1$, т. е. график функции пересекает ось ординат в точке (0; 1).

Ось абсцисс график функции не пересекает, так как равенство $e^{-x^2}=0$ ни при каких значениях x не выполняется.

4^0. Найдем критические точки функции. Имеем $y'=e^{-x^2}(-x^2)'=$ $=-2xe^{-x^2}$. Из уравнения $-2xe^{-x^2}=0$ следует, что $x=0$ — единственная критическая точка.

5^0. Точка $x=0$ делит область определения функции на промежутки $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Так как $y'_{x=-1}=-2(-1)e^{-1}=2/e>0$, $y'_{x=1}=-2\cdot 1\cdot e^{-1}=-2/e<0$, то в промежутке $(-\infty, 0)$ функция возрастает, а в промежутке $(0, \infty)$ — убывает. При $x=0$ она имеет максимум, равный 1.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	+	0	—
y	↗	$y_{\max}=1$	↘

6^0. Находим

$$y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=4e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=4e^{-x^2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

откуда $y''=0$ при $x=\pm\sqrt{2}/2\approx\pm0{,}7$. В интервалах $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ и $(\sqrt{2}/2, \infty)$ имеем $y''>0$, т. е. кривая вогнута, а в интервале $(-\bar{2}/2, \sqrt{2}/2)$ $y''<0$, т. е. кривая выпукла. Точки $A(-\sqrt{2}/2; 1/\sqrt{e})$ и $B(\sqrt{2}/2; 1/\sqrt{e})$ являются точками перегиба.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, \sqrt{2}/2)$	$-\sqrt{2}/2$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2, \infty)$
y''	+	0	—	0	+
y	Вогнута	Точка перегиба $(-\sqrt{2}/2; 1/\sqrt{e})$	Выпукла	Точка перегиба $(\sqrt{2}/2; 1/\sqrt{e})$	Вогнута

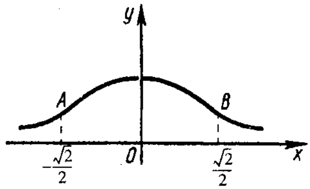


Рис. 132

7^0. График изображен на рис. 132.

648. $y=\ln(x^2+1)$.

Решение. 1^0. Область определения $(-\infty, \infty)$. Точек разрыва нет, поскольку $x^2+1>0$ при любом действительном x.

2^0. Так как $y(-x)=\ln((-x)^2+1)=\ln(x^2+1)=y(x)$, то функция четная; ее график симметричен относительно оси ординат.

3^0. Если $x=0$, то $y=\ln 1=0$, а если $y=0$, то $\ln(x^2+1)=0$, откуда $x^2+1=1$, т. е. $x=0$. Это значит, что график функции пересекает оси координат в единственной точке — начале координат.

4^0. Найдем критические точки функции. Имеем $y'=\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=$ $=\frac{2x}{x^2+1}$; $\frac{2x}{x^2+1}=0$; т. е. $x=0$ — критическая точка.

5^0. Точка $x=0$ разбивает область определения функции на два интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Так как $f'_{x<0}<0$, $f'_{x>0}>0$, то в первом из них функция убывает, во втором — возрастает, причем при $x=0$ она достигает минимума: $y_{\min}=y_{x=0}=0$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$y_{\min}=0$	$\nearrow$

6^0. Находим

$$y''=\frac{(2x)'(x^2+1)-(x^2+1)'2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

Точки $x=-1$ и $x=1$ разбивают область определения функции на три интервала: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ имеем $y''<0$, т. е. здесь кривая выпукла, а в интервале $(-1, 1)$ имеем $y''>0$, т. е. здесь кривая вогнута. При $x=-1$ и $x=1$ получаем точки перегиба A и B; при этом $y(-1)=y(1)=\ln 2$.

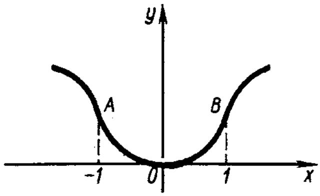


Рис. 133

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	Выпукла	Точка перегиба $(-1; \ln 2)$	Вогнута	Точка перегиба $(1; \ln 2)$	Выпукла

7°. График изображен на рис. 133.

649. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

Решение. 1°. Функция определена на всей оси Ox, за исключением точек $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$, в которых функция имеет разрыв.

2°. Функция нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$. Ее график симметричен относительно начала координат. В связи с этим можно исследовать функцию только для точек справа от оси ординат.

3°. Если $x=0$, то $y=0$, т. е. график функции проходит через начало координат. Других точек пересечения графика с осями координат нет.

4°. Находим

$$y'=\frac{(x^3)'(3-x^2)-(3-x^2)'x^3}{(3-x^2)^2}=\frac{3x^2(3-x^2)+2x\cdot x^3}{(3-x^2)^2}=$$

$$=\frac{9x^2-3x^4+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

Из уравнения $x^2(9-x^2)=0$ получим (при условии $x\geqslant 0$) $x_1=0$, $x_2=3$.

5°. Производная может менять знак при прохождении через эти точки и через эту точку разрыва функции $x=\sqrt{3}$, в которой производная не существует.

Так как $x^2\geqslant 0$ и $(3-x^2)^2\geqslant 0$, то знак производной определяется знаком разности $9-x^2$. Поэтому при $0<x<\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}<x<3$ имеем $y'>0$; следовательно, y возрастает в этих промежутках; при $x>3$ имеем $y'<0$; значит, y убывает в этом промежутке. Итак, в точке $x=3$ функция имеет максимум, равный $y_{\max}=f(3)=-9/2$.

Составим таблицу для рассматриваемой части области определения:

x	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, \infty)$
y'	$+$	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\nearrow$	$y_{\max} = -9/2$	$\searrow$

6^0. Находим

$$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)'=\frac{(9x^2-x^4)'(3-x^3)^2-(9x^2-x^4)((3-x^2)^2)'}{(3-x^2)^4}=$$

$$=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x-x^4)2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x(9-2x^2)(3-x^2)+2x(18x^2-2x^4)}{(3-x^2)^3}=$$

$$=\frac{2x(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4)}{(3-x^2)^3}=\frac{2x(27+3x^2)}{(3-x^2)^3}=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

Очевидно, что $y''=0$ только при $x=0$; кроме того, y'' не существует при $x=\sqrt{3}$ (напомним, что мы рассматриваем значения $x\geqslant 0$).

В интервале $(0, 1/\sqrt{3})$ имеем $y''>0$, т. е. кривая вогнута, а в интервале $(1/\sqrt{3}, \infty)$ имеем $y''<0$, т. е. кривая выпукла.

Вследствие симметрии графика относительно начала координат заключаем, что $y''>0$ в интервале $(-\sqrt{3}, 0)$ и $y''>0$ в интервале $(-\infty, -\sqrt{3})$. Это означает, что $(0, 0)$ — точка перегиба.

7^0. График изображен на рис. 134.

650. $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+\sin x}$.

Решение. 1^0. Область определения $(-\infty, \infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2^0. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)=\dfrac{\sin^2 x}{2-\sin x}$ и $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

Функция имеет период 2π. Учитывая это, проведем ее исследование и построим график только в пределах одного периода, например, на промежутке $[0, 2\pi]$. Затем, пользуясь периодичностью функции, продолжим график на всю область определения.

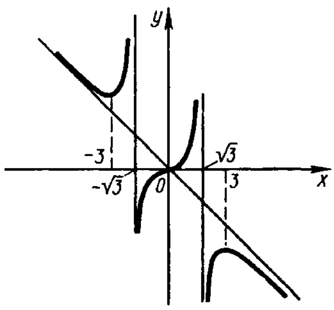


Рис. 134

3^0. Из уравнения $\dfrac{\sin^2 x}{2+\sin x}=0$ находим, что кривая пересекает ось абсцисс при $x=0$, π, 2π. С осью ординат кривая пересекается в начале координат.

4^0. Находим производную:

$$y'=\frac{(2+\sin x)\cdot 2\sin x\cos x-\sin x^2\cos x}{(2+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{\sin x\cos x(4+\sin x)}{(2+\sin x)^2}.$$

Из уравнения $\frac{\sin x\cos x(4+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=0$ следует, что $\sin x\cos x=0$ (так как $4+\sin x\neq 0$). Последнее равенство в пределах промежутка $[0, 2\pi]$ имеет место при $x=0,\ \pi/2,\ \pi,\ 3\pi/2,\ 2\pi$. Других критических точек нет.

5^0. Найденные точки делят промежуток $[0, 2\pi]$ на интервалы $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$ и $(3\pi/2, 2\pi)$. Результаты исследования знака производной в этих интервалах и значения функции в точках экстремума сведем в таблицу:

x	0	$(0, \pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2, \pi)$	π	$(\pi, 3\pi/2)$	$3\pi/2$	$(3\pi/2, 2\pi)$	2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
y	$y_{\min}=0$	$\nearrow$	$y_{\max}=\frac{1}{3}$	$\searrow$	$y_{\min}=0$	$\nearrow$	$y_{\max}=1$	$\searrow$	$y_{\min}=0$

6^0. Построим график, не исследуя вогнутости и выпуклости кривой. Из рис. 135 видно, что в каждом из исследуемых интервалов имеется точка перегиба. Вычислив y'' и приравняв ее нулю, можно определить точное положение этих точек.

651. $y=8-2x-x^2$.

652. $y=x^3-3x^2+4$.

653. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$.

654. $f(x)=x^3-3x$.

655. $y=4x^2-x^4-3$.

656. $f(x)=x^4-2x^2+3$.

657. $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+2$.

658. $f(x)=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$.

659. $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$.

660. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$.

661. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

662. $y=\frac{1}{1+x^2}$.

663. $f(x)=\frac{1}{3}-4x+2{,}5x^2-\frac{1}{3}x^3$.

664. $y=3-3x+x^3$.

665. $y=\frac{2x^2}{1+x^2}$.

666. $f(x)=\frac{1}{6}x^3-2x$.

667. $y=2x^3-6x$.

668. $y=\frac{1}{9}x(x-4)^3$.

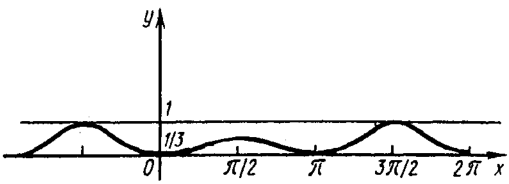


Рис. 135

669. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

670. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

671. $y=\frac{x}{9+x^2}$.

672. $y=\frac{3x^2}{x^2+1}$.

673. $y=-\frac{1}{3}x^3+3{,}5x^2-10x-\frac{1}{3}$.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Какие величины называются постоянными и переменными? Приведите примеры абсолютно-постоянных величин.

2. Что называется интервалом и отрезком? Какие виды промежутков вы еще знаете?

3. Дайте определение функции и приведите примеры функциональной зависимости.

4. Как определить частное значение функции? Проверьте, правильно ли вычислено $f(2)=5$, если $f(x)=x^3-x+1$?

5. Что называется областью определения функции? Проверьте правильность найденной области определения $[5, \infty)$ для функции $y=\sqrt{x-5}$ и $(-1{,}5; \infty)$ для функции $y=\lg(2x+3)$.

6. Какие существуют способы задания функции? Перечислите преимущества и недостатки каждого.

7. Дайте определения возрастающей и убывающей функции. Приведите примеры.

8. Какая функция называется сложной? Приведите примеры.

9. Перечислите виды основных элементарных функций, запишите их математические выражения, изобразите их графически.

10. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите свойства пределов.

11. Как прочитать запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$? Дайте определение предела функции в точке.

12. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции? Найдите приращение аргумента x и приращение функции $y=x^3$ при изменении аргумента от 1 до 2.

13. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает? Определите интервалы непрерывности функции $f(x)=\frac{1}{x+2}$.

14. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ на примере вычисления предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5x}{x^3+2x-3}$.

15. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы.

16. Как найти мгновенную скорость прямолинейного неравномерного движения?

17. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?

18. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.

19. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

20. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?

21. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?

22. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.

23. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?

24. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?

25. В чем заключается механический смысл производной?

26. Что называется производной второго порядка и каков ее механический смысл?

27. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?

28. Чем можно оправдать, что при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу? Что выражает геометрически формула $\Delta y \approx dy$?

29. Найдите с помощью дифференциала приближенное значение $\cos 60°20'$.

30. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. Каковы знаки приращений аргумента и функции в интервалах возрастания и убывания? В чем заключается признак возрастания и убывания функции?

31. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.

32. Как отыскивают экстремумы функций с помощью второй производной? Почему в точке максимума вторая производная отрицательна, а в точке минимума — положительна?

33. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?

34. Как ищется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке? Найдите эти значения для функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[-1, 4]$.

35. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?

36. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.

37. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

Ответы

4. Нет, так как $f(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$. **5.** Правильно. **12.** $\Delta x = 1$, $\Delta y = 7$. **13.** $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. **14.** 2. **29.** $\cos 60°20' \approx 0{,}495$. **34.** $y_{наиб} = 17$ при $x = 4$, $y_{наим} = -3$ при $x = -1$ и $x = 2$.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{4x - x^2 - 3}$.
2. Найдите производную функции $y = \sin^2 5x$.
3. Исследуйте на экстремум функцию $y = 2x^2 - x + 5$.
4. Найдите приближенное значение приращения функции $y = 2x^3 + 5$ при изменении аргумента от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}01$
5. Определите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 1 - 2x - x^2$ на отрезке $[-2, 2]$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}+\lg(2x-1).$$

2. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$ в точке $x=\dfrac{\pi}{4}$.

3. Исследуйте на экстремум функцию $y=x^3-6x^2$.

4. Найдите приближенное значение функции $f(x)=5x^3-2x+3$ при $x=1{,}02$.

5. Исследуйте функцию $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+5x+1$ и постройте ее график.

Ответы

Вариант 1. 1. $[1, 3]$. 2. $5\sin 10x$. 3. $y_{\min}=y(1/4)=39/8$. 4. 0,54. 5. $y_{\text{наиб}}=y(-1)=2$; $y_{\text{наим}}=y(2)=-7$. Вариант 2. 1. $(1/2, 2)$. 2. $f'(x)=\cos x-\sin x$, $f'(\pi/4)=0$. 3. $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(4)=-32$. 4. 6,26.

Глава V

Интеграл и его приложения

§ 1. Первообразная

Дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные действия
Определение первообразной функции
Неоднозначность нахождения первообразной

1. Дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные действия

Из школьного курса математики известно, что каждому математическому действию соответствует обратное ему действие. Так, вычитание есть действие, обратное сложению, деление — умножению и т. д.

В гл. IV было рассмотрено новое действие — дифференцирование. Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала заданной функции. Для дифференцирования существует обратное действие — интегрирование: нахождение функции по заданной ее производной или дифференциалу. Мы знаем, например, как по заданному закону движения $s=s(x)$ найти его скорость $v=s'$. Это — задача дифференцирования. Обратная задача — нахождение закона движения по заданной скорости — решается интегрированием. Таким образом, если в процессе дифференцирования решается задача об отыскании скорости изменения функции, вызываемого изменением аргумента, то задачей интегрирования является нахождение самой функции по заданной скорости ее изменения.

2. Определение первообразной функции

Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют *первообразной*.

Определение. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка справедливо равенство $F'(x)=f(x)$.

Из этого определения вытекает, что всякая функция по отношению к своей производной является первообразной.

Так, функция $F(x)=x^2$ есть первообразная функции $f(x)=2x$ на интервале $(-\infty, \infty)$, поскольку для всех $x \in \mathbf{R}$ имеет место равенство $F'(x)=(x^2)'=2x$.

1. Найти первообразную функции $f(x)=4x^3$.

Решение. Используя правило дифференцирования, можно догадаться, что на интервале $(-\infty, \infty)$ первообразной является $F(x)=x^4$. Действительно, $F'(x)=4x^3$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Замечание. Если сказано, что $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, но не указано, в каком именно интервале, то под этим интервалом в дальнейшем будет подразумеваться любой интервал, в котором функция $f(x)$ определена.

2. Найти первообразную функции: а) $f(x)=3x^2$; б) $f(x)=8x^7$.

3. Найти первообразную функции $y=x^6$ на множестве $\mathbf{R}$.

Решение. Степень x^6 получается при дифференцировании x^7. Так как $(x^7)'=7x^6$, то, чтобы при дифференцировании x^7 получить перед x^6 коэффициент 1, нужно x^7 взять с коэффициентом 1/7. Следовательно, $F(x)=(1/7)x^7$.

4. Найти первообразную функции $f(x)=x^5$.

5. Показать, что функция $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ является первообразной функции $f(x)=\cos 2x$.

Решение. Так как $F'(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\cos 2x$, то $\frac{1}{2}\sin 2x$ — первообразная функции $\cos 2x$.

6. Проверить, что функция $F(x)=x^5+3x^2-\cos x$ является первообразной функции $f(x)=5x^4+6x+\sin x$ на множестве $\mathbf{R}$.

7. Показать, что функция $F(x)=\sqrt{x}$ есть первообразная функции $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0, \infty)$.

8. Найти одну из первообразных следующих функций: а) $f(x)=6$; б) $f(x)=-3$; в) $f(x)=\cos x$.

9. Является ли функция $F(x)=1/x$ первообразной функции $f(x)=-1/x^2$?

10. Даны пары функций, из которых вторая должна быть первообразной для первой: а) x^4 и x^5; б) $5\cos 5x$ и $\sin 5x$; в) $3e^{3x}$ и e^{3x}; г) $-\frac{2}{\sin^2 2x}$ и $\operatorname{ctg} 2x$; д) $\frac{1}{1+9x^2}$ и $\operatorname{arctg} 3x$. В каких примерах допущены ошибки?

11. Для какой из данных функций f_1, f_2, f_3, f_4 функция F является первообразной, если $F(x)=\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}$, $f_1(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f_2(x)=\cos\frac{x}{2}$, $f_3(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, $f_4(x)=-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$?

12. Какие из данных функций F_1, F_2, F_3, F_4 являются первообразными для функции f, если $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F_1(x)=-\frac{1}{x}$, $F_2(x)=\frac{1}{x}$, $F_3(x)=-\frac{2}{x^3}$, $F_4(x)=\frac{1}{2x}$?

3. Неоднозначность нахождения первообразной

Как всякое обратное действие, интегрирование вносит некоторое осложнение. Вспомним, как начинается изучение действий над числами. Сначала изучают только целые положительные числа. Наиболее простое действие — сложение — не вносит никаких затруднений. Однако стоит только перейти к обратному действию вычитанию, как встречается первое затруднение: вычесть из меньшего числа большее невозможно. Чтобы преодолеть эту трудность, в алгебре вводят отрицательные числа и вычитание становится возможным, например $1-3=-2$. При умножении целых чисел не встречается никаких затруднений; обратное же действие — деление — сразу вносит трудность. Оказывается, что далеко не все числа делятся друг на друга. Деление становится возможным с введением дробных чисел, например $9:4=2\frac{1}{4}$. Еще большие затруднения появляются при извлечении корня — действии, обратном возведению числа в целую положительную степень; здесь уже появляются затруднения в знаках. Так, корень четной степени из положительного числа имеет два знака, а корень четной степени из отрицательного числа не имеет действительного значения. Чтобы стало возможным извлечение корней целой положительной степени из действительных чисел, требуется ввести понятия об иррациональном числе, о мнимой единице, о мнимом числе и т. д. Интегрирование как действие, обратное дифференцированию, также вносит осложнение.

Дифференцирование функции — однозначная операция, т. е. если функция имеет производную, то только одну. Это утверждение непосредственно следует из определений предела и производной: если функция имеет предел, то только один. Обратная операция — отыскание первообразной — не однозначна.

Так, функции $F_1(x)=x^4$, $F_2(x)=x^4+5$, $F_3(x)=x^4-\sqrt{3}$, $F_4(x)=x^4+C$, где C — любое постоянное действительное число, являются первообразными функции $f(x)=4x^3$, $x\in\mathbf{R}$, поскольку все эти функции имеют одну и ту же производную $4x^3$.

▲ **Теорема.** *Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид $F(x)+C$, где C — любое действительное число.*

Доказательство. Пусть $F'(x)=f(x)$. Тогда $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$.

Покажем теперь, что все первообразные функции $f(x)$ отличаются лишь постоянным слагаемым.

Пусть $\Phi(x)$ — другая первообразная функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ при всех x из рассматриваемого промежутка. Следовательно, $\Phi(x)-F(x)=C$, что и требовалось установить.

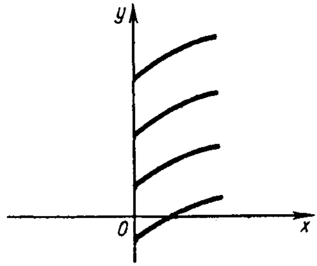


Рис. 136

Таким образом, любые две первообразные данной функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое, а выражение $F(x)+C$ исчерпывает множество всех первообразных заданной функции $f(x)$. Итак, задача нахождения первообразной неоднозначна. Она имеет бесконечное множество решений.

Геометрически выражение $F(x)+C$ представляет собой семейство кривых, получаемых из любой из них параллельным переносом вдоль оси Oy (рис. 136).

§ 2. Неопределенный интеграл и его свойства

Определение интеграла

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Определение интеграла

Как уже было отмечено, первообразную можно находить не только по данной ее производной, но и по ее дифференциалу. В дальнейшем мы будем этим пользоваться.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)\,dx$, где $f(x)$ — *подынтегральная функция,* $f(x)\,dx$ — *подынтегральное выражение,* x — *переменная интегрирования.*

Таким образом, если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где C — любое действительное число.

Замечание. Наличие постоянной C делает задачу нахождения функции по ее производной не вполне определенной; отсюда происходит и само название «неопределенный интеграл».

Так, пользуясь определением неопределенного интеграла, можно записать: $\int 2x\,dx=x^2+C$; $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ и т. д.

Значит, чтобы найти неопределенный интеграл от заданной функции, нужно найти какую-нибудь одну ее первообразную и прибавить к ней произвольную постоянную C.

Слово «интеграл» происходит от латинского слова integer, что означает «восстановленный». Интегрируя какую-либо функцию, например $4x^3$, мы как бы восстанавливаем функцию x^4, производная которой равна $4x^3$.

Чтобы проверить, правильно ли найден неопределенный интеграл, необходимо продифференцировать полученную функцию; если при этом получается подынтегральное выражение, то интеграл найден верно.

Например, $y=\int(3x^2+2)dx=x^3+2x+C$. Сделаем проверку: $y'=3x^2+2$ или $dy=(3x^2+2)dx$. Следовательно, интеграл найден верно.

13. Найти $\int 6x^5dx$.

Решение. Требуется найти такую функцию, производная которой равна $6x^5$. Из дифференциального исчисления известно, что $6x^5=(x^6)'$; значит, $\int 6x^5dx=x^6+C$.

14. Найти: а) $\int\frac{dx}{x}$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$.

15. Проверить справедливость равенства $\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C$.

Решение. Имеем $\left(-\frac{1}{2x^2}+C\right)'=\left(-\frac{1}{2}x^{-2}+C\right)'=x^{-3}+0=\frac{1}{x^3}$. Так как получили подынтегральную функцию, то данное равенство справедливо.

16. Проверить справедливость равенств:

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+C$; б) $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$.

2. Основные свойства неопределенного интеграла

Из рассмотренных ранее примеров видно, что можно находить интегралы, подбирая первообразные. Однако это не всегда просто. При интегрировании помогает знание некоторых свойств интеграла, формул интегрирования, а также специальных приемов.

Рассмотрим сначала основные свойства неопределенного интеграла.

1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции,* т. е.

$$\left(\int f(x)\,dx\right)'=f(x).$$

Это свойство непосредственно вытекает из определения неопределенного интеграла, поскольку $\int f(x)\,dx=F(x)+C$, а $(F(x)+C)'=f(x)$.

Так, $\left(\int x^5dx\right)'=x^5$, $\left(\int\cos 2x\,dx\right)'=\cos 2x$.

На этом свойстве основано доказательство двух следующих свойств,

2. *Постоянный множитель подынтегрального выражения можно вынести за знак интеграла,* т. е.

$$\int mf(x)\,dx = m\int f(x)\,dx,$$

где m — постоянная величина, не равная нулю.

Это свойство доказывается дифференцированием обеих частей приведенного равенства. При этом учитывается свойство 1: производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Действительно,

$$\left(\int mf(x)\,dx\right)' = mf(x), \quad \left(m\int f(x)\,dx\right)' = m\left(\int f(x)\,dx\right)' = mf(x).$$

Например, $\int 2ax\,dx = 2a\int x\,dx$, где a — постоянная, не равная нулю.

17. Найти интеграл $\int 5\cos x\,dx$.

3. *Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций,* т. е.

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx.$$

Для доказательства найдем производные обеих частей равенства и покажем, что они равны между собой. Сначала найдем производную левой части:

$$\left(\int (f(x) \pm \varphi(x)\,dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x);$$

мы воспользовались свойством 1 неопределенного интеграла.

Теперь найдем производную правой части равенства:

$$\left(\int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int \varphi(x)\,dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x).$$

Здесь был использован тот факт, что производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций, а также свойство 1 неопределенного интеграла.

Итак, производные обеих частей равенства равны между собой, что и доказывает свойство 3.

18. Доказать, что $\int (x^3 + x^2)\,dx = \int x^3\,dx + \int x^2\,dx$.

19. Доказать, что $\int (\sin x + \cos x)\,dx = \int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx$.

20. Представить интеграл $\int (5x^2 - 2x^3)\,dx$ как алгебраическую сумму интегралов.

Решение. $\int (5x^2 - 2x^3)\,dx = 5\int x^2\,dx - 2\int x^3\,dx$.

21. Представить интеграл $\int (2e^x + 5)\,dx$ как алгебраическую сумму интегралов.

22. Вычислить интеграл $\int (5\cos x + 2e^x)\,dx$.

Решение. $\int (5\cos x + 2e^x)\,dx = 5\int \cos x\,dx + 2\int e^x\,dx = 5\sin x + C_1 + 2e^x + C_2 = 5\sin x + 2e^x + C$.

Замечание. При интегрировании алгебраической суммы функций принято записывать только одну произвольную постоянную, так как алгебраическая сумма произвольных постоянных есть постоянная.

4. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*, т. е.

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Это свойство следует из определения неопределенного интеграла. Действительно, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, а $d(F(x) + C) = f(x)\,dx$.

Свойство 4 означает, что знак дифференциала аннулирует знак интеграла.

Например, $d\int \cos 2x\,dx = \cos 2x\,dx$, $d\int 3t\,dt = 3t\,dt$ и т. д.

5. *Неопределенный интеграл от дифференциала (производной) некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C*, т. е.

$$\int dF(x) = F(x) + C \text{ или } \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Действительно, $dF(x) = f(x)\,dx$. Возьмем интеграл от обеих частей равенства и получим $\int dF(x) = \int f(x)\,dx$. Но, по определению, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, т. е. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Например, $\int d(x^3) = x^3 + C$, $\int d(\cos x) = \cos x + C$ и т. д.

На основании этого свойства выводятся формулы интегрирования.

§ 3. Основные табличные интегралы

1. Основные формулы интегрирования

Из определения интеграла следует, что для того чтобы проинтегрировать функцию, нужно найти ее первообразную. Для ряда функций это легко сделать, используя соответствующую формулу дифференцирования.

Например, мы знаем, что $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; отсюда следует, что $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.

Итак, формулы интегрирования получаются обращением соответствующих формул дифференцирования. Выпишем в таблицу основные интегралы.

I. $\int x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C$ при $n\neq -1$.	II. $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$.
III. $\int e^x dx=e^x+C$.	IV. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$.
V. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.	VI. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$.
VII. $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C$.	VIII. $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C$.
IX. $\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C$.	X. $\int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+C$.

Интегралы, приведенные в этой таблице, называются *табличными интегралами*.

Для вывода этих формул, как уже отмечалось, используется свойство 5 неопределенного интеграла, а именно дифференцирование правой части равенства. Производная правой части равенства дает подынтегральную функцию, а дифференциал — подынтегральное выражение.

Формула I справедлива при любом n, кроме $n=-1$, так как в этом случае знаменатель обращается в нуль и выражение теряет смысл. Для доказательства найдем производную правой части равенства:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}+C\right)'=\frac{(n+1)x^n}{n+1}=x^n.$$

Мы получили подынтегральную функцию; следовательно, формула верна.

Случаю $n=-1$ соответствует формула II:

$$\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C.$$

Чтобы найти $\int\frac{dx}{x}$, заметим, что функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, причем в каждом из них она имеет первообразную.

В промежутке $(0, \infty)$ этой первообразной, очевидно, является функция $\ln x$, так как $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, т. е. $\int\frac{dx}{x}=\ln x+C$ при $x\in$ $\in(0, \infty)$.

В промежутке $(-\infty), 0)$ первообразной по отношению к $\frac{1}{x}$

является $\ln(-x)$, т. е. $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$ при $x \in (-\infty, 0)$. Действительно, $\ln(-x)$ существует при $x < 0$ и $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Итак, оба промежутка непрерывности подынтегральной функции объединяются записью $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Справедливость всех остальных табличных интегралов легко проверить, если продифференцировать их правые части.

Вычисление интегралов способом приведения их к табличным с помощью преобразования подынтегрального выражения и применения свойств 2 и 3 неопределенного интеграла называется *непосредственным интегрированием*. При этом полезно запомнить, что $\int dx = x + C$ (формула I при $n = 0$).

23. Найти интеграл $\int 3dx$ и сделать проверку.

Решение. Согласно свойству 2 постоянный множитель 3 вынесем за знак интеграла; получим $\int 3dx = 3\int dx = 3x + C$.

Проверка: $d(3x + C) = 3dx$. Так как получено подынтегральное выражение, то интеграл найден правильно.

2. Интегрирование по формуле I

На практике чаще всего приходится интегрировать степенную функцию, т. е. применять формулу I.

24—123. Найти интегралы и проверить результаты дифференцированием.

24. $\int x^4\, dx$.

Решение. Применим формулу I при $n = 4$:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C.$$

Проверка: $d\left(\frac{1}{5}x^5 + C\right) = \frac{1}{5} \cdot 5x^4 dx = x^4 dx$. Получили подынтегральное выражение; следовательно, интеграл найден верно.

25. $\int x^6 dx$. **26.** $\int x^k dx$.

27. $\int \frac{dx}{x^2}$. **28.** $\int \frac{dx}{x^5}$.

29. $\int x^{2/3} dx$.

Решение. $\int x^{2/3}dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5}x^{5/3} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$.

Проверка: $d\left(\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C\right) = d\left(\frac{3}{5}x^{5/3} + C\right) = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{3}x^{5/3-1}dx = x^{2/3}dx$, т. е. интеграл найден верно.

30. $\int\sqrt{x}\,dx.$ **31.** $\int\sqrt[3]{x^2}\,dx.$

32. $\int 8x^3\,dx.$

Решение. Применив свойство 2 и формулу I, получим

$$\int 8x^3dx=8\int x^3dx=8\cdot\frac{x^4}{4}+C=2x^4+C.$$

Проверка: $d(2x^4+C)=2\cdot 4x^3dx=8x^3dx$. Решение выполнено правильно.

33. $\int 5t^4\,dt.$ **34.** $\int 4x^7\,dx.$

35. $\int(5x^3-2x^2+3x-8)\,dx.$

Решение. Применяя свойства 2 и 3, а затем формулу I, получим

$$\int(5x^3-2x^2+3x-8)dx=5\int x^3dx-2\int x^2dx+3\int x\,dx-8\int dx=$$
$$=5\cdot\frac{x^4}{4}-2\cdot\frac{x^3}{3}+3\cdot\frac{x^2}{2}-8x+C=\frac{5}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-8x+C.$$

Здесь C — алгебраическая сумма четырех произвольных постоянных слагаемых, являющихся составной частью каждого интеграла.

Продифференцировав этот результат, получим подынтегральное выражение, т. е. решение верное.

36. $\int(4x^3-15x^2+14x-3)dx.$ **37.** $\int(6x^3-3x^2+2x-5)\,dx.$

38. $\int(4ax^3-6bx^2-4cx+e)\,dx.$ **39.** $\int(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x})\,dx.$

Решение. $\int(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt{x})dx=\int x^{2/3}dx+\int x^{1/2}dx=\dfrac{3x^{5/3}}{5}+\dfrac{2x^{3/2}}{3}+$ $+C=\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{3}x\sqrt{x}+C.$

40. $\int\left(3\sqrt{x}-\frac{2}{5}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[4]{a^3}\right)dx.$

41. $\int\left(x^{-5}+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{4x^3}-\frac{2}{a^2}\right)dx.$

42. $\int(2x-1)^3dx.$

Решение. $\int(2x-1)^3dx=\int(8x^3-12x^2+6x-1)\,dx=8\int x^3dx-$ $-12\int x^2dx+6\int x\,dx-\int dx=2x^4-4x^3+3x^2-x+C$. Дифференцированием результата легко убедиться, что решение верное.

43. $\int x^3(1+5x)\,dx.$ **44.** $\int(x-2)^3\,dx.$

45. $\int\frac{3x^3-2x^2+5x}{2x}dx.$

Решение. $\int\dfrac{3x^3-2x^2+5x}{2x}dx=\dfrac{3}{2}\int x^2dx-\int x\,dx+\dfrac{5}{2}\int dx=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{x^3}{3}-$ $-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{5x}{2}+C=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{5}{2}x+C.$

46. $\int\frac{x^3+3x^2+4x}{x}dx.$ **47.** $\int\frac{4x^4-2x^3+x^2}{x^2}dx.$

Замечание. Следует иметь в виду, что разные способы интегрирования одной и той же функции иногда приводят к функциям, различным по своему виду. Это кажущееся противоречие можно устранить, если показать, что разность между полученными функциями есть постоянная величина.

Например,

$$\int(2x+2)\,dx=\int 2x\,dx+2\int dx=x^2+2x+C.$$

Найдем этот интеграл другим способом:

$$\int(2x+2)dx=2\int(x+1)dx=2\int(x+1)\,d(x+1)=(x+1)^2+C.$$

Результаты имеют различный вид, однако легко проверить, что они отличаются на постоянную величину, равную 1, и, значит, оба ответа верны.

3. Интегрирование по формуле II

48. $\int\frac{2dx}{x}$.

Решение. Применяя свойство 2 и формулу II, находим

$$\int\frac{2dx}{x}=2\int\frac{dx}{x}=2\ln|x|+C.$$

Проверка: $d(2\ln x+C)=2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2dx}{x}$. Получили подынтегральное выражение; следовательно, интеграл найден верно.

49. $\int 5x^{-1}dx$. **50.** $\int\frac{dx}{ax}$.

51. $\int\frac{x^3+1}{x}dx$.

Решение. Разделив числитель почленно на x, представим подынтегральную функцию в виде суммы двух дробей:

$$\int\frac{x^3+1}{x}dx=\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx.$$

Разобьем последний интеграл на сумму двух интегралов и применим формулы I и II. Тогда получим

$$\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx=\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}+\ln|x|+C.$$

Продифференцировав результат, легко убедиться, что решение верно.

52. $\int\frac{x^2+x+5}{2x}dx$. **53.** $\int\frac{x^3-2x^2-3x-4}{x^2}dx$.

54. $\int\frac{(3x+1)^2}{x}dx$.

Решение. $\int\frac{(3x+1)^2}{x}dx=\int\frac{9x^2+6x+1}{x}dx=9\int x\,dx+6\int dx+\int\frac{dx}{x}=$
$=9\cdot\frac{x^2}{2}+6x+\ln|x|+C=4{,}5x^2+6x+\ln|x|+C.$

55. $\int\left(\frac{2+x}{x}\right)^2 dx$. 56. $\int\frac{(2x-1)^2}{x}dx$.

57. $\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}$.

Решение. Подынтегральное выражение $\frac{2x}{1+x^2}$ есть дробь, числитель которой является дифференциалом знаменателя: $d(1+x^2)=$ $=2x\,dx$. Тогда получим

$$\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\ln(1+x^2)+C.$$

Здесь снова использована формула II. Знак абсолютной величины не пишем, так как при любом значении x справедливо неравенство $1+x^2>0$.

58. $\int\frac{dx}{1+x}$. 59. $\int\frac{dx}{x+a}$.

60. $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$. 61. $\int\frac{2x}{x^2+5}dx$.

62. $\int\frac{x^2dx}{x^3+5}$. 63. $\int\frac{x^3dx}{x^4+2}$.

Замечание. При выполнении интегрирования нужно твердо помнить, что применение табличных интегралов возможно только тогда, когда под знаком дифференциала стоит выражение, отвечающее определенным требованиям. Так, при использовании формулы I под знаком дифференциала должно быть основание степени, при применении формулы II в числителе должен находиться дифференциал знаменателя и т. д.

Например:

$$\int(5-x^3)x^2dx=-\frac{1}{3}\int(5-x^3)d(5-x^3)=-\frac{(5-x^3)^2}{6}+C;$$

$$\int\operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

4. Интегрирование по формулам III и IV

Справедливость формул III и IV, т. е.

$$\int e^x dx=e^x+C \quad \text{и} \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,$$

легко проверяется дифференцированием их правых частей:

$$d(e^x+C)=e^x dx;\quad d\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)=\frac{a^x\ln a}{\ln a}dx=a^x dx.$$

Отметим, что формула III является частным случаем формулы IV при $a=e$.

64. $\int(x^5+3e^x)dx$.

Решение. $\int(x^5+3e^x)dx=\int x^5dx+3\int e^x dx=\frac{1}{6}x^6+3e^x+C$.

Здесь были применены свойства 3 и 2 (разложение на сумму интегралов и вынесение постоянного множителя за знак интеграла), а затем для первого интеграла формула I, для второго — формула III.

Проверка: $d\left(\frac{1}{6}x^6+3e^x+C\right)=(x^5+3e^x)dx$.

65. $\int(e^x+5x)dx$. **66.** $\int(2e^x+4x^3)dx$.

67. $\int(x^3+2^x)dx$.

Решение. $\int(x^3+2^x)dx=\int x^3dx+\int 2^xdx=\frac{1}{4}x^4+\frac{2^x}{\ln 2}+C$. Так как продифференцировав результат, получим подынтегральное выражение, то решение верное.

68. $\int(2x-4^x)dx$. **69.** $\int(7x^6+5^x+4e^x)dx$.

70. $\int b^xdx$. **71.** $\int\left(\frac{2}{x}+8e^x+5^x-x^{-3/5}\right)dx$.

72. $\int e^{3x}dx$.

Решение. Согласно сделанному ранее замечанию, под знаком дифференциала должен стоять показатель степени, но $d(3x)=3dx$. Следовательно, необходимо добавить множитель $1/3$. Тогда получим

$$\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$$

73. $\int e^{-x}dx$. **74.** $\int xe^{-x^2}dx$.

5. Интегрирование по формулам V и VI

Справедливость формул V и VI, т. е.

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C \quad \text{и} \quad \int\cos x\,dx=\sin x+C,$$

также проверяется дифференцированием их правых частей:

$$d(-\cos x+C)=-(-\sin x)dx=\sin x\,dx,\quad d(\sin x+C)=\cos x\,dx.$$

75. $\int 2\sin x\,dx$.

Решение. Непосредственно по формуле V находим

$$\int 2\sin x\,dx=2\int\sin x\,dx=-2\cos x+C.$$

76. $\int\left(5x^3-\frac{8}{x}-\sin x\right)dx$. **77.** $\int(3e^u-2\sin u)du$.

78. $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx$.

Решение. Применяя формулу $\sin 2x=2\sin x\cos x$, получим

$$\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx=2\int\sin x\,dx=-2\cos x+C.$$

79. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx$.

Решение. Имеем

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$=\int(1+\sin x)dx=\int dx+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C.$$

Здесь мы применили формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$.

80. $\int 5\cos x\,dx$.

Решение. Используя формулу VI, находим

$$\int 5\cos x\,dx=5\int\cos x\,dx=5\sin x+C.$$

81. $\int(7x^2+3\cos x-\sqrt[3]{x})dx$.

Решение. $\int(7x^2+3\cos x-\sqrt[3]{x})dx=7\int x^2\,dx+3\int\cos x\,dx-\int x^{1/3}dx=$ $=\frac{7x^3}{3}+3\sin x-\frac{3x^{4/3}}{4}+C=\frac{7}{3}x^3+3\sin x-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C.$

82. $\int\frac{\sin 2x}{\sin x}dx$.

83. $\int\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$.

84. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$.

85. $\int(\sin x+\cos x+e^x)dx$.

86. $\int(2\sin x+3\cos x)dx$.

87. $\int(x^3+2^x+3\sin x+3\cos x)dx$.

88. $\int\cos 5x\,dx$.

Решение. Согласно сделанному ранее замечанию, под знаком дифференциала должен находиться аргумент подынтегральной функции. Следовательно,

$$\int\cos 5x\,dx=\frac{1}{5}\int\cos 5x\;d(5x)=\frac{1}{5}\sin 5x+C.$$

89. $\int\sin\frac{x}{2}dx$.

Решение. $\int\sin\frac{x}{2}dx=2\int\sin\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=-2\cos\frac{x}{2}+C.$

90. $\int\sin(-4x)dx$.

91. $\int\cos 3x\,dx$.

92. $\int\cos(5-2x)dx$.

93. $\int x\sin x^2\,dx$.

6. Интегрирование по формулам VII и VIII

Справедливость формул VII и VIII, а именно

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C \quad \text{и} \quad \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C,$$

проверяется дифференцированием их правых частей:

$$d(\operatorname{tg}x+C)=\frac{1}{\cos^2 x}dx;\quad d(-\operatorname{ctg}x+C)=\frac{1}{\sin^2 x}dx.$$

94. $\int\frac{3dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Непосредственно по формуле VII находим

$$\int\frac{3dx}{\cos^2 x}=3\int\frac{dx}{\cos^2 x}=3\operatorname{tg}x+C.$$

95. $\int\frac{dx}{5\cos^2 x}$. 96. $\int\frac{du}{3\sin^2 u}$.

97. $\int\frac{\cos^2 x+3}{\cos^2 x}dx$. 98. $\int\frac{4+\cos^3 x}{\cos^2 x}\,dx$.

99. $\int\operatorname{tg}^2 x\,dx$. 100. $\int\left(5^x-\frac{1}{x^5}+\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx$.

101. $\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx$.

Решение. Применяя формулу $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$, получим

$$\int\frac{\cos 2x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^2 x\sin^2 x}dx=$$

$$=\int\frac{dx}{\sin^2 x}-\int\frac{dx}{\cos^2 x}=-\operatorname{ctg}x-\operatorname{tg}x+C.$$

102. $\int\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}$. 103. $\int\frac{1+\cos^2 x}{1+\cos 2x}dx$.

104. $\int\frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx$.

Решение. $\int\frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{2}{\sin^2 x}\right)dx=3\operatorname{tg}x+2\operatorname{ctg}x+$
$+C$.

105. $\int\frac{2\sin^3 x+3}{\sin^2 x}dx$. 106. $\int\frac{\sin^4 x}{\sin^2 2x}dx$.

107. $\int\frac{dx}{\cos^2(2x+1)}$.

Решение. В силу сделанного ранее замечания под знаком дифференциала должен стоять аргумент. Так как $d(2x+1)=2dx$, то $dx=$ $=\frac{1}{2}d(2x+1)$. Следовательно,

$$\int\frac{dx}{\cos^2(2x+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(2x+1)}{\cos^2(2x+1)}=\frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x+1)+C.$$

108. $\int\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{1}{5}x-4\right)}$.

Решение. Так как $d\left(\frac{1}{5}x-4\right)=\frac{1}{5}dx$, то $dx=5d\left(\frac{1}{5}x-4\right)$. Поэтому

$$\int\frac{dx}{\sin^2\left(\frac{1}{5}x-4\right)}=5\int\frac{d\left(\frac{1}{5}x-4\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{5}x-4\right)}=-5\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{5}x-4\right)+C.$$

109. $\int\frac{dx}{\sin^2 6x}$. 110. $\int\frac{dx}{2\cos^2 5x}$.

111. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$. **112.** $\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$.

113. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2(x^2+1)}$. **114.** $\int \frac{x^4 dx}{\cos^2(x^5+2)}$.

115. $\int \sin x \cos x\, dx$.

Решение. Проинтегрируем, применяя различные приемы преобразования подынтегрального выражения:

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}2\sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x\, d(2x) =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C;$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x\, d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C;$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = -\int \cos x\, d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

Может показаться, что для одного и того же интеграла получено три различных ответа: $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$; $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$; $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C$. Однако это не так. Легко убедиться в том, что любые из ответов отличаются друг от друга только на постоянную величину. Проверьте это самостоятельно.

7. Интегрирование по формулам IX и X

Справедливость формул IX и X, т. е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

проверяется дифференцированием их правых частей:

$$d(\arcsin x + C) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad d(\operatorname{arctg} x + C) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

116. $\int \frac{2dx}{3\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Применяя свойство 2 и формулу X, находим

$$\int \frac{2dx}{3\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\arcsin x + C.$$

Продифференцировав результат, получим подынтегральное выражение. Следовательно, решение верное.

117. $\int \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3-3x^2}dx$. **118.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)(1+x)}dx$.

119. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^2 dx}{x^2+1} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1} dx - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Здесь мы преобразовали числитель: $x^2 = x^2 + 1 - 1$, а затем использовали свойство 3 и формулы I и X.

120. $\int \left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}} \right) dx.$ **121.** $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)}.$

122. $\int \frac{1+x^2+3\cos^2 x}{(1+x^2)\cos^2 x} dx.$ **123.** $\int \frac{x^4 dx}{1+x^2}.$

§ 4. Приложения неопределенного интеграла

Нахождение первообразной по начальным условиям
Выделение из семейства кривых с одинаковым наклоном линии, проходящей через конкретную точку
Составление уравнения движения тела по заданному уравнению скорости или ускорения его движения

1. Нахождение первообразной по начальным условиям

Как известно, при интегрировании функции получается совокупность ее первообразных. Для выделения из всей совокупности конкретной первообразной задают дополнительные данные, так называемые начальные условия.

При решении таких задач используют следующий алгоритм:

1^0. Находят неопределенный интеграл от заданной функции.

2^0. Вычисляют величину C, подставляя начальные условия в полученную совокупность первообразных для заданной функции.

3^0. Находят искомую первообразную, заменяя в совокупности первообразных постоянную интегрирования ее вычисленным значением.

124. Найти функцию, производная которой равна $3t^2 - 2t + 1$, если известно, что при $t = 2$ функция принимает значение, равное 25.

Решение. 1^0. Из условия следует, что искомая функция является первообразной функции $3t^2 - 2t + 1$; поэтому, взяв неопределенный интеграл от $3t^2 - 2t + 1$, найдем все первообразные указанной функции:

$$\int (3t^2 - 2t + 1)dt = 3\int t^2 dt - 2\int t\, dt + \int dt = t^3 - t^2 + t + C.$$

2^0. Из полученного выражения $t^3 - t^2 + t + C$, определяющего все первообразные функции $3t^2 - 2t + 1$, найдем теперь искомую первообразную функцию. Используя дополнительное условие (значение искомой функции равно 25 при $t = 2$), найдем определенное значение постоянной интегрирования C; имеем $2^3 - 2^2 + 2 + C = 25$, откуда $C = 19$.

3^0. Итак, искомая функция имеет вид $y = t^3 - t^2 + t + 19$.

125. Найти функцию $F(x)$, производная которой $F'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$, а $F(0)=1$.

126. Найти функцию, обращающуюся в нуль при $x=0$, если производная этой функции имеет вид $y'=3x^2-4x+5$.

127. Найти функцию, дифференциал которой равен $(5x+2)dx$, зная, что при $x=2$ функция принимает значение, равное 20.

128. Найти $\int(\cos x-\sin x)dx$, если при $x=\pi/2$ первообразная равна 6.

2. Выделение из семейства кривых с одинаковым наклоном линии, проходящей через конкретную точку

Под наклоном кривой понимают тангенс угла наклона касательной к этой кривой в данной точке.

Из дифференциального исчисления известно, что наклон k кривой $y=f(x)$ (угловой коэффициент касательной) в точке с абсциссой x равен значению производной в этой точке, т. е. $k=y'$.

Рассмотрим теперь обратную задачу: зная наклон k кривой в любой ее точке как функцию абсциссы этой точки, т. е. зная, что $k=f(x)$, найти уравнение кривой.

Так как $k=y'=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}=f(x)$, т. е. $dy=f(x)dx$, откуда интегрированием найдем $y=\int f(x)dx$. Вычислив этот неопределенный интеграл, получим уравнение $y=F(x)+C$, содержащее произвольную постоянную C. Очевидно, этому уравнению на плоскости соответствует бесконечное множество кривых (семейство кривых), уравнения которых отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми.

Графики функций, получающихся в результате интегрирования, называются *интегральными кривыми*. Каждый интеграл дает семейство интегральных кривых. Интегральные кривые одного семейства имеют одну и ту же форму и смещены друг относительно друга по вертикали. Сдвиг кривой определяется постоянной C. Из семейства этих кривых, имеющих один и тот же наклон, нам нужно уметь выделять ту, которая проходит через данную точку (рис. 137).

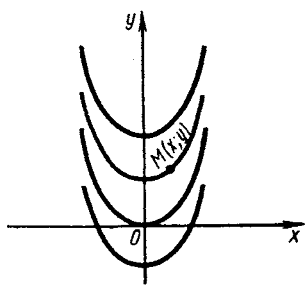


Рис. 137

129. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (3; 4), если угловой коэффициент касательной к этой кривой в любой ее точке $(x;\ y)$ равен x^2-2x.

Решение. 1^0. Нам известно, что

$k = \operatorname{tg}\alpha = \frac{dy}{dx}$. В данном случае имеем $\frac{dy}{dx} = x^2 - 2x$; $dy = (x^2 - 2x)\,dx$.

В результате интегрирования получаем $y = \int (x^2 - 2x)\,dx$, т. е.

$$y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + C. \quad (1)$$

2^0. Теперь из найденного семейства кривых выделим ту кривую, которая проходит через данную точку (3; 4). Для этого подставим в уравнение (1) вместо x и y координаты данной точки. Имеем $4 = \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 3^2 + C$, т. е. $C = 4$.

3^0. Через данную точку проходит та из кривых семейства (1), для которой $C = 4$, т. е. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 4$.

130. Из семейства кривых, имеющих наклон, равный $2x$, выделить ту, которая проходит через точку (3; 5).

131. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 4), если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой задается функцией $3x^2$.

132. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2; 3), зная, что угловой коэффициент касательной к кривой, проведенной в любой ее точке, равен $x^2 - 1$.

133. Из семейства кривых, имеющих наклон, равный $3x^2 - 2x$, выделить ту, которая проходит через точку (1; 4).

134. На промежутке $(0, \infty)$ найти такую первообразную функции $f(x) = 1/x^2$, график которой проходит через точку (1; 3).

3. Составление уравнения движения тела по заданному уравнению скорости или ускорения его движения

Из дифференциального исчисления известно, что $v = s'(t)$ и $a(t) = v'(t) = s''(t)$, где $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ — соответственно путь, скорость и ускорение движущегося тела. Тогда закон движения тела по заданной скорости можно найти интегрированием, а по заданному ускорению — двукратным интегрированием.

135. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $v = t^2 - 8t + 3$. Найти уравнение движения точки.

Р е ш е н и е. 1^0. Известно, что скорость прямолинейного движения тела равна производной пути s по времени t, т. е. $v = \frac{ds}{dt}$, откуда $ds = v\,dt$. Тогда имеем $ds = (t^2 - 8t + 3)\,dt$.

2^0. Чтобы найти уравнение движения, проинтегрируем обе части полученного равенства:

$$\int ds = \int (t^2 - 8t + 3)\,dt; \quad s = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 3t + C.$$

Это искомое уравнение.

В следующих задачах данного раздела рассматривается прямолинейное движение.

136. Скорость тела задана уравнением $v=6t^2+1$. Найти уравнение движения, если за время $t=3$ с тело прошло путь $s=60$ м.

Решение. 1^0. Имеем $ds=v\,dt=(6t^2+1)dt$; тогда $s=\int(6t^2+1)dt=$ $=2t^3+t+C$.

2^0. Подставив в найденное уравнение начальные условия $s=60$ м, $t=3$ с, получим $60=2\cdot3^3+3+C$, откуда $C=3$.

3^0. Искомое уравнение примет вид $s=2t^3+t+3$.

137. Тело движется со скоростью $v=(3t^2-1)$ м/с. Найти закон движения $s(t)$, если в начальный момент тело находилось на расстоянии 5 см от начала отсчета.

Решение. 1^0. Так как $ds=v\,dt=(3t^2-1)dt$, то $s=\int(3t^2-1)dt=$ $=t^3-t+C$.

2^0. Из условия следует, что если $t=0$, то $s=5$ см $=0{,}05$ м. Подставив эти данные в полученное уравнение, имеем $s=t^3-t+C$, откуда $0{,}05=C$.

3^0. Тогда искомое уравнение примет вид $s=t^3-t+0{,}05$.

138. Уравнение скорости движущейся точки имеет вид $v=$ $=2t-3$. Найти уравнение движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь 6 м.

139. Скорость движения тела задана уравнением $v=t^2-t+3$. Найти уравнение движения, если в начальный момент времени $s_0=3$ м.

140. Найти уравнение движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь $s_0=4$ м, а ее скорость задана уравнением $v=t^2-6t+7$.

141. Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени. Найти уравнение движения тела, если известно, что за 3 с оно прошло 18 м.

142. Тело, находившееся в начальный момент в покое, падает с постоянным ускорением g. Найти закон движения.

Решение. 1^0. Известно, что ускорение прямолинейно движущегося тела есть производная скорости v по времени t. Следовательно, $g=\frac{dv}{dt}$, т. е. $dv=g\,dt$. Отсюда после интегрирования находим

$$v=\int g\,dt=g\int dt=gt+C.$$

2^0. Используя начальные условия $v=0$ при $t=0$, находим $C_1=0$.

3^0. Таким образом, уравнение скорости движения имеет вид $v=gt$.

4^0. Теперь воспользуемся тем, что скорость тела есть производная пути s по времени t, т. е. $v=\frac{ds}{dt}$. Так как $v=gt$, то $\frac{ds}{dt}=gt$ или $ds=gt\,dt$. Интегрируя, находим

$$\int ds=\int gtdt,\quad s=\frac{gt^2}{2}+C_2.$$

5^0. Используя начальные условия $s=0$ при $t=0$, получим $C_2=0$.

6^0. Итак, уравнение движения свободно падающего тела имеет вид $s=\frac{gt^2}{2}$.

143. Тело движется с ускорением $a=(t^2+1)$ м/с². Найти закон движения тела, если в момент $t=1$ с скорость $v=2$ м/с, а путь $s=4$ м.

Решение. Эта задача также решается в два этапа. Сначала нужно найти $v(t)$, зная, что $a=v'(t)$, а затем найти $s(t)$, зная, что $v=s'(t)$.

1⁰. Имеем $dv=a\,dt=(t^2+1)dt$, откуда

$$v=\int(t^2+1)dt=\frac{1}{3}t^3+t+C_1.$$

2⁰. Используя начальные условия $v=2$ при $t=1$, получим $2=\frac{1}{3}+1+C_1$, откуда $C_1=\frac{2}{3}$.

3⁰. Следовательно, $v=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}$.

4⁰. Имеем $ds=v\,dt=\left(\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}\right)dt$, откуда

$$s=\int\left(\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}\right)dt=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{3}t+C_2.$$

5⁰. Используя начальные условия $s=4$ при $t=1$, получим $4=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+C_2$, откуда $C_2=\frac{11}{4}$.

6⁰. Итак, $s=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{3}t+\frac{11}{4}$.

144. Ускорение движения тела задано уравнением $a=24t^2+8$. Найти закон движения тела, если в момент $t=1$ с скорость тела $v=10$ м/с, а путь $s=12$ м.

145. Тело движется с ускорением $a=12t^2+6t$. Найти уравнение скорости движения и уравнение движения, если в момент $t=1$ с скорость тела $v=8$ м/с, а путь $s=6$ м.

§ 5. Интегрирование подстановкой и по частям

Способ подстановки (замены переменной)
Примеры интегрирования подстановкой
Способ интегрирования по частям

1. Способ подстановки (замены переменной)

Если заданный интеграл с помощью алгебраических преобразований трудно или невозможно свести к одному или нескольким табличным интегралам, то для его отыскания применяют особые способы, одним из которых является способ подстановки (замены переменной).

Заметим, что все способы интегрирования имеют целью свести данный интеграл к табличному с помощью тех или иных искусственных приемов.

Способ подстановки заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Например, в интеграле $\int \sin x \cos x\,dx$ удобно произвести замену $t=\sin x$, так как оставшаяся часть подынтегрального выражения равна $\cos x\,dx=dt$. Тогда перепишем данный интеграл в виде

$$\int \sin x \cos x\,dx=\int t\,dt.$$

Полученный интеграл является табличным; он находится по формуле I:

$$\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C.$$

Далее, произведя обратную замену $t=\sin x$, получим ответ:

$$\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

Решение этого примера можно кратко оформить так:

$$\int \sin x \cos x\,dx=\left|\begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\,dx\end{matrix}\right|=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=\frac{1}{2}\sin^2 x+C.$$

Напомним, что если при интегрировании одной и той же функции разными способами получили различные результаты, то необходимо показать, что они отличаются на постоянную величину.

Так, рассмотренный выше пример можно решить иначе, если применить формулу $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. Тогда получим

$$\int \sin x \cos x\,dx=\frac{1}{2}\int \sin 2x\,dx=-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Результат по виду отличается от найденного ранее; однако, преобразуя первый результат, имеем

$$\frac{1}{2}\sin^2 x+C=\frac{1}{4}(1-\cos 2x)+C=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\cos 2x+C.$$

Отсюда видно, что разность функций равна $\frac{1}{4}$, т. е. постоянному числу.

Следует иметь в виду, что мы уже встречались с простейшими случаями подстановок, только выполняли их в другом оформлении записи (см. примеры 88, 89, 107, 108).

2. Примеры интегрирования подстановкой

Естественно возникает вопрос: как правильно выбрать подстановку? Это достигается практикой в интегрировании. Все же можно установить ряд общих правил и некоторых приемов для частных случаев интегрирования.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1^0. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2^0. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3^0. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4^0. Производят замену под интегралом.

5^0. Находят полученный интеграл.

6^0. В результате производят обратную замену, т. е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Частные приемы будут рассмотрены по ходу решения примеров.

146—206. Найти неопределенные интегралы способом подстановки:

146. $\int(2x+3)^4dx$.

Решение. $\int(2x+3)^4dx=\left|\begin{matrix} z=2x+3, \\ dz=2dx, \\ dx=\frac{1}{2}dz \end{matrix}\right|=\frac{1}{2}\int z^4dz=0{,}1z^5+C=$
$=0{,}1(2x+3)^5+C$.

Проверка: $d(0{,}1(2x+3)^5+C)=0{,}5(2x+3)^4(2x)'dx=(2x+3)^4dx$.

147. $\int(7-2t)^3dt$. **148.** $\int(5u-1)^3du$.

149. $\int(1+x^5)^7x^4dx$. **150.** $\int(9-2x^3)^4x^2dx$.

151. $\int\sqrt{x+1}\,dx$.

Решение. $\int\sqrt{x+1}\,dx=\left|\begin{matrix} z=x+1, \\ dz=dx \end{matrix}\right|=\int\sqrt{z}dz=\int z^{1/2}dz=\frac{2}{3}z^{3/2}+$
$+C=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$.

Проверка: $d\left(\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C\right)=d\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right)=\frac{2}{3}\times$
$\times\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}dx=\sqrt{x+1}\,dx$.

152. $\int\sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx$. **153.** $\int\sqrt[4]{5u+6}\,du$.

154. $\int\sqrt[3]{3x+5}\,dx$. **155.** $\int\frac{dx}{(3t-1)^3}$.

156. $\int\sqrt{1+x^3}\,x^2dx$.

Решение. $\int\sqrt{1+x^3}\,x^2dx=\left|\begin{array}{l}1+x^3=z,\\ x^2dx=\frac{1}{3}dz\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int z^{1/2}dz=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}+$
$+C=\frac{2}{9}z^{3/2}+C=\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}+C=\frac{2}{9}(1+x^3)\sqrt{1+x^3}+C.$

Проверка: $d\left(\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}+C\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}(1+x^3)^{1/2}\cdot 3x^2dx=$
$=\sqrt{1+x^3}\,x^2dx.$

157. $\int(2x^3+1)^4x^2\,dx$. **158.** $\int 4(t^4+5)^2t^3\,dt$.

159. $\int\sqrt{2x^2+1}\,x\,dx$. **160.** $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

161. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{l}t=1-x^2,\\ dt=-2x\,dx,\\ x\,dx=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt=$

$=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{1/2}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-x^2}+C.$

162. $\int 3\sqrt{u^3-1}\,u^2du$. **163.** $\int 2\sqrt{t^4-3}\,t^3dt$.

164. $\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$. **165.** $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$.

166. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

Решение. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\left|\begin{array}{l}1+\ln x=t,\\ \frac{1}{x}dx=dx\end{array}\right|=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=$

$=\frac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C.$

167. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$. **168.** $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

169. $\int\sin^2x\cos x\,dx$. **170.** $\int e^{\sin^2x}\sin 2x\,dx$.

171. $\int\cos^3x\,dx$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию: $\cos^3x=\cos^2x\cdot\cos x=(1-\sin^2x)\cos x$. Далее находим

$$\int\cos^3x\,dx=\int(1-\sin^2x)\cos x\,dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t,\\ \cos x\,dx=dt\end{array}\right|=\int(1-t^2)\,dt=$$
$$=\int dt-\int t^2dt=t-\frac{1}{3}t^3+C=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C.$$

172. $\int(\cos^3x+1)^2\sin x\,dx$. **173.** $\int 4\sin^3x\,dx$.

174. $\int x^2\cos(4-x^3)dx$. **175.** $\int x^3\sin 3x^4\,dx$.

176. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t, \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt, \\ \frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array} \right| = 2\int \sin t\,dt = -2\cos t + C =$

$= -2\cos\sqrt{x} + C$.

Этот интеграл можно также найти подведением $\sqrt{x}$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = -2\cos\sqrt{x} + C.$$

177. $\int \sin nx\,dx$.

Решение. $\int \sin nx\,dx = \left| \begin{array}{l} t=nx, \\ dt=ndx, \\ dx=\frac{1}{n}dt \end{array} \right| = \frac{1}{n}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{n}\cos t + C =$

$= -\frac{1}{n}\cos nx + C$.

Итак,

$$\int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx + C. \qquad (1)$$

178. $\int \cos nx\,dx$.

Решение. $\int \cos nx\,dx = \left| \begin{array}{l} t=nx, \\ dt=ndx, \\ dx=\frac{1}{n}dt \end{array} \right| = \frac{1}{n}\int \cos t\,dt = \frac{1}{n}\sin t + C =$

$= \frac{1}{n}\sin nx + C$.

Итак,

$$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx + C. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) полезно запомнить и пользоваться ими как табличными интегралами.

179. $\int \sin 3x\,dx$.

Решение. Имеем $\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

180. $\int \sin^2 x\,dx$. **181.** $\int \frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}$.

182. $\int \operatorname{tg} x\,dx$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Далее, находим

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{l} \cos x = z, \\ -\sin x\,dx = dz, \\ \sin x\,dx = -dz \end{array} \right| =$$

$$= -\int \frac{dz}{z} = -\ln|z| + C = -\ln|\cos x| + C.$$

183. $\int \frac{dx}{2x-1}$. **184.** $\int \frac{2dt}{4t-6}$.

185. $\int \frac{x\,dx}{x^2+1}$. **186.** $\int \frac{x^2 dx}{1+x^3}$.

187. $\int \frac{dx}{ax+b}$. **188.** $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

189. $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$. **190.** $\int \frac{\sin 3x\,dx}{2+\cos 3x}$.

191. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = t, \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^5} = \int t^{-5} dt =$

$= -\frac{1}{4}t^{-4} + C = -\frac{1}{4(\arcsin x)^4} + C.$

192. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx$.

Решение. $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx = \left| \begin{matrix} \operatorname{arctg} x = t, \\ \frac{1}{1+x^2}dx = dt \end{matrix} \right| = \int t\,dt = \frac{1}{2}t^2 + C =$

$= \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2 + C.$

193. $\int \sqrt{\operatorname{arctg}^3 x}\frac{dx}{1+x^2}$. **194.** $\int \arcsin^2 x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

195. $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$. **196.** $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

197. $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **198.** $\int \frac{(\arcsin x)^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

199. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$.

Решение. Приведем данный интеграл к табличному виду X:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \int \frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Воспользуемся подстановкой $x = at$; $dx = a\,dt$. Тогда получим

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{a\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg} t + C = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C.$$

Итак,

$$\frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}. \quad (3)$$

200. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Приведем данный интеграл к табличному виду IX:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Используем подстановку $x=at$; $dx=a\,dt$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{a}\int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}}=\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin t+C=\arcsin\frac{x}{a}+C.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) полезно запомнить и пользоваться ими как табличными интегралами.

201. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. **202.** $\int \frac{dt}{9+t^2}$.

203. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$. **204.** $\int \frac{dx}{5+x^2}$.

205. $\int \frac{dx}{25+36x^2}$. **206.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$.

3. Способ интегрирования по частям

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы и обратные тригонометрические функции, бывает удобно воспользоваться способом интегрирования по частям.

Выведем формулу интегрирования по частям.

Интегрируя обе части равенства $d(uv)=u\,dv+v\,du$, получим

$$\int d(uv)=\int u\,dv+\int v\,du \quad \text{или} \quad uv=\int u\,dv+\int v\,du,$$

откуда

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du. \qquad (5)$$

С помощью формулы (5) нахождение интеграла $\int u\,dv$ сводится к нахождению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться или проще данного, или даже известным.

При практическом использовании формулы интегрирования по частям данное подынтегральное выражение представляют в виде произведения двух сомножителей, которые обозначают u и dv. Множитель u стараются выбрать так, чтобы u' было проще, чем u.

207—220. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

207. $\int x\cos x\,dx$.

Решение. Интеграл содержит произведение двух функций x и $\cos x$. Способ подстановки не дает возможности найти этот интеграл. Обозначим $x=u$, $\cos x\,dx=dv$; тогда $dx=du$; $v=\sin x$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

Приняв $x=u$, мы получили $u'=1$ и интеграл $\int v\,du$ оказался проще, чем $\int u\,dv$.

Если же в этом интеграле сделать другую замену: $\cos x=u$, $x\,dx=dv$, то легко убедиться, что полученный интеграл окажется сложнее исходного, т. е. замена окажется неудачной. Умение определить целесообразность той или иной замены приходит с приобретением навыка.

208. $\int xe^x\,dx$.

Решение. $\int xe^x\,dx=\begin{vmatrix} u=x, & dv=e^x dx; \\ du=dx, & v=e^x \end{vmatrix}=xe^x-\int e^x\,dx=xe^x-e^x+C.$

209. $\int x^5\ln x\,dx$. **210.** $\int xe^{2x}\,dx$.

Иногда формулу интегрирования по частям приходится применять дважды.

211. $\int x^2\sin x\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int x^2\sin x\,dx=\begin{vmatrix} u=x^2, & dv=\sin x\,dx \\ du=2x\,dx, & v=-\cos x \end{vmatrix}=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx.$$

Для нахождения полученного в правой части равенства интеграла снова интегрируем по частям:

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x+C$$

(см. решение примера 207). В результате получаем окончательный ответ:

$$\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

212. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. $\int \operatorname{arctg} x\,dx=\begin{vmatrix} u=\operatorname{arctg} x, & dv=dx; \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, & v=x \end{vmatrix}=x\operatorname{arctg} x-\int\dfrac{x\,dx}{1+x^2}=$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

213. $\int x\sin x\,dx$. **214.** $\int x\ln x\,dx$.

215. $\int(4x^3+6x-7)\ln x\,dx$. **216.** $\int x\sin 2x\,dx$.

217. $\int x\cos 3x\,dx$. **218.** $\int\ln x\,dx$.

219. $\int\dfrac{\ln x\,dx}{x^2}$. **220.** $\int\dfrac{\ln x\,dx}{x^3}$.

§ 6. Определенный интеграл и его геометрический смысл

1. Криволинейная трапеция и ее площадь

Пусть на отрезке $[a, b]$ дана непрерывная неотрицательная функция $y=f(x)$ (рис. 138). Проведем вертикальные прямые $x=a$, $x=b$ до пересечения с графиком функции $f(x)$.

Определение 1. *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, $x\in[a, b]$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком оси Ox.

Как вычислить площадь криволинейной трапеции? Рассмотрим криволинейную трапецию $CHKD$ (рис. 139), у которой абсцисса точки C равна x, а абсцисса точки D равна $x+\Delta x$. Пусть график функции $f(x)$ пересекает ось ординат в точке A. Тогда площадь криволинейной трапеции $CHKD$ равна разности площадей криволинейных трапеций $OAKD$ и $OAHC$. Так как площадь криволинейной трапеции $OAHC$ зависит от x, то ее можно обозначить символом $S(x)$. Аналогично, площадь криволинейной трапеции $OAKD$ есть функция от $x+\Delta x$ и ее можно обозначить символом $S(x+\Delta x)$. Поэтому площадь криволинейной трапеции $CHKD$ равна разности $S(x+\Delta x)$ и $S(x)$ и может быть обозначена символом $\Delta S(x)$.

Построим два прямоугольника $CHED$ и $CMKD$. Площадь первого из них равна $f(x)\Delta x$, а площадь второго равна $f(x+\Delta x)\Delta x$. Поскольку площадь криволинейной трапеции $CHKD$ не меньше площади прямоугольника $CHED$ и не больше площади прямоугольника $CMKD$, можно записать неравенство

$$f(x)\Delta x \leqslant \Delta S(x) \leqslant f(x+\Delta x)\Delta x.$$

Разделим обе части этого неравенства на Δx и найдем пре-

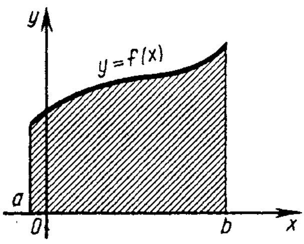


Рис. 138

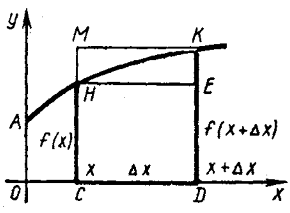


Рис. 139

делы всех выражений при $\Delta x \to 0$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ есть производная функции $S(x)$, а в силу непрерывности функции $f(x)$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Следовательно, $S' = f(x)$.

Итак, производная площади криволинейной трапеции равна функции, задающей верхнюю границу трапеции.

Поэтому площадь криволинейной трапеции есть одна из первообразных функции, задающей верхнюю границу трапеции, и может быть вычислена с помощью интегрирования:

$$S = \int f(x)\,dx.$$

Пусть $x \in [a, b]$. Площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 140, есть функция от x. Обозначим ее через $S(x)$. Очевидно, что $S(a) = 0$, так как при $x = a$ заштрихованная фигура превращается в отрезок, а $S(b) = S$ есть площадь рассматриваемой криволинейной трапеции.

Замечание. Когда говорят о непрерывности функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$, то под этим понимают непрерывность ее в каждой точке этого промежутка, в том числе в точках a и b, т. е. что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ при стремлении x к a и $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$ при стремлении x к b.

221. Используя равенство $S'(x) = f(x)$, вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

Решение. Пусть $x \in [1, 2]$ (рис. 141). Так как $S'(x) = f(x)$, то $S'(x) = x^2$. Тогда $S(x)$ есть первообразная функции $f(x) = x^2$.

Найдем множество всех первообразных: $S(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Значение C можно найти из условия $S(1) = 0$; имеем $0 = \frac{1}{3} + C$, откуда $C = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, $S(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$.

Полагая $x = 2$, получим площадь данной трапеции:

$$S(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

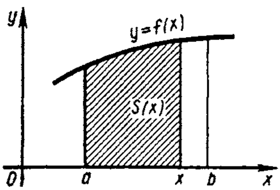


Рис. 140

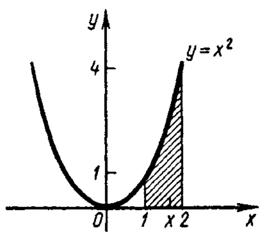


Рис. 141

2. Вычисление площади криволинейной трапеции

Используя равенство $S'(x)=f(x)$, где $f(x)\geqslant 0$ на промежутке $[a, b]$, выведем формулу для вычисления площади криволинейной трапеции (см. рис. 140). Из этого равенства видно, что $S(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Пусть $F(x)$ — другая первообразная для $f(x)$ на этом же промежутке. В силу основного свойства первообразной имеем $S(x)=F(x)+C$.

Последнее равенство верно при всех $x\in[a, b]$, так как функции $S(x)$ и $F(x)$ определены в точках a и b. Подставив вместо x число a, получим $S(a)=F(a)+C$. Но $S(a)=0$, поэтому $0=F(a)+C$, откуда $C=-F(a)$. Таким образом, $S(x)=F(x)-F(a)$.

Подставив в последнее равенство $x=b$, найдем искомую площадь:

$$S=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

222. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x)=1/x$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

Решение. Построим трапецию (рис. 142). Определим первообразную функции $f(x)=1/x$:

$$\int\frac{1}{x}dx=\ln x+C.$$

Одна из первообразных при $C=0$ есть $F(x)=\ln x$. Тогда искомую площадь найдем по формуле (1):

$$S=F(2)-F(1)=\ln 2-\ln 1=\ln 2\approx 0{,}7 \text{ (кв. ед)}.$$

223. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x-x^2$ и $y=0$ (рис. 143).

Решение. Найдем точки пересечения кривой $2x-x^2$ с осью абсцисс: $2x-x^2=0$; $x(2-x)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$. Следовательно, $a=0$, $b=2$.

Найдем первообразную функции $f(x)=2x-x^2$; имеем $F(x)=\int(2x-x^2)dx=x^2-\frac{1}{3}x^3+C$. При $C=0$ получим $F(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3$.

Искомую площадь находим по формуле (1):

$$S=F(b)-F(a)=F(2)-F(0)=4-\frac{8}{3}-0+0=\frac{4}{3} \text{ (кв. ед)}.$$

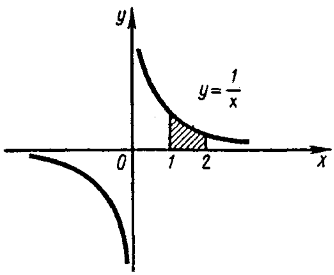


Рис. 142

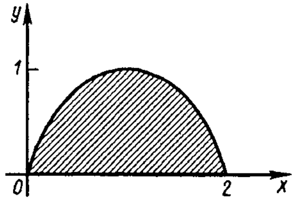


Рис. 143

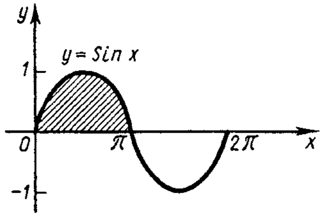


Рис. 144

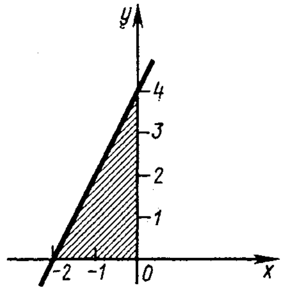


Рис. 145

224. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

225. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x)=x^2$, $x=1$, $x=3$ и $y=0$.

226. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$ и $y=0$, если x изменяется от 0 до π (рис. 144).

227. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и прямой $y=2x+4$ (рис. 145).

3. Определение определенного интеграла

Напомним, что приращением аргумента x при его изменении от $x=a$ до $x=b$ называется разность $b-a$, а приращением функции $F(x)$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется разность $F(b)-F(a)$.

228. Дана функция $f(x)=2x+4$. Найти приращение любой ее первообразной при изменении x от -2 до 0.

Решение. Найдем первообразную данной функции:

$$F=\int(2x+4)\,dx=x^2+4x+C.$$

Рассмотрим, например, первообразные $F_1=x^2+4x$, $F_2=x^2+4x+2$, $F_3=x^2+4x-1$, вычислив приращение каждой из них на отрезке $[-2, 0]$: $F_1(0)-F_1(-2)=0-(-4)=4$; $F_2(0)-F_2(-2)=2-(-2)=4$; $F_3(0)-F_3(-2)=1-(-5)=4$. Таким образом, приращения этих первообразных равны между собой.

Рассмотрим теперь приращение любой первообразной $F=x^2+4x+C$ на отрезке $[-2, 0]$. Имеем

$$(x^2+4x+C)_{x=0}-(x^2+4x+C)_{x=-2}=4.$$

Следовательно, приращение любой первообразной функции $f(x)=2x+4$ при изменении x от -2 до 0 равно 4, т. е. приращения всех первообразных этой функции равны между собой и не зависят от C.

Найдем приращение любой первообразной функции $f(x)$ при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$:

$$(F(x)+C)_{x=b}-(F(x)+C)_{x=a}=F(b)-F(a).$$

Полученный результат означает, что при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$ все первообразные для данной функции имеют одно и то же приращение, равное $F(b)-F(a)$.

Это приращение принято называть *определенным интегралом*.

Определение 2. Если $F(x)+C$ — первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b)-F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$ называется *определенным интегралом* и обозначается символом $\int_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

где a — нижний предел, а b — верхний предел определенного интеграла.

Символ $\int_a^b f(x)dx$ читается так: «определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс».

Функция $f(x)$ предполагается непрерывной в промежутке изменения аргумента x от a до b.

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ находят:

1) неопределенный интеграл $\int f(x)dx=F(x)+C$;

2) значение интеграла $F(x)+C$ при $x=b$, $C=0$, т. е. вычисляют $F(b)$;

3) значение интеграла $F(x)+C$ при $x=a$, $C=0$, т. е. вычисляют $F(a)$;

4) разность $F(b)-F(a)$.

Процесс вычисления виден из формулы

$$\int_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \qquad (2)$$

Равенство (2) называется *формулой Ньютона—Лейбница.*

Замечания. 1. Под $F(x)$ в формуле (2) понимают простейшую из первообразных функций, у которой $C=0$.

2. Так как приращение $F(b)-F(a)$ равно некоторому числу, то определенный интеграл есть число (в отличие от неопределенного интеграла, который, как известно, есть совокупность функций).

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.

229—237. Вычислить определенные интегралы:

229. $\int\limits_3^5 dz.$

Решение. $\int\limits_3^5 dz = z|_3^5 = 5-3=2.$

230. $\int\limits_0^1 x\,dx.$ **231.** $\int\limits_0^2 3x^2 dx.$

232. $\int\limits_{-1}^4 (2x+1)dx.$

Решение. $\int\limits_{-1}^1 (2x+1)dx = (x^2+x)|_{-1}^1 = (1^2+1)-((-1)^2-1)=0.$

233. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos x\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos x\,dx = \sin x|_0^{\pi/4} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

234. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx.$ **235.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

236. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}.$ **237.** $\int\limits_{-1}^2 x^3 dx.$

Если формулу Ньютона — Лейбница сравнить с формулой (1), то очевидно, что $\int\limits_a^b f(x)dx$ и есть площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, если функция $f(x)$ положительна, то определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

Тогда площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

238. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$ (рис. 146).

Решение. Так как на отрезке $[-1, 2]$ функция $y=9-x^2$ принимает положительные значения, то для вычисления искомой площади S

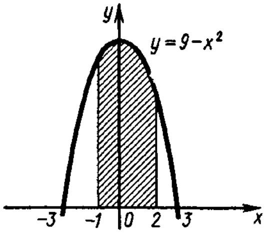


Рис. 146

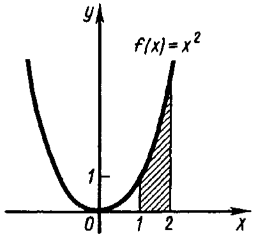


Рис. 147

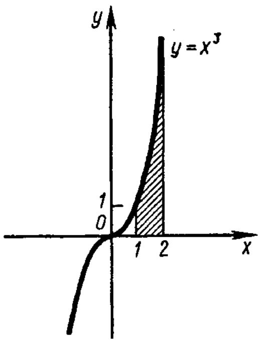


Рис. 148

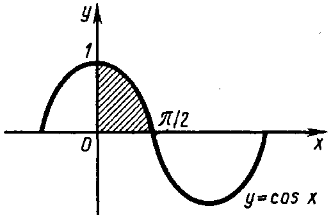


Рис. 149

воспользуемся формулой (3):

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)dx.$$

Применяя формулу Ньютона — Лейбница, находим

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-$$

$$-\left(9\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=24\frac{2}{3}\text{ (кв. ед.)}.$$

239. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x)=x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ (рис. 147).

240. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=$ $=x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ (рис. 148).

241. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезком $[0, \pi/2]$ оси Ox и графиком функции $y=\cos x$ на этом отрезке (рис. 149).

§ 7. Основные свойства и вычисление определенного интеграла

1. Простейшие свойства определенного интеграла

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла. При этом будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

1. *При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $f(x) = F'(x)$ и, значит, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a); \qquad (2)$$

$$-\int_b^a f(x)\,dx = -F(x)\Big|_b^a = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Правые части равенств (2) и (3) равны; следовательно, должны быть равны и левые части, т. е. справедливо соотношение (1).

Это свойство позволяет рассматривать интегралы, в которых верхний предел меньше нижнего.

242. Найти $\int_3^1 x^2\,dx$.

Решение. $\int_3^1 x^2\,dx = -\int_1^3 x^2\,dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \left(-\frac{27}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{3} = -8\frac{2}{3}$.

2. *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла,* т. е.

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \qquad (4)$$

где k — постоянная величина.

Доказательство. Пусть $f(x) = F'(x)$ и, следовательно, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \qquad (5)$$

$$kf(x) = kF'(x). \qquad (6)$$

Из равенства (6) получим $kf(x) = (kF(x))'$, откуда

$$\int_a^b kf(x)dx = \int_a^b kF(x))'dx = (kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)).$$

Но из равенства (5) следует $k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)\,dx$ и значит, справедливо соотношение (4).

243. Найти а) $\int_0^1 5dx$; б) $\int_2^3 6x^2\,dx$.

Р е ш е н и е. а) $\int_0^1 5dx = 5\int_0^1 dx = 5x\Big|_0^1 = 5\cdot(1-0) = 5$;

б) $\int_2^3 6x^2dx = 2\int_2^3 3x^2\,dx = 2x^3\Big|_2^3 = 2(3^3 - 2^3) = 2\cdot 19 = 38.$

3. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций*, т. е.

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx. \qquad (7)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x) = F'(x)$ и $\varphi(x) = \Phi'(x)$. Тогда

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x)\,dx = \int_a^b (F'(x) \pm \Phi'(x))\,dx = \int_a^b (F(x) \pm \Phi(x))'dx =$$
$$= (F(x) \pm \Phi(x))\Big|_a^b = (F(b) \pm \Phi(b)) - (F(a) \pm \Phi(a)) =$$
$$= (F(b) - F(a)) \pm (\Phi(b) - \Phi(a))$$

или

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Аналогично можно доказать справедливость этого свойства для любого конечного числа слагаемых.

244. Найти $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)\,dx$.

Р е ш е н и е. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)\,dx = \int_1^2 5x^4\,dx + \int_1^2 2x\,dx - \int_1^2 8dx = x^5\Big|_1^2 + x^2\Big|_1^2 - 8x\Big|_1^2 = (2^5 - 1^5) + (2^2 - 1^2) - 8(2-1) = 26.$

4. *Если a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция f (x) непрерывна, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \qquad (8)$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

2. Подстановка в определенном интеграле

Для вычисления определенного интеграла с помощью подстановки поступают так же, как и при вычислении неопределенного интеграла этим способом (см. § 5). Однако в случае определенного интеграла имеется одна особенность, на которую следует обратить внимание.

Как мы отмечали, метод подстановки заключается в том, что для приведения заданного неопределенного интеграла к табличному выражают аргумент через новую переменную, а затем находят неопределенный интеграл и полученный результат снова выражают через первоначальную переменную. В случае же определенного интеграла нет необходимости возвращаться к первоначальной переменной, однако нужно помнить, что, заменяя переменную под знаком интеграла, следует изменить и пределы интегрирования.

245. Найти $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $u=1-\cos x$, откуда $du=\sin x\,dx$. Затем найдем новые пределы интегрирования; подставляя в равенство $u=1-\cos x$ значения $x_1=\pi/2$ и $x_2=\pi$, соответственно получим $u_1=1-\cos(\pi/2)=1$ и $u_2=1-\cos\pi=2$. Запись решения выглядит так:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}=\left|\begin{matrix} u=1-\cos x, & u_1=1-\cos(\pi/2)=1, \\ du=\sin x\,dx; & u_2=1-\cos\pi=2\end{matrix}\right|=2\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{du}{u^2}=2\int\limits_1^2 u^{-2}\,du=$$

$$=-2u^{-1}\Big|_1^2=-1+2=1.$$

3. Вычисление определенных интегралов

246—306. Вычислить определенные интегралы, используя определение, их свойства и метод подстановки:

246. $\int\limits_1^3 8x^3dx$.

Решение. $\int\limits_1^3 8x^3dx=8\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=2x^4\Big|_1^3=2(3^4-1^4)=160.$

247. $\int\limits_0^2 3x^4\,dx.$ **248.** $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}} 4t^3\,dt.$ **249.** $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx=\int\limits_0^1 x^{1/3}dx=\frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^1=\frac{3}{4}(1^{4/3}-0^{4/3})=\frac{3}{4}.$

250. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx.$ **251.** $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx.$

252. $\int\limits_{-1}^1 (2x+3x^2+4x^3+5x^4)\,dx.$

Решение. $\int\limits_{-1}^1 (2x+3x^2+4x^3+5x^4)\,dx=(x^2+x^3+x^4+x^5)\Big|_{-1}^1=$
$=(1^2+1^3+1^4+1^5)-((-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5)=4.$

253. $\int\limits_{-1}^2 (2x+3x^2+4x^3)\,dx.$ **254.** $\int\limits_1^5 ((x-3)^2-4)\,dx.$

255. $\int\limits_0^9 (3\sqrt{x}-x)\,dx.$ **256.** $\int\limits_1^4 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

257. $\int\limits_0^1 e^{2x}\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^1 e^{2x}dx=\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{1}{2}(e^2-1)=0{,}5(7{,}36-1)\approx 3{,}18.$

258. $\int\limits_{-1}^1 e^x\,dx.$ **259.** $\int\limits_0^2 3e^{3x}\,dx.$ **260.** $\int\limits_0^1 \frac{du}{u+1}.$

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{du}{u+1}=\ln(u+1)\Big|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2\approx 0{,}69.$

261. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}.$ **262.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+2}.$ **263.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1.$

264. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin x\,dx.$ **265.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx.$ **266.** $\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4}=\frac{1}{2}\left(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4}-\sin 2\cdot 0\right)=$
$=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}.$

267. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx.$ **268.** $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx.$

269. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 8x\,dx.$ **270.** $\int\limits_0^{3\pi/2} 3\cos\frac{t}{3}dt.$

271. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}.$

Решение. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) =$
$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}.$

272. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{4dx}{\cos^2 x}.$ **273.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx.$

274. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Решение. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}.$

275. $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **276.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ **277.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}.$

Решение. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \pi/3 - 0 =$
$= \pi/3.$

278. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}.$ **279.** $\int\limits_0^2 \frac{2x}{1+x^4}dx.$ **280.** $\int\limits_1^2 (2u+1)^3 du.$

Решение. $\int\limits_1^2 (2u+1)^3 du = \left|\begin{array}{l} x = 2u+1,\ x_1 = 2\cdot 1+1 = 3, \\ dx = 2du,\ x_2 = 2\cdot 2+1 = 5 \\ du = \frac{1}{2}dx; \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int\limits_3^5 x^3 dx =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{1}{8}x^4\Big|_3^5 = \frac{1}{8}(5^4 - 3^4) = \frac{1}{8}(625-81) = 68.$

281. $\int\limits_2^3 (2x-1)^3 dx.$ **282.** $\int\limits_1^2 \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}.$

283. $\int\limits_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}\,dx.$ **284.** $\int\limits_0^2 5\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx.$

285. $\int\limits_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx.$

Решение. $\int\limits_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx = \left|\begin{array}{l} t = 4x^3+1,\ t_1 = 4\cdot 0^3+1 = 1, \\ dt = 12x^2dx,\ t_2 = 4\cdot 1^3+1 = 5 \\ x^2dx = \frac{1}{12}dt; \end{array}\right| =$

$$=\frac{1}{12}\int_1^5 t^5dt=\frac{1}{12}\cdot\frac{t^6}{6}\Big|_1^5=\frac{1}{72}(5^6-1^6)=217.$$

286. $\int\limits_0^1(2x^3+1)^4x^2dx.$ **287.** $\int\limits_0^3 6x^3(3x^4-1)^2dx.$

288. $\int\limits_0^1\frac{x^3\,dx}{5x^4+1}.$

Решение. $\int\limits_0^1\frac{x^3\,dx}{5x^4+1}=\left|\begin{array}{l} t=5x^4+1,\ t_1=5\cdot 0^4+1=1,\\ dt=20x^3dx,\ t_2=5\cdot 1^4+1=6\\ x^3dx=\frac{1}{20}dt;\end{array}\right|=\frac{1}{20}\int\limits_1^6\frac{dt}{t}=$

$=\frac{1}{20}\ln t\Big|_1^6=\frac{1}{20}(\ln 6-\ln 1)=\frac{1}{20}\ln 6.$

Теперь вычислим этот интеграл иначе, а именно, найдем первообразную функцию и возвратимся к старой переменной, не меняя пределов интегрирования:

$$\int\limits_0^1\frac{x^3dx}{5x^4+1}=\left|\begin{array}{l} t=5x^4+1,\\ dt=20x^3dx,\\ x^3dx=\frac{1}{20}dt\end{array}\right|=\frac{1}{20}\ln t=\frac{1}{20}\ln(5x^4+1)\Big|_0^1=\frac{1}{20}(\ln 6-\ln 1)=$$

$$=\frac{1}{20}\ln 6.$$

289. $\int\limits_0^{1/2}\frac{(x+1)dx}{1+4x^2}.$ **290.** $\int\limits_{2\sqrt{2}}^4 3x\sqrt{x^2-7}\,dx.$

291. $\int\limits_0^1\sqrt{1+x}\,dx.$ **292.** $\int\limits_0^4 6x^2\sqrt{x^3-1}\,dx.$

293. $\int\limits_0^1(e^x-1)^4e^x\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^1(e^x-1)^4e^x\,dx=\left|\begin{array}{l} e^x-1=t,\ t_1=0,\\ e^xdx=dt;\ t_2=e-1\end{array}\right|=\int\limits_0^{e-1}t^4dt=\frac{1}{5}t^5\Big|_0^{e-1}=$

$=\frac{1}{5}(e-1)^5.$

294. $\int\limits_1^e\frac{3\ln^2x\,dx}{x}.$

Решение. $\int\limits_1^e\frac{3\ln^2x\,dx}{x}=\left|\begin{array}{l} \ln x=t,\ t_1=\ln 1=0,\\ \frac{dx}{x}=dt;\ t_2=\ln e=1\end{array}\right|=3\int\limits_0^1 t^2dt=t^3\Big|_0^1=1.$

295. $\int\limits_0^1\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$ **296.** $\int\limits_{-1}^2\frac{6x^2\,dx}{(x^3-5)^2}.$

297. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ **298.** $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

299. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 z \cos z\, dz$.

Решение. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 z \cos z\, dz = \left| \begin{matrix} \sin z = u, \ u_1 = \sqrt{2}/2, \\ \cos z\, dz = du; \ u_2 = 1 \end{matrix} \right| = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} u^3 du =$

$= \frac{u^4}{4}\Big|_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

300. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1-2\cos\varphi}$. **301.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi$.

302. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{2-\sin x}$. **303.** $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin x\, dx}{3-\cos x}$.

304. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = t, \ t_1 = 0, \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt; \ t_2 = \pi/6 \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\pi/6} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi/6} =$

$= \frac{\pi^2}{72}$.

305. $\int\limits_0^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. **306.** $\int\limits_0^{\pi/6} e^{\sin x}\cos x\, dx$.

§ 8. Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла

1. Правило вычисления площадей плоских фигур

Как известно, определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции (геометрический смысл определенного интеграла):

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

С помощью определенного интеграла можно также вычислять площади плоских фигур, так как эта задача всегда сводится к вычислению площадей криволинейных трапеций.

Площадь всякой плоской фигуры в прямоугольной системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилегающих к оси Ox или к оси Oy.

Задачи на вычисление площадей плоских фигур удобно решать по следующему плану:

1^0. По условию задачи делают схематический чертеж.

2^0. Представляют искомую площадь как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.

3^0. Записывают каждую функцию в виде $y=f(x)$.

4^0. Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.

2. Площади фигур, расположенных над осью Ox

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, т. е. $f(x)\geqslant 0$ для любого $x\in[a, b]$. Тогда график функции $y=f(x)$ расположен над осью Ox.

Если фигура, расположенная над осью Ox, является криволинейной трапецией (см. рис. 140), то ее площадь вычисляется по известной формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad S=\int_a^b y\,dx, \qquad (1)$$

где y находится из уравнения кривой.

307—341. Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

307. $y^2=9x$, $x=16$, $x=25$ и $y=0$ (рис. 150).

Решение. Для любого $x\in[16, 25]$ функция $y=\sqrt{9x}$ принимает положительные значения; поэтому для вычисления площади данной криволинейной трапеции следует воспользоваться формулой (1):

$$S=\int_{16}^{25}\sqrt{9x}\,dx=\int_{16}^{25}3x^{1/2}dx=3\frac{x^{3/2}}{3/2}\Bigg|_{16}^{25}=2x\sqrt{x}\,\Big|_{16}^{25}=2(125-64)=2\cdot 61=$$
$$=122 \text{ (кв. ед.)}.$$

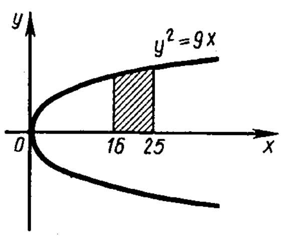


Рис. 150

308. $f(x)=x^2-2x+2$, $x=-1$, $x=2$ и отрезком $[-1, 2]$ оси Ox (рис. 151).

309. $y=-x^2+4$ и $y=0$ (рис. 152).

310. $y=1/x$, $y=0$, $x=1$ и $x=3$ (рис. 153).

311. $y=2\sin x$, $y=0$, $x=0$ и $x=\pi/2$ (рис. 154).

Если рассматриваемая фигура не

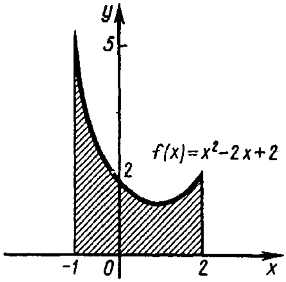


Рис. 151

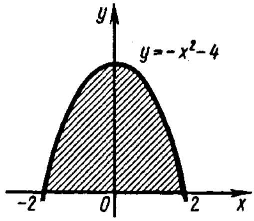


Рис. 152

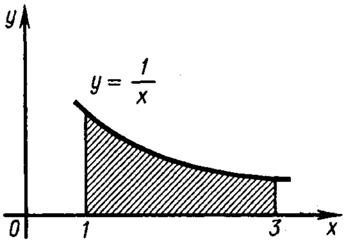


Рис. 153

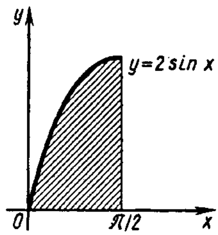


Рис. 154

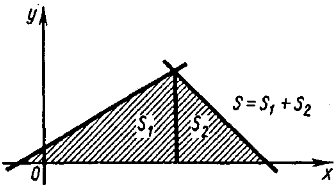


Рис. 155

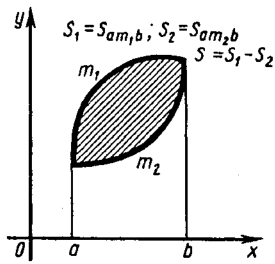


Рис. 156

является криволинейной трапецией, то искомую площадь следует представить как сумму (рис. 155) или разность (рис. 156) площадей криволинейных трапеций S_1 и S_2 и находить по общему правилу, рассмотренному в п. 1.

312. $xy=6$ и $x+y-7=0$.

Решение. Изобразим фигуру, площадь которой нужно определить (рис. 157). Найдем абсциссы точек пересечения равносторонней гиперболы и прямой, для чего решим систему уравнений $\begin{cases} xy=6, \\ x+y-7=0. \end{cases}$

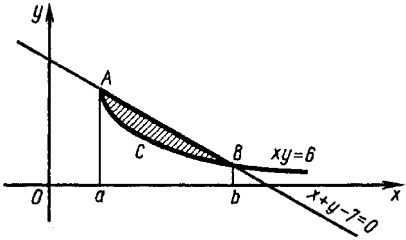


Рис. 157

Имеем $x(7-x)=6$; $7x-x^2=6$; $x^2-7x+6=0$, откуда $x_1=6$, $x_2=1$. Таким образом, $a=1$, $b=6$.

Итак, для вычисления искомой площади нужно из площади трапеции $aABb$ вычесть площадь криволинейной трапеции $aACBb$. Находим

$$S_{aABb}=\int_1^6(7-x)dx=\left(7x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^6=\left(7\cdot6-\frac{36}{2}\right)-\left(7\cdot1-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=17{,}5\text{ (кв. ед.)};\quad S_{aACBb}=\int_1^6\frac{6dx}{x}=6\ln x\Big|_1^6=6\ln6\text{ (кв. ед.)},$$

т. е. $S=(17{,}5-6\ln6)$ кв.ед.

313. $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$ и $y=0$.

Решение. 1^0. Выполним построение фигуры (рис. 158).

Построим прямую $x-2y+4=0$: $y=0$, $x=-4$, $A(-4;0)$; $x=0$, $y=2$, $B(0;2)$. Построим прямую $x+y-5=0$: $y=0$, $x=5$, $C(5;0)$; $x=0$, $y=5$, $D(0;5)$.

2^0. Найдем точку пересечения прямых, для чего решим систему

$$\begin{cases}x-2y+4=0,\\ x+y-5=0.\end{cases}$$

Отсюда $x=2$, $y=3$, т. е. $M(2;3)$.

Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC, так как при изменении x от A до N площадь ограничена прямой $x-2y+4=0$, а при изменении x от N до C — прямой $x+y-5=0$.

3^0. Для треугольника AMN имеем $x-2y+4=0$; $y=\frac{1}{2}x+2$; $f(x)=$ $=\frac{1}{2}x+2$; $a=-4$; $b=2$. Для треугольника NMC получим $x+y-5=0$; $y=-x+5$; $f(x)=-x+5$; $a=2$; $b=5$.

4^0. Вычислим площадь каждого из этих треугольников:

$$S_{AMN}=\int_{-4}^2\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)\Big|_{-4}^2=9\text{ (кв. ед.)};$$

$$S_{NMC}=\int_2^5(-x+5)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big|_2^5=4{,}5\text{ (кв. ед.)}.$$

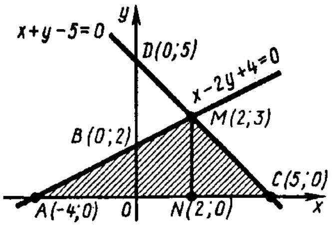


Рис. 158

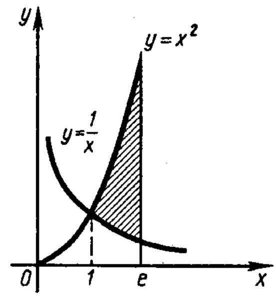


Рис. 159

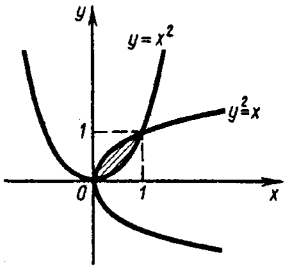


Рис. 160

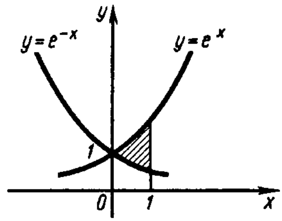


Рис. 161

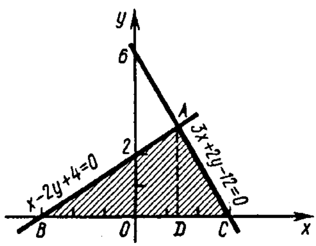


Рис. 162

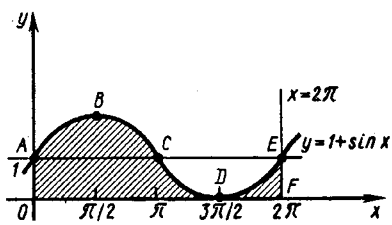


Рис. 163

Следовательно,

$$S = S_{AMN} + S_{NMC} = 9 + 4{,}5 = 13{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Проверка: $S\Delta_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot NM = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 13{,}5$ (кв. ед.).

314. $y = x^2$, $y = 1/x$, если $1 \leqslant x \leqslant e$. (рис. 159).

315. $y^2 = x$ и $y = x^2$ (рис. 160).

316. $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и $x = 1$ (рис. 161).

317. $x - 2y + 4 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$ и $y = 0$ (рис. 162).

318. $y = 1 + \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 2\pi$ (рис. 163).

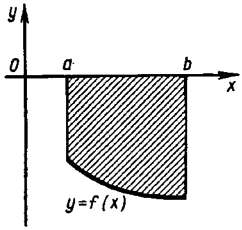


Рис. 164

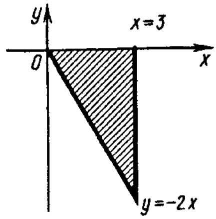


Рис. 165

3. Площади фигур, расположенных полностью или частично под осью *Ox*

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неположительная непрерывная функция $y=f(x)$, т. е. $f(x)\leqslant 0$ для любого $x\in[a, b]$. Тогда график функции $y=f(x)$ расположен под осью Ox.

Если фигура, расположенная под осью Ox, является криволинейной трапецией (рис. 164), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \quad \text{или} \quad S=\left|\int_a^b y\,dx\right|, \tag{2}$$

где y находится из уравнения кривой.

319. $y=-2x$, $y=0$ и $x=3$ (рис. 165).

Решение. На отрезке $[0, 3]$ функция $f(x)=-2x$ отрицательна; поэтому для вычисления площади искомой фигуры воспользуемся формулой (2):

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^3(-2x)\,dx\right|=\left|-x^2\Big|_0^3\right|=9 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на этом отрезке как положительные, так и отрицательные значения. Тогда нужно разбить отрезок $[a, b]$ на такие части, в каждой из которых функция не изменяет знак, затем по приведенным выше формулам вычислить соответствующие этим частям площади и найденные площади сложить. Например, площадь фигуры, изображенной на рис. 166, такова:

$$S=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\int_c^b f(x)\,dx.$$

320. $y=4x-x^2$, $y=0$ и $x=5$.

Решение. Парабола $y=4x-x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x=0$ и $x=4$. Фигура, площадь которой требуется найти, отмечена цветом на рис. 167. Пусть S_1 и S_2 — площади частей этой фигуры, соответствующих отрезкам $[0, 4]$ и $[4, 5]$, а S — искомая площадь; тогда $S=S_1+S_2$. Используя формулу (1), получим

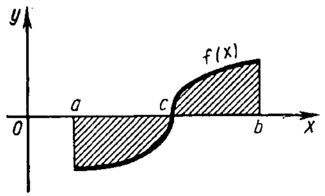


Рис. 166

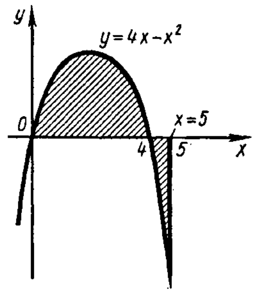


Рис. 167

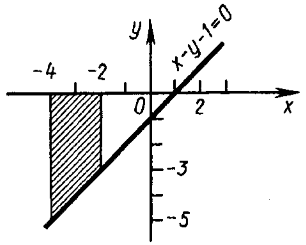


Рис. 168

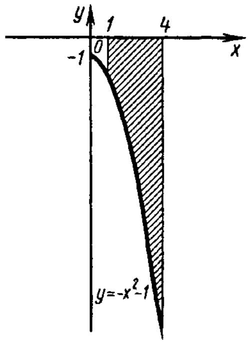


Рис. 169

$$S_1=\int_0^4(4x-x^2)dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}\text{ (кв. ед.)},$$

а по формуле (2) находим

$$S_2=\left|\int_4^5(4x-x^2)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\right|_4^5=\left(\frac{125}{3}-50\right)-\left(\frac{64}{3}-32\right)=$$

$$=\frac{7}{3}\text{ (кв. ед.)}.$$

Следовательно, $S=S_1+S_2=32/3+7/3=13$ (кв. ед.)

321. $x-y-1=0$, $x=-4$, $x=-2$ и $y=0$ (рис. 168).

322. $y=-x^2-1$, $x=1$, $x=4$ и $x=0$ (рис. 169).

323. $y=x^2-6x$ и $x=0$.

Решение. Точки пересечения параболы $y=x^2-6x$ с осью Ox имеют абсциссы $x=0$ и $x=6$, так как $x^2-6x=x(x-6)$, где $x_1=0$, $x_2=6$. На отрезке $[0, 6]$ график функции $y=x^2-6x$ расположен ниже оси Ox (рис. 170). Следовательно,

$$S=\left|\int_0^6(x^2-6x)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-3x^2\right)\right|_0^6=36\text{ (кв. ед.)}:$$

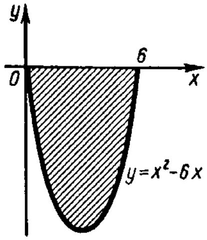


Рис. 170

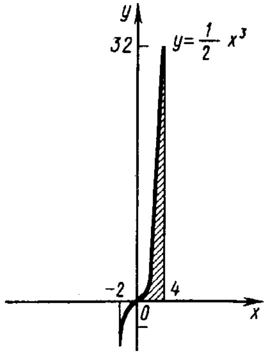


Рис. 171

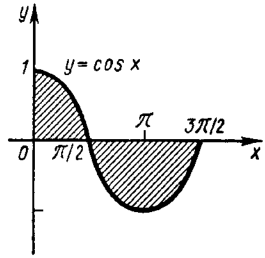


Рис. 172

324. $y=\frac{1}{2}x^3$, $x=-2$, $x=4$ и $y=0$.

Решение. График функции $y=\frac{1}{2}x^3$ на отрезке $[-2, 0]$ лежит ниже оси Ox, а на отрезке $[0, 4]$ — выше оси Ox (рис. 171). Поэтому

$$S=\left|\int\limits_{-2}^{0}\frac{1}{2}x^3dx\right|+\int\limits_{0}^{4}\frac{1}{2}x^3dx=\left|\frac{1}{8}x^4\Big|_{-2}^{0}\right|+\frac{1}{8}x^4\Big|_{0}^{4}=2+32=34 \text{ (кв. ед.)}.$$

325. $y=\cos x$, $x=3\pi/2$ и осями координат (рис. 172).

326. $y=-x^2+5$ и $y=x+3$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y=-x^2+5$ и прямой $y=x+3$. Для этого решим систему $\begin{cases} y=-x^2+5, \\ y=x+3, \end{cases}$ откуда $x_1=-2$, $x_2=1$.

Найдем площадь S_1 фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+5$, прямыми $x=-2$, $x=1$ и $y=0$ (рис. 173). Получим

$$S_1=\int\limits_{-2}^{1}(-x^2+5)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+5x\right)\Big|_{-2}^{1}=12 \text{ (кв. ед.)}.$$

Найдем площадь S_2 фигуры, ограниченной прямыми $y=x+3$, $x=-2$, $x=1$ и $y=0$:

$$S_2=\int\limits_{-2}^{1}(x+3)dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-2}^{1}=7{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Площадь искомой фигуры есть $S=S_1-S_2=12-7{,}5=4{,}5$ (кв. ед.).

327. $y=x^2$ и $y=2x$.

328. $y=\sin x$ и $y=0$, если $\pi\leqslant x\leqslant 3\pi/2$ (рис. 174).

329. $y=8+2x-x^2$ и $y=x+6$ (рис. 175).

330. $y=x^2$ и $y=2x^2-1$ (рис. 176).

Если $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меняет знак конечное число раз, то этот отрезок следует разбить на части (рис. 177), на каждой из которых функция знакопостоянна. Интеграл по всему отрезку

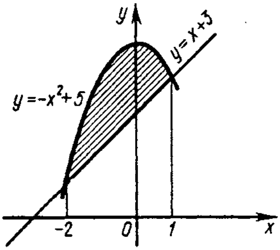


Рис. 173

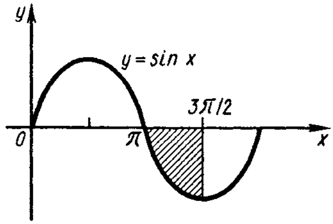


Рис. 174

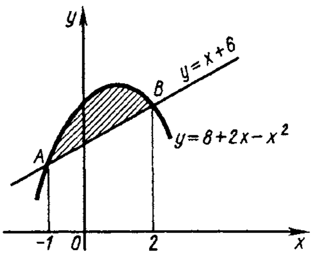


Рис. 175

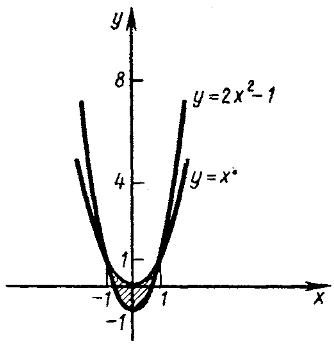


Рис. 176

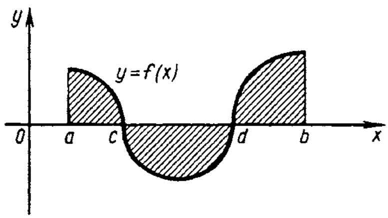


Рис. 177

$[a, b]$ разбивают на сумму интегралов по полученным частичным отрезкам.

Для вычисления суммы площадей нужно найти сумму абсолютных величин интегралов по указанным выше отрезкам, т. е.

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

где $S = \int_a^b f(x)dx$, $S_1 = \int_a^c f(x)dx$, $S_2 = \left|\int_c^d f(x)dx\right|$, $S_3 = \int_d^b f(x)dx$.

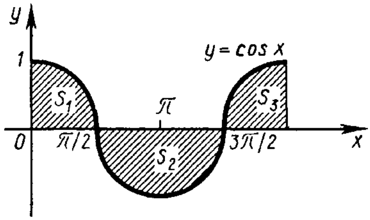


Рис. 178

331. Вычислить площадь фигуры, ограниченной волной косинусоиды и осью Ox, т. е. $f(x)=\cos x$, $x=0$, $x=2\pi$ и $y=0$ (рис. 178).

Решение. Искомая площадь состоит из площадей трех фигур. Находим:

$$S_1=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=1 \text{ (кв. ед)};$$

$$S_2=\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx\right|=\left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right|=\left|\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right|=2 \text{ (кв. ед.)},$$

где при вычислении S_2 использован знак модуля, так как $\cos x<0$ для любого $x\in[\pi/2, 3\pi/2]$;

$$S_3=\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}=\left(\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}\right)=1 \text{ (кв. ед.)}.$$

Итак, $S=S_1+S_2+S_3=1+2+1=4$ (кв. ед.)

4. Площади фигур, прилегающих к оси Oy

Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x=f(y)$, прямыми $y=a$, $y=b$ и осью Oy (рис. 179), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(y)\,dy. \tag{3}$$

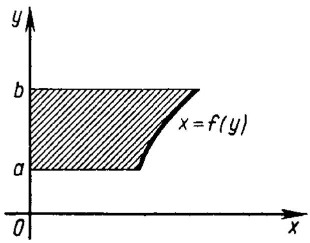


Рис. 179

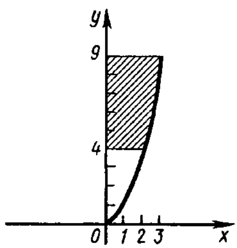


Рис. 180

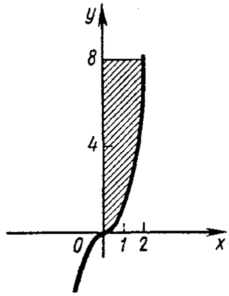


Рис. 181

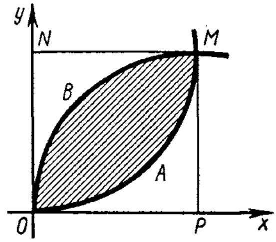


Рис. 182

332. $y=x^2$, $y=4$, $y=9$ и $x=0$ (рис. 180).

Решение. Данная фигура есть криволинейная трапеция, прилегающая к оси Oy. Пределами интегрирования по y являются значения $a=4$, $b=9$. Запишем данную функцию в виде $x=f(y)$, т. е. $x=\sqrt{y}$. Теперь искомую площадь найдем по формуле (3):

$$S=\int_4^9 \sqrt{y}\,dy=\frac{2}{3}y\sqrt{y}\,\Big|_4^9=12\frac{2}{3}\ (\text{кв. ед.}).$$

333. Найти площадь, ограниченную осью ординат, кубической параболой $y=x^3$ и прямой $y=8$ (рис. 181).

334. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4x$ и $x^2=4y$.

Решение. На рис. 182 изображена фигура, площадь которой мы должны вычислить. Как видно из рисунка, площадь фигуры $OBMAO$ можно представить как разность площадей фигур $OBMPO$ и $OAMPO$, где MP — перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Ox.

Найдем координаты точки M. Решив систему уравнений $\begin{cases} y^2=4x \\ y=x^2/4, \end{cases}$ получим $x=4$, $y=4$, т. е. $M(4;\,4)$.

Следовательно,

$$S=\int_0^4 \sqrt{4x}\,dx-\int_0^4 \frac{x^2}{4}\,dx=\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^4-\frac{x^3}{12}\Big|_0^4=\frac{16}{3}\ (\text{кв. ед.}).$$

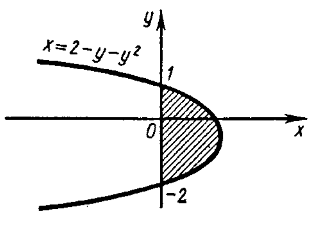


Рис. 183

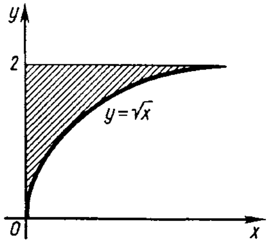


Рис. 184

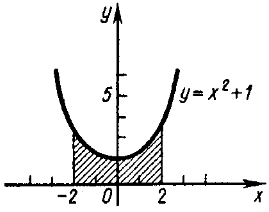


Рис. 185

Данную задачу можно решить и другим способом. Представим искомую площадь в виде разности площадей фигур $OAMNO$ и $OBMNO$ (MN — перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Oy), т. е. $S = S_{OAMNO} - S_{OBMNO}$. Тогда

$$S = \int_0^4 \sqrt{4y}\,dy - \int_0^4 \frac{y^2}{4}\,dy = \frac{4}{3} y^{3/2} \Big|_0^4 - \frac{y^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

335. $x = 2 - y - y^2$ и $x = 0$ (рис. 183).

336. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ и $x = 0$ (рис. 184).

5. Симметрично расположенные плоские фигуры

Если кривая расположена симметрично относительно оси координат или начала координат, то можно упростить вычисления, определив половину площади и затем удвоив результат.

337. $y = x^2 + 1$, $x = -2$, $x = 2$ и $y = 0$ (рис. 185).

Решение. $S = \int_{-2}^{2} (x^2+1)\,dx = 2\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2 = 9\frac{1}{3}$ (кв. ед.).

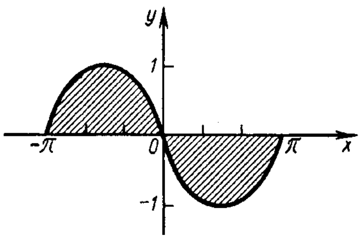


Рис. 186

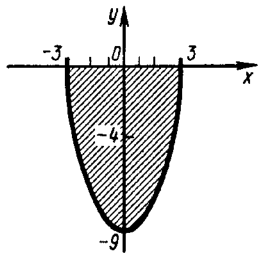


Рис. 187

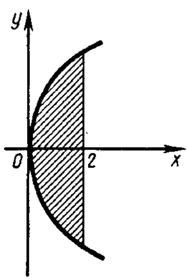


Рис. 188

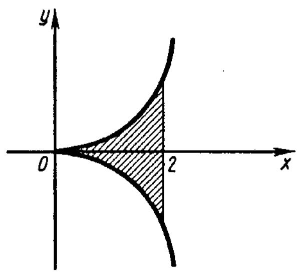


Рис. 189

338. $y=\sin x$ от $x=-\pi$ до $x=\pi$ и осью Ox (рис. 186).
339. $y=x^2-9$ и $y=0$ (рис. 187).
340. $y^2=4x$ и $x=2$ (рис. 188).
341. $y^2=x^3$ и $x=2$ (рис. 189).

§ 9. Приближенное вычисление определенного интеграла

«Неберущиеся» интегралы
Определенный интеграл как предел суммы
Метод прямоугольников
Метод трапеций
Метод парабол

1. «Неберущиеся» интегралы

При нахождении первообразных различных функций возникает следующий вопрос: всякая ли функция $f(x)$ имеет первообразную, т. е. всегда ли выполнима операция интегрирования?

Из курса дифференциального исчисления известно, что любая элементарная функция имеет производную, которая, в свою очередь, является элементарной функцией. Иначе говоря, прямое действие — дифференцирование — не выводит за пределы класса элементарных функций.

Иначе обстоит дело с интегрированием. Операция интегрирования, как обратное действие, не всегда осуществима, если ограничиться классом элементарных функций. Не для всякой элементарной функции существует элементарная первообразная.

Существуют очень простые на вид элементарные функции, первообразные которых существуют, но не выражаются никакой конечной комбинацией элементарных функций. Таковы, например, функции $\int\frac{\sin x}{x}dx$, $\int e^{-x^2}dx$, $\int\sqrt{1+x^3}\,dx$, $\int\frac{dx}{\ln x}$, $\int\sin x^2\,dx$, $\int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$. Про такие интегралы принято говорить, что они «неберущиеся».

Так, теоретически должен существовать интеграл

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=F(x)+C, \qquad (1)$$

т. е. функция $F(x)$ должна существовать и притом быть непрерывной на всей числовой оси, за исключением точки $x=0$. Однако эту функцию нельзя выразить как конечную комбинацию элементарных функций.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx. \qquad (2)$$

Не умея найти неопределенный интеграл (1), мы не сможем применить формулу Ньютона—Лейбница для вычисления интеграла (2). Тем не менее этот интеграл можно вычислить приближенно.

Таким образом, «приближенно» вычисляют те определенные интегралы, которые не поддаются обычному методу вычислений.

Слово «приближенно» взято в кавычки, чтобы подчеркнуть некоторую его условность. В самом деле, мы можем, например, «совершенно точно» вычислить следующий интеграл:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2, \qquad (3)$$

однако для практических целей придется дополнительно отыскивать $\ln 2$ с помощью таблицы натуральных логарифмов, а это неизбежно приведет к некоторой погрешности окончательного результата. Более того, в реальных задачах пределы интегрирования (и даже сама подынтегральная функция) часто бывают известны лишь с определенной точностью, т. е. приближенно.

Уже эти простейшие соображения показывают, что «абсолютная точность» вряд ли достижима и что цель состоит здесь не в том, чтобы ограничиваться «точными» методами вычислений, а в том, чтобы проводя приближенные вычисления, уметь оценивать надежность полученного результата.

Приближенные вычисления применяются не только тогда, когда «точные» методы либо невозможны, либо слишком сложны. Оказывается, что при использовании вычислительных машин «приближенные» методы вычислений просто необходимы даже в простейших случаях. Например, равенство (3), прочитанное справа налево, позволяет заменить $\ln 2$ через определенный интеграл (значение которого может быть вычислено приближенным методом).

С развитием электронно-вычислительных машин в настоящее время широко используют приближенные методы, в том числе и при вычислении интегралов.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ задана аналитически и ее первообразная на этом отрезке может быть выражена в виде конечной комбинации элементарных функций, то для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ используют формулу Ньютона—Лейбница. Если же функция задана аналитически, но ее первообразная не выражается в элементарных функциях, то значение определенного интеграла находят приближенными методами. Принцип построения приближенных методов интегрирования основан на замене определенного интеграла соответствующей интегральной суммой.

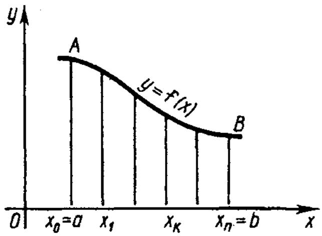


Рис. 190

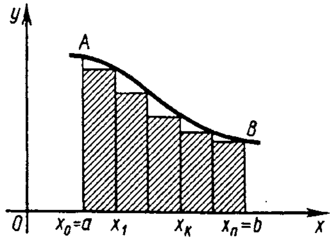


Рис. 191

2. Определенный интеграл как предел суммы

Рассмотрим криволинейную трапецию, заданную непрерывной неотрицательной функцией $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n равных частей точками $x_0=a$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$ и проведем через эти точки прямые, параллельные оси ординат (рис. 190). Тогда данная криволинейная трапеция разобьется на n полос, также представляющих собой криволинейные трапеции. Заменим каждую из этих полос прямоугольником, основание которого то же, что у соответствующей полосы, и равно Δx, а высота совпадает с одной из ее ординат — левой $f(x_{k-1})$ (рис. 191) или правой $f(x_k)$ (рис. 192), где k — порядковый номер полосы ($k=1, 2, \ldots, n$)

Будем увеличивать число точек разбиения отрезка $[a, b]$ так, чтобы $\Delta x \to 0$. При этом длины ординат $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ будут отличаться друг от друга тем меньше, чем больше n. Таким образом, площадь k-го прямоугольника равна $f(x_k)\Delta x$ (для определенности в качестве высоты прямоугольника мы выбрали правую ординату).

Рассмотрим сумму площадей всех таких прямоугольников:

$$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ldots+f(x_k)\Delta x+\ldots+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x. \qquad (4)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Используя непрерывность функции $f(x)$, можно показать, что при достаточно большом n сумма площадей всех прямоугольников приближается к площади рассматриваемой криволинейной трапеции и тем ближе, чем больше n. Поэтому интегральная сумма (4) при $n \to \infty$ ($\Delta x \to 0$) имеет предел, который совпадает с площадью данной криволинейной трапеции:

$$S=\lim_{\Delta x \to 0}(f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+\ldots$$
$$\ldots+f(x_k)\Delta x+\ldots+f(x_n)\Delta x)$$

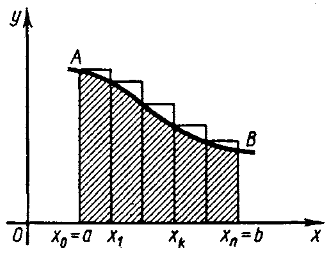


Рис. 192

или, короче,

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x. \qquad (5)$$

Так как $\Delta x\to 0$ при $n\to\infty$, то равенство (5) можно записать в виде

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

Мы знаем, что площадь S криволинейной трапеции есть определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x. \qquad (6)$$

342. Найти значение интегральной суммы для функции $y=x^2+1$ при делении отрезка $[1, 3]$ на четыре части.

Решение. Здесь $x_0=1$, $x_1=1{,}5$, $x_2=2$, $x_3=2{,}5$, $\Delta x=0{,}5$. Построим криволинейную трапецию и соответствующую ступенчатую фигуру (рис. 193).

Определяем значения функции в точках разбиения: $f(x_0)=f(1)=2$; $f(x_1)=f(1{,}5)=3{,}25$; $f(x_2)=f(2)=5$; $f(x_3)=f(2{,}5)=7{,}25$.

Найдем сумму произведений значений функции на величину $\Delta x=0{,}5$:

$$S=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x=2\cdot 0{,}5+3{,}25\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}5+$$
$$+7{,}25\cdot 0{,}5=8{,}75.$$

343. Найти значение интегральной суммы для функции $y=x^2+1$ при делении отрезка $[1, 3]$ на две части.

344. Найти значение $\int_1^3 (x^2+1)\,dx$ и сравнить с результатами задач 342, 343.

345. Найти значение интеграла $\int_0^1 x\,dx$, рассматривая его как предел интегральных сумм.

Решение. Разобьем отрезок $[0, 1]$ (рис. 194) на n равных частей; при этом длина каждой части равна $1/n$. Проведем через точки деле-

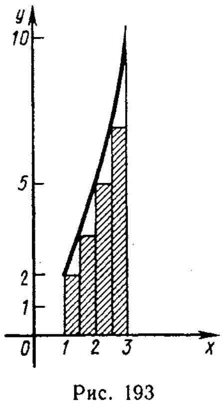


Рис. 193

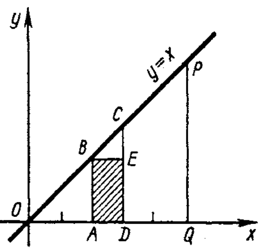


Рис. 194

ния прямые, параллельные оси ординат. Тогда каждая из полос, например $ABCD$, будет представлять собой трапецию. Для каждой трапеции построим прямоугольник $ABED$. Если A есть k-я точка деления отрезка OQ, то длина отрезка OA равна длине отрезка AB и равна k/n. Поэтому площадь прямоугольника $ABED$ равна k/n^2.

Тогда согласно изложенному выше способу вычисления площади фигуры OPQ имеем

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{OPQ} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\dots+\frac{n}{n^2}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}(1+2+3+\dots n)\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2n}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{n}{2n}\right) = \frac{1}{2}.$$

346. Вычислить $\int_0^1 x\,dx$ и сравнить с результатом задачи 345.

3. Метод прямоугольников

Решение многих задач сводится к вычислению определенных интегралов, точное выражение которых сложно, требует длительных вычислений и не всегда оправдано практически. В этом случае часто бывает вполне достаточно найти их приближенное значение.

Пусть, например, необходимо вычислить площадь, ограниченную линией, уравнение которой неизвестно. В этом случае можно заменить данную линию более простой, уравнение которой известно. Площадь полученной таким образом криволинейной трапеции принимается за приближенное значение искомого интеграла.

Простейшим приближенным методом является метод прямоугольников. Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $y=f(x)$. Как и при рассмотрении интегральной суммы, разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0=a$, $x_1, \dots, x_n=b$ и проведем через эти точки прямые, параллельные оси ординат.

Заменим дугу AB кривой $y=f(x)$ ломаной ступенчатой линией (см. рис. 191). Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей заштрихованных прямоугольников и соответственно интеграл заменится суммой

$$S_1 = f(x_0)\Delta x + f(x_1)\Delta x + \dots + f(x_{n-1})\Delta x = \Delta x(f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})). \tag{7}$$

Учитывая, что отрезок $[a, b]$ разделен на n равных частей, получим $\Delta x=(b-a)/n$. Тогда сумму (7) можно записать в виде

$$S_1 = \frac{b-a}{n}\,(f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})). \tag{8}$$

При $n\to\infty$ сумма (8) приближенно равна данному интегралу и является интегральной суммой: ее предел при $n\to\infty$ $(\Delta x\to 0)$ и есть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Какова же погрешность, возникающая при замене интеграла его интегральной суммой? Не останавливаясь на отыскании этой погрешности, заметим, что если функция $y=f(x)$ монотонна, то точное значение интеграла заключено между суммой (8) и суммой

$$S_2 = \frac{b-a}{n}\,(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)), \tag{9}$$

которая получается, если в криволинейной трапеции дугу AB кривой $y=f(x)$ заменить ломаной ступенчатой фигурой, изображенной на рис. 192. Следовательно,

$$S_1 < \int\limits_a^b f(x)dx < S_2.$$

Итак, чтобы найти приближенное значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, нужно:

1) разделить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0=a$, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, $x_n=b$;

2) вычислить значения подынтегральной функции $y=f(x)$ в точках деления, т. е. найти $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, ..., $y_{n-1}=f(x_{n-1})$, $y_n=f(x_n)$;

3) воспользоваться одной из следующих приближенных формул:

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\,(f(x_0)+f(x_1)+\dots+f(x_{n-1})), \tag{10}$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\,(f(x_1)+f(x_2)+\dots+f(x_n)). \tag{11}$$

Соотношения (10) и (11) называются *формулами прямоугольников.*

Замечания. 1. Имеет смысл считать, что искомый интеграл приближенно равен не суммам (8) или (9), а сумме

$$S = \frac{b-a}{n}\,(y_{1/2}+y_{3/2}+\dots y_{(2n-1)/2}),$$

где $y_{1/2}=f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$, $y_{3/2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, ..., $y_{(2n-1)/2}=f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)$.

2. Отрезок $[a, b]$ можно делить и на неравные части, но это усложняет вычисления.

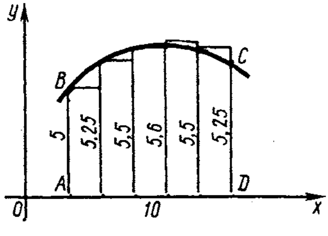


Рис. 195

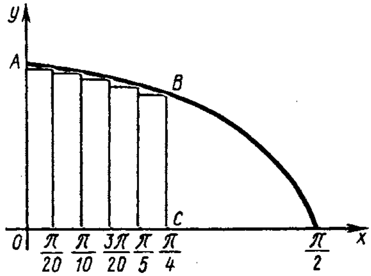


Рис. 196

3. Чем больше n (т. е. чем меньше Δx), тем точнее окончательный результат, но вместе с ростом n возрастает и объем вычислений.

4. С помощью приближенного интегрирования обычно находят интегралы, не поддающиеся точному вычислению. Однако мы ограничимся решением примеров, где точное значение интеграла находится легко, для того чтобы сравнить полученное приближенное значение с точным.

347. Вычислить площадь фигуры $ABCD$ по данным, представленным на рис. 195.

Решение. Разобьем основание AD, равное 10 см, на 5 равных частей и проведем через точки деления прямые, параллельные оси ординат. Применяя формулу (10), получим приближенное значение искомой площади:

$$S_{ABCD}=2(5+5{,}25+5{,}5+5{,}6+5{,}5)\approx 53{,}7 \text{ (кв. ед.)}$$

348. Используя метод прямоугольников, вычислить $\int\limits_0^{\pi/4} \cos x\,dx$.

Решение. Разделим промежуток интегрирования на 5 частей (рис. 196). Тогда $n=5$; $b-a=\pi/4$; $\Delta x=(b-a)/n=\pi/20\approx 0{,}1571$. Соответствующие значения подынтегральной функции найдем с помощью таблиц: $y_0=\cos 0°=1$; $y_1=\cos(\pi/20)=\cos 9°= =0{,}9877$; $y_2= =\cos(\pi/10)=\cos 18°=0{,}9511$; $y_3=\cos(3\pi/20)=\cos 27°=0{,}8910$; $y_4= =\cos(\pi/5)=\cos 36°=0{,}8090$; $y_5=\cos(\pi/4)=\cos 45°=0{,}7071$.

По формуле прямоугольников (с недостатком) имеем

$$A_{\text{прибл}}=\int\limits_0^{\pi/4} \cos x\,dx\approx 0{,}1571(1+0{,}9877+0{,}9511+0{,}8910+0{,}8090)=0{,}7288.$$

С другой стороны, по формуле Ньютона—Лейбница

$$A_{\text{точн}}=\int\limits_0^{\pi/4} \cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/4}=\sin(\pi/4)-\sin 0=0{,}5\sqrt{2}.$$

Найдем относительную погрешность вычисления:

$$\delta=\frac{|A_{\text{прибл}}-A_{\text{точн}}|}{A_{\text{точн}}}100\,\%=\frac{|0{,}7288-0{,}5\sqrt{2}|}{0{,}5\sqrt{2}}\cdot 100\,\%\approx 3{,}06\,\%.$$

349. Вычислить интеграл $\int\limits_2^5 x^2\,dx$ методом прямоугольников. Найти относительную погрешность вычисления.

350. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\,dx$ методом прямоугольников, разделив промежуток $[0, \pi]$ на 10 равных частей. Найти точное значение интеграла по формуле Ньютона—Лейбница и относительную погрешность приближенного вычисления.

351. Вычислить $\int\limits_0^1 e^x\,dx$ методом прямоугольников, разделив отрезок $[0, 1]$ на 8 частей.

4. Метод трапеций

Этот метод приближенного интегрирования обычно дает более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников.

Заменим дугу AB кривой $y=f(x)$ ломаной линией, вписанной в эту дугу (рис. 197). Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей обычных (т. е. прямолинейных) трапеций. Площади этих трапеций определяются по формулам

$$S_1=\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x,\quad S_2=\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x,\quad \ldots,\quad S_n=\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x,$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — ординаты, соответствующие значениям функции $y=f(x)$ в точках деления. Сумму площадей всех элементарных трапеций можно принять за приближенное значение площади криволинейной трапеции, а следовательно, и за приближенное значение определенного интеграла, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x=$$

$$=\Delta x\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right). \qquad (12)$$

Формула (12) называется *формулой трапеций.*

352. Найти приближенно $\int\limits_0^4 x^2dx$ методом трапеций, разделив промежуток интегрирования на 10 равных частей. Вычислить погрешность приближения.

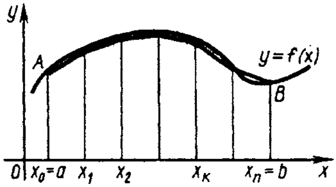


Рис. 197

Решение. Здесь $n=10$; тогда $\Delta x=(b-a)/n=0{,}4$. Точками деления являются: $x_0=0$; $x_1=0{,}4$; $x_2=0{,}8$; $x_3=1{,}2$; $x_4=1{,}6$; $x_5=2$; $x_6=2{,}4$; $x_7=2{,}8$; $x_8=3{,}2$; $x_9=3{,}6$; $x_{10}=4$.

Найдем значения функции в точках

деления: $y_0=0$; $y_1=0{,}16$; $y_2=0{,}64$; $y_3=1{,}44$; $y_4=2{,}56$; $y_5=4$; $y_6=5{,}76$; $y_7=7{,}84$; $y_8=10{,}24$; $y_9=12{,}96$; $y_{10}=16$.

Используя формулу (12), получим

$$\int\limits_0^4 x^2dx \approx 0{,}4\left(\frac{0+16}{2}+0{,}16+0{,}64+1{,}44+2{,}56+4{,}0+5{,}76+7{,}84+\right.$$
$$\left.+10{,}24+12{,}96\right)=21{,}44.$$

Точное значение интеграла определяем по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int\limits_0^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^4=\frac{64}{3}=21{,}33.$$

Найдем относительную погрешность приближенного вычисления:

$$\delta=\frac{21{,}44-21{,}33}{21{,}33}\cdot 100\,\% \approx 0{,}5\,\%.$$

353. Вычислить по формуле трапеций площадь фигуры $ABCD$ по данным, представленным на рис. 196.

354. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int\limits_2^5 x^2dx$. Сравнить с результатом решения этой же задачи методом прямоугольников (см. пример 349).

355. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2}\sin x\,dx$ методом трапеций и сравнить с результатом решения этой же задачи методом прямоугольников (см. пример 350).

356. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int\limits_0^5\frac{dx}{\sqrt{x+4}}$, разбив промежуток интегрирования на 5 равных частей.

Решение. Здесь $n=5$; $\Delta x=1$; $x_0=0$; $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=4$; $x_5=5$. Далее, находим $y_0=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$; $y_1=\frac{1}{\sqrt{1+4}}\approx 0{,}447$; $y_2=\frac{1}{\sqrt{2+4}}\approx$ $\approx 0{,}409$; $y_3=\frac{1}{\sqrt{3+4}}\approx 0{,}377$; $y_4=\frac{1}{\sqrt{4+4}}\approx 0{,}353$; $y_5=\frac{1}{\sqrt{5+4}}=\frac{1}{3}$.

По формуле (12) получим

$$\int\limits_0^5\frac{dx}{\sqrt{x+4}}\approx 1(0{,}416+0{,}447+0{,}409+0{,}377+0{,}353)=2{,}002.$$

357. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int\limits_2^{12}\frac{dx}{x}$, разбивая промежуток интегрирования на 10 равных частей. Оценить погрешность.

Решение. По условию, $a=2$, $b=12$, $n=10$, $\Delta x=1$. Вычислим значения подынтегральной функции $y=1/x$ в соответствующих точках деления: $x_0=2$, $y_0=1/2=0{,}5$; $x_1=3$, $y_1=1/3\approx 0{,}3333$; $x_2=4$, $y_2=$

$=1/4=0{,}25$; $x_3=5$, $y_3=1/5=0{,}2$; $x_4=6$, $y_4=1/6\approx0{,}1667$; $x_5=7$, $y_5=1/7\approx0{,}1429$; $x_6=8$, $y_6=0{,}125$; $x_7=9$, $y_7\approx0{,}1111$; $x_8=10$, $y_8=0{,}1$; $x_9=11$, $y_9\approx0{,}0909$; $x_{10}=12$, $y_{10}\approx0{,}0833$.

Подставив найденные значения в формулу (12), получим

$$\int_2^{12}\frac{dx}{x}\approx1\left(\frac{0{,}5+0{,}0833}{2}+0{,}3333+0{,}25+0{,}2+0{,}1667+0{,}1429+0{,}125+\right.$$
$$\left.+0{,}1111+0{,}1+0{,}0909\right)\approx1{,}812.$$

Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_2^{12}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_2^{12}=\ln12-\ln2=\ln6\approx1{,}792.$$

Найдем погрешность приближенного вычисления:

$$\delta=\frac{1{,}812-1{,}792}{1{,}792}\cdot100\ \%\approx1{,}1\ \%.$$

358. Вычислить интеграл $\int_1^9\sqrt{6x-5}\,dx$ по формуле Ньютона — Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 8 равных частей. Оценить погрешность результатов.

Решение. Согласно формуле Ньютона — Лейбница, находим

$$I=\int_1^9\sqrt{6x-5}\,dx=\frac{1}{6}\int_1^9(6x-5)^{1/2}d(6x-5)=\frac{1}{9}(6x-5)^{3/2}\Big|_1^9=\frac{7^3-1}{9}=38.$$

Так как промежуток $[1, 9]$ разбит на 8 равных частей, то $\Delta x=1$. Найдем значения y_i ($i=1, 2, \ldots, 8$) подынтегральной функции $y=\sqrt{6x-5}$ в точках деления x_i: $x_0=1$, $y_0=\sqrt{1}=1{,}0000$; $x_1=2$, $y_1=\sqrt{7}=2{,}6458$; $x_2=3$, $y_2=\sqrt{13}=3{,}6056$; $x_3=4$, $y_3=\sqrt{19}=4{,}3589$; $x_4=5$, $y_4=\sqrt{25}=5{,}0000$; $x_5=6$, $y_5=\sqrt{31}=5{,}5678$; $x_6=7$, $y_6=\sqrt{37}=6{,}0828$; $x_7=8$, $y_7=\sqrt{43}=6{,}5574$; $x_8=9$, $y=\sqrt{49}=7{,}0000$.

Вычислим данный интеграл по приближенным формулам. Используя формулу прямоугольников (10), находим

$$I=\sum_{i=0}^{7}y_i=34{,}8183.$$

Абсолютная погрешность этого приближенного значения (по недостатку) равна 3,1817, а относительная $\frac{3{,}1817\cdot100\ \%}{38}\approx8{,}37\ \%$.

Согласно формуле прямоугольников (11), получим

$$I=\sum_{i=1}^{8}y_i=40{,}8183.$$

Здесь абсолютная погрешность (по избытку) равна 2,8183, а относительная $\frac{2{,}8183\cdot100\ \%}{38}\approx7{,}42\ \%$.

По формуле трапеций (12) находим

$$I \approx 4 + \sum_{i=1}^{7} y_i = 37{,}8183.$$

Абсолютная погрешность этого результата составляет 0,1817, а относительная $\frac{0{,}1817 \cdot 100\,\%}{38} \approx 0{,}48\,\%$.

359. Применяя формулу Ньютона—Лейбница и приближенные формулы прямоугольников и трапеций, вычислить интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей.

360. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле Ньютона—Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей.

361. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ по формуле Ньютона—Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей.

5. Метод парабол

Из других методов приближенного интегрирования следует отметить *метод парабол* (который также называют *методом Симпсона*).

Его сущность заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy.

Из школьного курса алгебры известно, что уравнения таких парабол имеют вид

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \tag{13}$$

где α, β, γ — параметры. Эти параметры можно однозначно определить по трем точкам (если абсциссы всех этих точек различны). Иными словами, зная, например, координаты точек A, M, N (рис. 198), можно провести через эти точки дугу параболы вида (13) и притом только одну.

В методе парабол отрезок $[a, b]$ делят на четное число равных частей и проводят дуги парабол указанного вида через каждую тройку точек (дуга первой параболы пройдет через точки A, M, N, дуга второй параболы — через точки N, P и Q и т. д.). Соответствен-

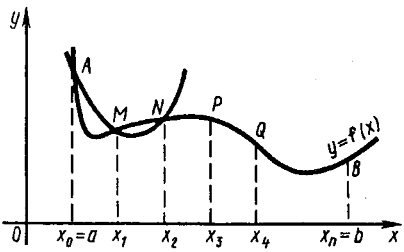


Рис. 198

но криволинейную трапецию под кривой $y=f(x)$ заменяют не суммой площадей прямолинейных фигур, как в предыдущих методах, а суммой криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол. Площади таких криволинейных трапеций легко вычисляются.

В курсе математического анализа выводится формула

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{3n}\,(y_0+y_n+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+$$
$$+4(y_1+y_3+\cdots y_{n-1})), \qquad (14)$$

где n — четное число. Она называется *формулой парабол* (*формулой Симпсона*).

Применение этой формулы значительно повышает точность вычисления определенного интеграла.

Например, если по формуле Симпсона вычислить интеграл $I=\int_0^1 x^4\,dx$ при $n=10$, то получим $I\approx 0{,}200013$. Точное значение интеграла $I=\frac{x^5}{4}\Big|_0^1=0{,}2$, а относительная погрешность $\delta=$ $=\frac{0{,}200013-0{,}2}{0{,}2}\cdot 100\,\%\approx 0{,}01\,\%$.

362. Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int_1^4 x^2\,dx$.

Решение. Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей. Тогда $(b-a)/3n=3/30=1/10=0{,}1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y=x^2$ значения аргумента $x_0=1$, $x_1=1{,}3$; $x_2=1{,}6$, ..., $x_{10}=4$, найдем соответствующие значения ординат: $y_0=1$; $y_1=1{,}69$; $y_2=2{,}56$; $y_3=3{,}61$; $y_4=4{,}84$; $y_5=6{,}25$; $y_6=7{,}84$; $y_7=9{,}61$; $y_8=11{,}56$; $y_9=13{,}69$; $y_{10}=16$.

Применяя формулу (14), получим

$$\int_1^4 x^2\,dx=0{,}1\,((1+16)+2(2{,}56+4{,}84+7{,}84+11{,}56)+4(1{,}69+3{,}61+6{,}25+$$
$$+9{,}61+13{,}69))=21.$$

Вычисление интеграла по формуле Ньютона—Лейбница дает

$$\int_1^4 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21.$$

Таким образом, применяя формулу Симпсона, в данном случае мы получили точное значение интеграла.

Заметим, что хотя метод прямоугольников является наиболее простым методом приближенного вычисления определенных интегралов, он дает наименее точные результаты. Выбор метода приближенного интегрирования зависит от подынтегральной функции и требуемой точности расчета.

§ 10. Применение определенного интеграла к решению физических задач

Схема решения задач на приложения определенного интеграла
Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении
Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела
Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины
Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку

1. Схема решения задач на приложения определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно решать различные задачи физики, механики и т. д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.

Так, понятие определенного интеграла применяется при решении задач на вычисление работы переменной силы, давления жидкости на вертикальную поверхность, пути, пройденного телом, имеющим переменную скорость, и ряд других.

Несмотря на разнообразие этих задач, они объединяются одной и той же схемой рассуждений при их решении. Искомая величина (путь, работа, давление и т. д.) соответствует некоторому промежутку изменения переменной величины, которая является переменной интегрирования. Эту переменную величину обозначают через x, а промежуток ее изменения — через $[a, b]$.

Отрезок $[a, b]$ разбивают на n равных частей, в каждой из которых можно пренебречь изменением переменной величины. Этого можно добиться при увеличении числа разбиений отрезка. На каждой такой части задачу решают по формулам для постоянных величин.

Далее составляют сумму (интегральную сумму), выражающую приближенное значение искомой величины. Переходя к пределу при $n \to \infty$, находят искомую величину I в виде интеграла $I=\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ — данная по условиям задачи функция (сила, скорость и т. д.).

2. Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t, вычисляется по формуле $S=vt$.

Если тело движется неравномерно в одном направлении и скорость его меняется в зависимости от времени t, т. е. $v=f(t)$, то для нахождения пути, пройденного телом за время от t_1 до t_2, разделим этот промежуток времени на n равных частей Δt. В каждой из таких частей скорость можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка. Тогда пройденный телом путь будет приближенно равен сумме $\sum_{k=1}^{n} v(t)\Delta t$, т. е.

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} v(t)\Delta t.$$

Если функция $v(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Итак,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \qquad (1)$$

363. Скорость движения материальной точки задается формулой $v=(4t^3-2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 4 с от начала движения.

Решение. Согласно формуле (1), имеем

$$s=\int_0^4 (4t^3-2t+1)\,dt=(t^4-t^2+t)\Big|_0^4=256-16+4=244 \text{ (м)}.$$

Итак, за 4 с точка прошла 244 м.

364. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=(3+3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 5 с от начала движения.

365. Скорость движения тела изменяется по закону $v(t)=(3t^2+t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 4 с от начала движения.

366. Скорость движения изменяется по закону $v(t)=2t$ м/с. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

Решение. $s=\int_2^3 2t\,dt=t^2\Big|_2^3=9-4=5$ (м).

367. Найти путь, пройденный телом за 10-ю секунду, зная, что скорость его прямолинейного движения выражается формулой $v=(t^2+4t-2)$ м/с.

368. Найти путь, пройденный телом за 4-ю секунду, если скорость его прямолинейного движения изменяется по закону $v=(3t^2-2t-3)$ м/с.

369. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=(t+6t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 2-ю секунду.

370. Скорость движения тела задана уравнением $v = (12t - 3t^2)$ м/с. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение. Скорость движения тела равна нулю в моменты начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно t; получим $12t - 3t^2 = 0$; $3t(4-t) = 0$; $t_1 = 0$, $t_2 = 4$. Следовательно,

$$s = \int_0^4 (12t - 3t^2)\,dt = (6t^2 - t^3)\Big|_0^4 = 6 \cdot 4^2 - 4^3 = 32 \text{ (м)}.$$

371. Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v = (29{,}4 - 9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

Решение. Найдем время, в течение которого тело поднималось вверх: $29{,}4 - 9{,}8t = 0$ (в момент наибольшего подъема скорость равна нулю); $t = 3$ (с). Поэтому

$$s = \int_0^3 (29{,}4 - 9{,}8t)\,dt = 9{,}8\left(3t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^3 = 44{,}1 \text{ (м)}.$$

372. Скорость движения точки выражается формулой $v = (18t - 3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

373. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, если скорость ее прямолинейного движения изменяется по закону $v = (15t - 5t^2)$ м/с.

374. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v = (49 - 9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту его подъема.

375. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v = (39{,}2 - 9{,}8)$ м/с. Найти наибольшую высоту его подъема.

376. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (2t + a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ с тело прошло путь 40 м.

377. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t) = (4t + a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что путь, пройденный телом за 2 с от начала движения, равен 48 м.

378. Два тела одновременно выходят из одной точки: одно — со скоростью $v_1 = 5t$ м/с, другое — со скоростью $v_2 = 3t^2$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 с, если движутся по прямой в одном направлении?

Решение. $s_1 = \int_0^{20} 5t\,dt = 5 \cdot \frac{t^2}{2}\Big|_0^{20} = 5 \cdot 200 = 1000$ (м);

$$s_2 = \int_0^{20} 3t^2\,dt = t^3\Big|_0^{20} = 8000 \text{ (м)}; \quad s = s_2 - s_1 = 8000 - 1000 = 7000 \text{ (м)}.$$

379. Два тела одновременно начали прямолинейное движение из некоторой точки в одном направлении. Первое тело движется со скоростью $v_1 = (6t^2 + 2t)$ м/с, второе — со скоростью

$v_2=(4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

380. Два тела одновременно начали прямолинейное движение из некоторой точки в одном направлении со скоростями $v_1=(6t^2+4t)$ м/с и $v_2=4t$ м/с. Через сколько секунд расстояние между ними будет равно 250 м?

Решение. Пусть t_1 — момент встречи. Тогда

$$s_1=\int_0^{t_1}(6t^2+4t)=(2t^3+2t^2)\Big|_0^{t_1}=2t_1^3+2t_1^2;\quad s_2=\int_0^{t_1}4t\,dt=2t^2\Big|_0^{t_1}=2t_1^2.$$

Так как $s_1-s_2=250$, то получаем уравнение $2t_1^3+2t_1^2-2t_1^2=250$ или $2t_1^3=250$, откуда $t_1^3=125$, т. е. $t=5$ (с).

3. Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела

Пусть тело под действием силы F движется по прямой s, а направление силы совпадает с направлением движения. Необходимо найти работу, произведенную силой F при перемещении тела из положения a в положение b.

Если сила F постоянна, то работа находится по формуле $A=F(b-a)$ (произведение силы на длину пути).

Пусть на тело, движущееся по прямой Ox, действует сила F, которая изменяется в зависимости от пройденного пути, т. е. $F=f(x)$. Для того чтобы найти работу, совершаемую силой F на отрезке пути от a до b, разделим этот отрезок на n равных частей Δx. Предположим, что на каждой части Δx сила сохраняет постоянное значение $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_k)$, ..., $F(x_n)$.

Составим интегральную сумму, которая приближенно равна значению произведенной работы:

$$A\approx F(x_1)\Delta x+F(x_2)\Delta x+\cdots+F(x_k)\Delta x+\cdots+F(x_n)\Delta x,$$

т. е. работа, совершенная этой силой на участке от a до b, приближенно равна сумме $\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$:

$$A\approx\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx.$$

Итак, работа переменной силы вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

4. Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины

Согласно закону Гука, сила F, необходимая для растяжения или сжатия пружины, пропорциональна величине растяжения или сжатия.

Пусть x — величина растяжения или сжатия пружины. Тогда $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойства пружины.

Работа на участке Δx выразится формулой $\Delta A \approx F\Delta x$, а вся затраченная работа — формулой $A \approx \sum\limits_{x_0}^{x_1} F\Delta x$ или $A \approx \sum\limits_{x_0}^{x_1} kx\Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то погрешность величины работы стремится к нулю.

Для нахождения истинной величины работы следует перейти к пределу:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} F\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} kx\Delta x = \int_{x_0}^{x_1} kx\, dx.$$

Итак,

$$A = k\int_{x_0}^{x_1} x\, dx. \qquad (3)$$

381. Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 2 см?

Решение. По закону Гука сила F, растягивающая пружину, пропорциональна растяжению пружины, т. е. $F = kx$. Используя условие, находим $k = \frac{10}{0,02} = 500$ (Н/м), т. е. $F = 500x$. Согласно формуле (3), получим

$$A = \int_0^{0,02} 500x\, dx = \frac{500x^2}{2}\Big|_0^{0,02} = 0,1 \ \text{(Дж)}.$$

382. Сила в 60 Н растягивает пружину на 2 см. Первоначальная длина пружины равна 14 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 20 см?

Решение. Имеем $k = \frac{60}{0,02} = 3000$ (Н/м) и, следовательно, $F = 3000x$. Так как пружину требуется растянуть на 0,06 (м), то

$$A = \int_0^{0,06} 3000x\, dx = 1500x^2\Big|_0^{0,06} = 1500 \cdot 0,06^2 = 5,4 \ \text{(Дж)}.$$

383. Какую работу совершает сила в 8 Н при растяжении пружины на 6 см?

384. Сила в 40 Н растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 0,02 м?

385. При растяжении пружины на 5 см затрачивается работа 29,43 Дж. На сколько растянется пружина, если затратить работу 9,81 Дж?

Решение. Здесь $A_1 = 29{,}4$ Дж, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}05$ м. Так как $A_1 = k\int\limits_{x_0}^{x_1} x\,dx$, то получаем уравнение $29{,}43 = k\int\limits_0^{0{,}05} x\,dx$ или $29{,}43 = k \times \frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}05}$, откуда $k = \frac{29{,}43 \cdot 2}{0{,}0025} = 23\,544$.

Далее, из уравнения $A_2 = k\int\limits_{x_0}^{x_2} x\,dx$, где $A_2 = 9{,}81$ Дж, $x_0 = 0$, $k = 23\,544$, найдем x_2. Имеем $9{,}81 = 23\,544\frac{x^2}{2}\Big|_0^{x_2}$, откуда $x_2^2 = \frac{9{,}81 \cdot 2}{23\,544} = 0{,}00083$, т. е. $x_2 = \sqrt{0{,}00083} \approx 0{,}029$ (м).

386. Для сжатия пружины на 3 см необходимо совершить работу в 16 Дж. На какую длину можно сжать пружину, совершив работу в 144 Дж?

387. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 20 см. Сила в 9,8 Н растягивает ее на 2 см. Определить работу, затраченную на растяжение пружины от 25 до 35 см.

388. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 20 см. Сила в 50 Н растягивает ее на 1 см. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину от 22 до 32 см?

5. Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку

Из физики известно, что сила P давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле

$$P = 9{,}81\gamma h S, \tag{4}$$

где γ — плотность жидкости.

Выведем формулу для вычисления силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку произвольной формы, если ее верхний край погружен на глубину a, а нижний — на глубину b.

Так как различные части вертикальной пластинки находятся на разной глубине, то сила давления жидкости на них неодинакова. Для вывода формулы нужно разделить пластинку на n горизонтальных полос одинаковой высоты Δx. Каждую полосу приближенно можно считать прямоугольником (рис. 199).

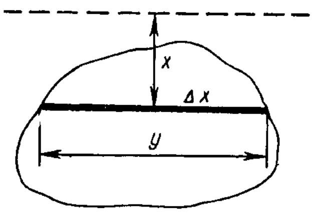


Рис. 199

По закону Паскаля сила давления жидкости на такую полосу равна силе движения жидкости на горизонтально расположенную пластинку той же площади, погруженной на ту же глубину.

Тогда согласно формуле (4) сила давления на полосу, находящуюся на расстоянии x от поверхности, составит

$$\Delta P \approx 9{,}81\gamma x y \Delta x,$$

где $y\Delta x$ — площадь полосы.

Составим интегральную сумму и найдем ее предел, равный силе давления жидкости на всю пластинку:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b 9{,}81\gamma x y \Delta x = \int_a^b 9{,}81\gamma x y\, dx,$$

т. е.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\, dx. \qquad (5)$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то $a = 0$ и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_0^b xy\, dx.$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, так как эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\, dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\, dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

389. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Решение. Здесь $y = f(x) = 20$, $a = 0$, $b = 5$ (м), $\gamma = 1000$ кг/м^3. Используя формулу (5), находим

$$P = 9810 \int_0^5 20x\, dx = 9810 \cdot 20 \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = 9810 \cdot 10 \cdot 25 = 2{,}45 \cdot 10^6 \text{ (Н)}.$$

390. Вычислить силу давления воды на вертикальную прямоугольную пластинку, основание которой 30 м, а высота 10 м, причем верхний конец пластинки совпадает с уровнем воды.

391. Вычислить силу давления воды на одну из стенок аквариума, имеющего длину 30 см и высоту 20 см.

392. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение. Здесь $y = 1$, $a = 0{,}5$, $b = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$ (м), $\gamma = 1000$ кг/м^3. Следовательно,

$$P = 9810\int_a^b xy\,dx = 9810\int_a^b x\,dx = 9810\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810\frac{2,5^2 - 0,5^2}{2} =$$
$$= 29\,430 \text{ (Н)}.$$

393. Вычислить силу давления на прямоугольную пластинку с основанием 16 см и высотой 24 см, погруженную вертикально в воду так, что верхнее основание пластинки находится на 10 см ниже свободной поверхности воды.

394. Вычислить силу давления на прямоугольную пластинку с основанием 8 см и высотой 10 см, погруженную вертикально в воду так, что верхнее основание пластинки находится на 2 см ниже поверхности воды.

395. Пластинка в виде треугольника, основание которого равно 4 см, а высота 3 см, погружена вертикально в воду. Найти силу давления воды на эту пластинку, если ее вершина лежит на поверхности воды (рис. 200).

Решение. Снова воспользуемся формулой (5). Здесь $a = 0$, $b = 3$ см $= 0,03$ м, $|AC| = 4$ см $= 0,04$ м, $\gamma = 1000$ кг/м^3.

Из подобия треугольников DBE и ABC (рис. 200) имеем $\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|BK|}{|BE|}$, или $\frac{y}{0,04} = \frac{x}{0,03}$. Следовательно, $y = \frac{0,04x}{0,03}$, или $y = \frac{4}{3}x$.

Подставляя все данные в расчетную формулу, получим

$$P = 9810\int_0^{0,03} x\cdot\frac{4}{3}x\,dx = 9810\cdot\frac{4}{3}\int_0^{0,03} x^2dx = \frac{9810\cdot 4}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,03} =$$
$$= \frac{9810\cdot 4}{9}\cdot 0,03^3 \approx 0,117 \text{ (Н)}.$$

396. Треугольник ABC погружен вертикально в бак с бензином (вершиной кверху), так, что его основание расположено горизонтально, а вершина лежит на поверхности жидкости (рис. 201). Вычислить силу давления на треугольник, если его основание $|AC| = 10$ см, высота $h = 8$ см, плотность $\gamma = 0,7$ г/см^3.

397. Вычислить силу давления на треугольник с основанием 10 см и высотой 4 см, погруженный вертикально в воду так, что его вершина лежит на поверхности воды.

398. Треугольная пластинка с основанием 0,2 м и высотой 0,4 м погружена вертикально в воду так, что вершина лежит на

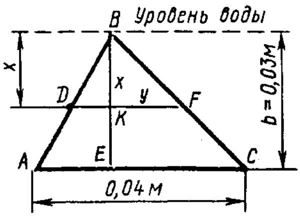


Рис. 200

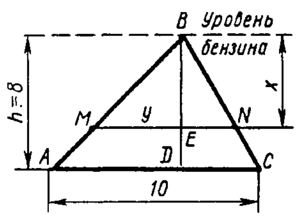


Рис. 201

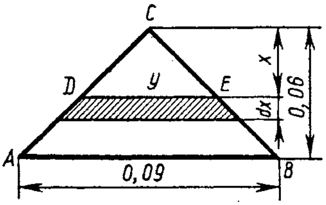


Рис. 202

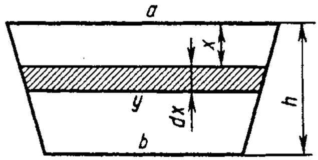


Рис. 203

поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислить силу давления воды на пластинку.

399. Треугольник с основанием 9 см и высотой 6 см полностью погружен вертикально в воду (вершиной кверху) так, что его основание параллельно свободной поверхности воды, а вершина отстоит от этой поверхности на 4 см. Найти силу давления воды на треугольник (рис. 202).

Пусть плотина имеет вид трапеции с высотой h, верхним основанием a и нижним основанием b. Найдем силу давления воды на эту плотину, если вода доходит до ее верхнего края.

Рассмотрим элементарный слой, находящийся на глубине x и имеющий высоту dx (рис. 203). Легко установить, что длина y этого слоя равна $a-\frac{(a-b)x}{h}$, а его площадь составляет $\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)dx$. Сила давления dP на этот слой равна $9{,}81\gamma x\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)dx$, а сила давления воды на всю плотину выражается интегралом:

$$P=9{,}81\gamma\int_0^h\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)x\,dx=\frac{9{,}81\gamma(a+2b)h^2}{6}. \qquad (6)$$

400. Вычислить силу давления воды на плотину, имеющую форму трапеции, у которой верхнее основание, совпадающее с поверхностью воды, имеет длину 10 м, нижнее основание — 20 м, а высота 3 м.

Решение. Используя формулу (6), находим

$$P=9810\frac{(10+2\cdot 20)3^2}{6}=9810\cdot\frac{450}{6}=735\,750 \text{ (Н)}.$$

401. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой 38 м, нижнее — 20 м и высота 12 м. Уровень воды доходит до верха плотины.

402. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой равно 4,5 м, а нижнее основание — 3 м. Высота трапеции равна 2 м.

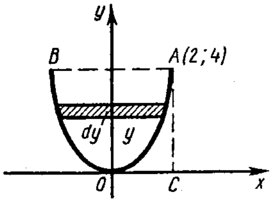


Рис. 204

403. Определить силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м (рис. 204).

Р е ш е н и е. Имеем $|BA| = 2x = 4$ (м). Точка A в выбранной системе координат имеет координаты (2; 4). Уравнение параболы относительно этой системы есть $y = ax^2$ или $4 = a \cdot 2^2$, откуда $a = 1$, т. е. $y = x^2$.

Рассмотрим элементарную площадку dS на расстоянии y от начала координат. Длина этой площадки равна $2x$, а ее площадь $dS = 2x\,dy$, где dy — ширина площадки. Эта площадка будет испытывать силу давления

$$dP = 9{,}81\gamma(4-y)dS = 9{,}81\gamma(4-y)2x\,dy.$$

Просуммируем все элементарные силы давления при изменении от 0 до 4 и перейдем к пределу при $\Delta y \to 0$. Тогда сила давления на весь сегмент выразится следующим интегралом:

$$P = 9{,}81\gamma\int_0^4 (4-y)2x\,dy.$$

Для нахождения этого интеграла выразим x через y; так как $y = x^2$, то $x = \sqrt{y}$. Тогда получим

$$P = 19{,}62 \cdot 1000\int_0^4 (4-y)\sqrt{y}dy = 19\,620\left(\int_0^4 4\sqrt{y}dy - \int_0^4 y\sqrt{y}dy\right) =$$

$$= 19\,620\left(4\int_0^4 y^{1/2}dy - \int_0^4 y^{3/2}dy\right) = 19\,620\left(\frac{4y^{3/2}}{3/2} - \frac{y^{5/2}}{5/2}\right)\Big|_0^4 =$$

$$= 19\,620\left(\frac{8}{3}y^{3/2} - \frac{2}{5}y^{5/2}\right)\Big|_0^4 = 19\,620\left(\frac{8\cdot 2}{3} - \frac{2\cdot 32}{5}\right) =$$

$$= \frac{19\,620\cdot 128}{15} = 167\,424 \text{ (Н)}.$$

404. Цилиндрический стакан наполнен ртутью. Вычислить силу давления ртути на боковую поверхность стакана, если его высота 0,1 м, а радиус основания 0,04 м. Плотность ртути равна 13 600 кг/м^3.

Р е ш е н и е. Вычислим площадь круглой полоски:

$$\Delta S = 2\pi r\,dx = 0{,}08\pi\,dx.$$

Элементарная сила давления составляет

$$\Delta P = 9{,}81 \cdot 136{,}00 \cdot 0{,}08\pi dx = 10\,673\pi dx.$$

Следовательно,

$$P = \int_0^{0{,}1} 10\,673\pi x\,dx = 10\,673\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}1} = 53{,}37\pi \approx 167{,}6 \text{ (Н)}.$$

405. Вычислить силу давления бензина на стенки цилиндрического бака высотой 3 м и радиусом основания 1 м.

406. Горизонтально расположенная цилиндрическая цистерна наполнена до половины керосином. Найти силу давления на каждую из боковых стенок, если радиус дна цистерны равен 2 м, плотность керосина $\gamma = 0{,}8$ г/см^3 (рис. 205).

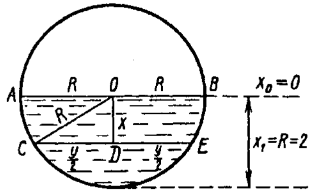


Рис. 205

407. В воду опущен полукруглый диск радиуса 2 м. Верхний край диска (горизонтальный диаметр) находится на поверхности воды. Определить силу давления воды на диск.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то каким равенством связаны они между собой?
4. Запишите первообразные для функций: 3, $4x^3$, $\cos x$, $2/x$.
5. Какая из двух функций $5x^4$ и x^5+4 является первообразной для другой?
6. Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на указанном промежутке, если: а) $F(x)=3\sqrt[3]{x}$, $f(x)=1/\sqrt[3]{x^2}$, $x\in(0;\ \infty)$; б) $F(x)=\sin x+5$, $f(x)=\cos x$, $x\in(-\infty,\ \infty)$.
7. Первообразная определяется неоднозначно. Как это нужно понимать?
8. Почему при интегрировании функций появляется произвольная постоянная?
9. Почему одна функция имеет целую совокупность первообразных?
10. Как записать всю совокупность первообразных функций?
11. Что называется неопределенным интегралом?
12. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной функции?
13. Почему интеграл называется неопределенным?
14. Как называются все элементы равенства $\int f(x)dx = F(x)+C$?
15. Чем отличаются друг от друга подынтегральная функция и подынтегральное выражение?
16. Что означает постоянная C в определении неопределенного интеграла?
17. Чему равны производная и дифференциал неопределенного интеграла?
18. В чем заключается правило интегрирования выражения, содержащего постоянный множитель?
19. В чем заключается правило интегрирования алгебраической суммы функций?
20. Чему равен интеграл от дифференциала некоторой функции?
21. Напишите основные формулы интегрирования.
22. Как доказать справедливость каждой формулы интегрирования?
23. Почему $n \neq -1$ для интеграла $\int x^n dx$? В какой формуле рассматривается этот случай?
24. Запишите неопределенные интегралы для выражений: а) $3\sin x\,dx$; б) x^2dx; в) $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
25. Как проверить результат интегрирования?

26. Какие из следующих равенств записаны верно, а какие нет: а) $\int x^3 dx = 3x^2 + C$; б) $\frac{dx}{x} = \ln x + C$; в) $\int (1+x)dx = x + \frac{x^2}{2} + C$?

27. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

28. Что такое интегральные кривые? Как они расположены друг относительно друга? Могут ли они пересекаться?

29. Как расположены касательные к интегральным кривым в точках, имеющих одну и ту же абсциссу?

30. Как из семейства интегральных кривых выделить одну из них?

31. Как определить постоянную интегрирования по начальным данным?

32. В семействе кривых $y = \int x\,dx$ найдите кривую, проходящую через точку (2; 3).

33. Для функции $f(x) = 1/\sqrt{x}$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M(4; 5)$.

34. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v = 3t^2 + 1$. Найдите закон движения.

35. Укажите целесообразные подстановки для нахождения следующих интегралов: а) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x} dx$; в) $\int x^3 \sqrt[5]{1-3x^4} dx$.

36. Укажите, какие из следующих интегралов целесообразно интегрировать по частям: а) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; в) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$; г) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2}$; д) $\int \cos x \ln(\sin x) dx$.

37. Что такое определенный интеграл?

38. Что в записи $\int_a^b f(x)dx$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)$; г) $f(x)dx$? Может ли быть $a = b$; $a > b$?

39. Зависит ли приращение $F(b) - F(a)$ от выбора первообразной?

40. Вычислите: а) $\int_{-1}^{2} x^3 dx$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx$.

41. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

42. Вычислите интегралы: а) $\int_1^4 \left(x^2 - \frac{3}{4} + \frac{5}{x\sqrt{x}}\right) dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x} \sin x\,dx$.

43. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

44. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?

45. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

46. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = \frac{1}{2}x + 3$, $x = 4$ и осью абсцисс.

47. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2$, $x + y - 4 = 0$.

48. Вычислите приближенные значения интеграла $\int_0^5 (3x^2 + 2x)dx$ по формулам прямоугольников и трапеций, полагая $n = 10$. Найдите относительные погрешности результатов.

49. Скорость движения точки меняется по закону $v = 4t - t^2$. Найдите путь, пройденный точкой за первые 3 с движения.

50. Найдите работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого $l = 20$ м, а радиус основания $r = 20$ м.

51. Треугольник ABC, основание которого $|AC| = 12$ дм, а высота равна 9 дм, погружен вертикально (вершиной вниз) в воду так, что основание треугольника параллельно свободной поверхности воды и находится от нее на глубине 1 дм. Определите силу давления на треугольник.

Ответы

4. $3x$; x^4; $\sin x$; $2\ln x$. 5. x^5+4 является первообразной функции $5x^4$. 6. а) $(3\sqrt[3]{x})' = (3x^{1/3})' = x^{-2/3} = 1/\sqrt[3]{x^2}$; б) $(\sin x + 5)' = (\sin x)' + (5)' = \cos x$. 24. а) $\int 3\sin x\, dx = -3\cos x + C$; б) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. 26. а), б) Неверно; в) верно. 32. $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. 33. $F(x) = 2\sqrt{x} + 1$. 34. $s = t^3 + t + C$. 35. а) $t = \operatorname{arctg} x$; б) $u = 1 + \ln x$; в) $z = 1 - 3x^4$. 40. а) 3,75; б) 0,5. 42. а) 23,75; б) 0,75. 46. 21 кв. ед. 47. $17\frac{2}{3}$ кв. ед. 48. 149,69, 0,21 %; 150,63 0,42 %. 49. 9 м. 50. 130 760 000 Дж. 51. 2119 Н.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите интеграл $\int 6x^2(1 - x^3)dx$.

2. Определите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$ и $y = 0$.

3. Вычислите интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле прямоугольников при $n = 10$ с точностью до 0,001.

4. Скорость движения тела изменяется по закону $v(t) = 3t^2$. Найдите путь, пройденный телом за 7 с от начала движения.

5. Вычислите работу, затраченную при растяжении каучукового шнура на 20 см, если растяжение пропорционально приложенной силе и сила в 2,6 Н удлиняет шнур на 2 см.

Вариант 2

1. Найдите интеграл $\int \operatorname{ctg} x\, dx$.

2. Определите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $x - y + 2 = 0$.

3. Вычислите интеграл $\int_0^2 \sqrt{x+5}\,x\,dx$ приближенно по формуле трапеций (при $n = 10$), а затем найдите его по формуле Ньютона — Лейбница. Сравнив полученные результаты, установите относительную погрешность.

4. Мяч брошен с высоты $h = 2$ м вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. На какую наибольшую высоту он поднимается?

5. Горизонтально лежащая труба, поперечным сечением которой является круг диаметром 6 м, наполнена наполовину нефтью, плотность которой $\gamma = 0{,}76$ г/см^3. Найдите силу давления на вертикальную заслонку, закрывающую трубу.

Ответы

Вариант 1. **1.** $2x^3 - x^6 + C$. **2.** $S = 9$ кв. ед. **3.** $\approx 0{,}719$. **4.** $s = 343$ м. **5.** $A = 2{,}6$ Дж. Вариант 2. **1.** $\ln|\sin x| + C$. **2.** $S = 4{,}5$ кв.ед. **3.** 5,283; 5,273; $\delta \approx 0{,}2$ %. **4.** $\approx 13{,}25$ м. **5.** 134 064 Н.

Глава VI
Дифференциальные уравнения

§ 1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Расширение понятия уравнения
Понятие о дифференциальном уравнении
Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

1. Расширение понятия уравнения

В школьном курсе математики мы неоднократно встречались с различными уравнениями: алгебраическими, показательными, тригонометрическими и т. д. Рассмотрим, например, два уравнения $ax+b=0$ $(a\neq 0)$ и $\sin x=0$. Первое имеет единственный корень $x=-b/a$, второе — бесконечное число корней $x=\pi n$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Эти уравнения объединяет то, что в них неизвестными являются числа.

В математике и ее приложениях иногда приходится рассматривать так называемые функциональные уравнения, решениями которых служат неизвестные функции (или семейства функций). Таково, например, уравнение

$$f(x_1x_2)=f(x_1)+f(x_2), \qquad (1)$$

решением которого (для монотонных функций $f(x)$ и любых положительных значений x_1 и x_2) является семейство логарифмических функций

$$y=\log_a x. \qquad (2)$$

В выражении (2) основание a может быть любым положительным числом, кроме $a=1$, поэтому указанное выражение представляет собой семейство функций. Легко проверить, что это семейство является решением функционального уравнения (1); действительно,

$$\log_a(x_1x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2 \quad (x_1,\ x_2>0).$$

К функциональным уравнениям относятся, в частности, дифференциальные уравнения.

С простейшими дифференциальными уравнениями мы встречались при решении задач о нахождении уравнения кривой по заданной функции углового коэффициента (например, $y' = x$) и об определении закона движения точки по заданной функции скорости (например, $s' = t^2$). В том и другом случае по заданному уравнению, содержащему производную искомой функции, нужно найти эту функцию. Это и значит решить дифференциальное уравнение.

Существуют различные виды дифференциальных уравнений. Некоторые из них мы рассмотрим в этой главе.

2. Понятие о дифференциальном уравнении

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Обозначим через $f'(x)$ ее первую производную, через $f''(x)$ — вторую производную и т. д., а дифференциалы функций и аргумента обозначим соответственно dy и dx.

В дифференциальных уравнениях всегда присутствуют производные или дифференциалы функции и аргумента. Это отличительный признак дифференциального уравнения. Например,

$$6y' - xy = 0, \quad y' = 2x + y, \quad x\,dy - y\,dx = 0$$

— дифференциальные уравнения.

Наличие самой функции и аргумента в дифференциальном уравнении не является обязательным. Например, уравнения

$$dy - 5dx = 0, \quad y' = 0, \quad y\,dx = dy, \quad y' = x$$

также являются дифференциальными.

1. Установить, какие из указанных ниже уравнений являются дифференциальными: а) $y' + 3x = 0$; б) $y^2 + x^2 = 5$; в) $y = e^x$; г) $y'y - x = 0$; д) $y = \ln|x| + C$; е) $2dy + 3x\,dx = 0$.

Решение. Уравнения б), в), д) не являются дифференциальными, так как не содержат производной искомой функции или дифференциалов аргумента и искомой функции; уравнения а), г), е) являются дифференциальными.

2. Даны уравнения: а) $y' = y$; б) $y'' = \sin x$; в) $y = Cx$; г) $y' = y \operatorname{tg} x$; д) $\frac{ds}{dt} = 5t$; е) $y^2 = \ln|x|$. Какие из них являются дифференциальными?

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение — значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

3. Даны функции: $y = \ln|x| + C$, $y = Cx$, $y = Ce^x$. Какие из них являются решениями дифференциального уравнения $y'x = y$?

Решение. Функция $y = Cx$ есть решение уравнения $y'x = y$, так как подстановка этой функции в уравнение обращает его в тождество. Остальные функции не являются решениями данного уравнения.

4. Какие из перечисленных ниже функций представляют собой решения дифференциального уравнения $y' = x$: а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = \frac{x^2}{2} - 3$; г) $y = \frac{x^2}{2} + 5$?

5. Даны функции: $s = t^2 + C$; $s = t^3 + C$; $s = \frac{t^3}{3} + 5$; $s = 3t^3 - 1$. Какие из них служат решениями дифференциального уравнения $\frac{ds}{dt} = t^2$?

6. Дано уравнение $xy' = y - 1$. Какая из функций $y = 3x + 1$ или $y = Cx + 1$ является его решением?

Решение. Каждая из указанных функций есть решение данного уравнения. Действительно:

если $y = 3x + 1$, то $y' = 3$, откуда $x \cdot 3 = (3x + 1) - 1$, т. е. $3x = 3x$;
если $y = Cx + 1$, то $y' = C$, откуда $xC = (Cx + 1) - 1$, т. е. $Cx = Cx$.

7. Проверить, является ли функция $y = x^2 + x + C$ решением дифференциального уравнения $dy = (2x + 1)dx$.

Решение. Находим $y' = 2x + 1$, откуда $dy = (2x + 1)dx$. Подставляя найденное для dy выражение в левую часть заданного уравнения, получим $(2x + 1)dx \equiv (2x + 1)dx$, т. е. данная функция есть решение этого уравнения.

8. Является ли функция $s = 3t^3 - 2t$ решением уравнения $ds = (3t^2 - 2)dt$?

9. Показать, что функция $y = \sqrt{x}$ является решением уравнения $2yy' = 1$.

10. Является ли функция $x = y^2 + C$ решением уравнения $x^2dx = ydy$?

Часто решение дифференциального уравнения получается в виде неявной функции. Проверка такого решения может привести к сложным вычислениям. Мы будем проверять решения только в том случае, когда они получаются в явной форме.

11. Проверить, что функция $y = Ce^{-x^2}$ есть решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{y} + 2xdx = 0$.

Решение. Имеем $\frac{Ce^{-x^2}(-2x)}{Ce^{-x^2}}dx + 2xdx = 0$, т. е. $-2xdx + 2x \times dx \equiv 0$.

12. Найти значение a, при котором функция $y = e^{ax} + \frac{1}{3}e^x$ является решением уравнения $y' + 2y = e^x$.

13. Доказать, что $y = Cx$, где $C = \text{const}$, есть решение уравнения $y'x = y$.

14. Проверить, является ли функция $y = Ce^{2x}$ решением уравнений: а) $y' = -2y$; б) $y' = 2y$; в) $y' = 2(y + 1)$; г) $y' = 2xy$.

Пусть требуется найти уравнение кривой, для которой угловой коэффициент касательной в каждой точке равен x. Тогда приходим к уравнению $y' = x$, содержащему производную искомой функции. Перепишем это уравнение в виде $\frac{dy}{dx} = x$. Умножив обе части равенства на dx, имеем $dy = x\,dx$, откуда после интегрирования обеих частей получим $y = \frac{x^2}{2} + C$.

Функция $y = \frac{x^2}{2} + C$ является решением данного уравнения, так как, найдя производную $\left(\frac{x^2}{2} + C\right)' = x$ и подставляя ее в уравнение, получим тождество $x \equiv x$. Известно, что функция $y = \frac{x^2}{2} + C$ задает семейство парабол, сдвинутых друг относительно друга по оси ординат. Из этого семейства можно выделить одну конкретную параболу, если задать начальные данные, например координаты точки, через которую должна проходить эта парабола. Пусть, скажем, это точка $M(0;\ 3)$; тогда уравнение искомой параболы примет вид $y = \frac{x^2}{2} + 3$. Эта функция также представляет собой решение данного дифференциального уравнения.

Решение, содержащее производную постоянную C, называется *общим решением* дифференциального уравнения. В рассмотренном примере $y = \frac{x^2}{2} + C$ — общее решение уравнения $y' = x$.

Решение, в которое подставлено числовое значение C, называется *частным решением* дифференциального уравнения. Значение C вычисляется при подстановке начальных данных в общее решение. Так, функция $y = \frac{x^2}{2} + 3$ есть частное решение дифференциального уравнения $y' = x$.

Геометрически частное решение представляется одной интегральной кривой, общее решение — совокупность интегральных кривых.

15. Зная, что функция $y = Cx + 1$ является общим решением уравнения $xy' = y - 1$, определить его частное решение, если $y(1) = 5$.

Решение. Подставив в общее решение $y = Cx + 1$ заданные начальные условия $x = 1$, $y = 5$, получим $5 = C \cdot 1 + 1$, откуда $C = 4$.

Теперь подставим значение $C = 4$ в общее решение и найдем искомое частное решение $y = 4x + 1$.

Таким образом, при решении дифференциального уравнения сначала получается общее решение. Затем, если известны начальные данные, то можно получить частное решение. Для этого нужно:

1) подставить начальные данные в общее решение и вычислить C;

2) полученное числовое значение C подставить в общее решение.

Задача отыскания конкретного частного решения данного дифференциального уравнения по начальным данным называется *задачей Коши*.

16. Найти общее и частное решения дифференциального уравнения $y' = 2x$, если $y = 2$ при $x = 1$.

3. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

Как уже было отмечено, при вычислении неопределенных интегралов мы фактически имеем дело с дифференциальными уравнениями. Нахождение неопределенного интеграла по заданному дифференциалу некоторой функции сводится, по существу, к решению дифференциального уравнения.

17. Решить уравнение $y' = x + 3$.

Решение. Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x+3$, т. е. найти первообразную функции $x+3$. Согласно правилам интегрирования, получаем общее решение данного уравнения в виде $y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$, где C — произвольная постоянная.

18. Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Решение. Общее решение этого уравнения находим интегрированием: $y = \sin x + C$. Подставив начальные данные и определив $C = 1$, найдем частное решение (решение задачи Коши): $y = \sin x + 1$.

Рассмотренные выше задачи о нахождении уравнения кривой, для которой угловой коэффициент касательной равен x, о нахождении первообразной данной функции приводят к простым дифференциальным уравнениям. К такого же типа дифференциальным уравнениям приводят задачи, связанные со скоростью изменения функции, так как скорость есть производная данной функции по времени. Например, если нужно найти закон движения $s(t)$ по заданной скорости, то нужно решить дифференциальное уравнение вида $\frac{ds}{dt} = f(t)$, где $\frac{ds}{dt}$ — скорость движения.

Рассмотрим в качестве примеров некоторые конкретные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

19. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M(1;\ 3)$ и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен $2x - 3$.

Схема решения. Согласно условию, $y' = 2x - 3$ или $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$. Решив полученное уравнение, найдем общее решение, т. е. семейство интегральных кривых. Затем, подставив в него начальные условия $x = 1$, $y = 3$, получим частное решение, т. е. уравнение искомой кривой. Подробное решение этой задачи будет рассмотрено ниже (см. задачу 60).

20. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/с по истечении t секунд. Определить путь, который пройдет тело за 3 с.

Схема решения. По условию, $\frac{ds}{dt}=5t^2$ (мгновенная скорость — это производная пути по времени). Решив полученное уравнение и используя начальные условия, найдем ответ на поставленный вопрос. Ниже будет дано подробное решение этой задачи (см. задачу 65).

21. Материальная точка движется так, что скорость ее движения пропорциональна пройденному пути. В начальный момент точка находилась от начала отсчета на расстоянии 1 м, а через 2 с — на расстоянии e м. Найти закон движения материальной точки.

Схема решения. По условию, $v=ks'$, где k — коэффициент пропорциональности. Следовательно, задача сводится к решению уравнения $\frac{ds}{dt}=ks$ при заданных условиях. Сначала найдем его общее решение, затем — частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $s=1$ при $t=0$ и, наконец, используя условия $s=e$ при $t=2$, — значение коэффициента k. Подробное решение этой задачи будет приведено ниже (см. задачу 67).

22. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна их количеству в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 ч. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Схема решения. Пусть x — количество бактерий, имеющихся в момент t, а $x_0=x(0)$ — их количество в начальный момент. Тогда, согласно условию, получаем дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt}=kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Для ответа на поставленный вопрос сначала найдем общее решение этого уравнения, далее — частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0=x(0)$ и, наконец, используя условия $x(5)=3x_0$, — значение коэффициента k. Подробное решение этой задачи приводится ниже (см. задачу 70).

23. Скорость распада радия пропорциональна его количеству в данный момент времени. Найти закон радиоактивного распада, если известно, что через 1600 лет останется половина первоначального количества радия.

Схема решения. Пусть R — количество радия в момент t, а R_0 — его первоначальное количество. Обозначив коэффициент пропорциональности через k, согласно условию имеем $\frac{dR}{dt}=-kR$ (знак минус берется вследствие того, что скорость распада является отрицательной величиной, так как с течением времени количество вещества уменьшается).

Закон радиоактивного распада определяется из полученного дифференциального уравнения и условий $R=R_0$ при $t=0$ и $R=\frac{1}{2}R_0$ при $t=1600$. Подробное решение приведено ниже (см. задачу 72).

24. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела T и температурой воздуха T_0. Определить закон изменения температуры тела в зависимости от времени t, если опыт проводится при температуре $T_0 = 20\,°\mathrm{C}$, причем тело за 20 мин охладилось от 100 до 60 °C.

Схема решения. Так как скорость охлаждения тела равна $\frac{dT}{dt}$, то согласно условию имеем $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$, где k — коэффициент пропорциональности.

Решение полученного дифференциального уравнения при заданных условиях выражает закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t. Подробное решение приведено ниже (см. задачу 74).

Вообще говоря, дифференциальные уравнения могут содержать более сложные зависимости между искомой функцией, ее производными и независимой переменной. С ними мы будем знакомиться по ходу изучения различных типов дифференциальных уравнений.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными

1. Порядок дифференциального уравнения

Дифференциальные уравнения принято классифицировать в зависимости от порядка производной, входящей в уравнение.

Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется *порядком* дифференциального уравнения. Например:

$xy' - y = 4$ — дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, — первый;

$y'' - xy' + 5y = 1 + x^2$ — дифференциальное уравнение второго порядка, поскольку наивысший порядок производной, входящей в данное уравнение, — второй;

$y''' + 2xy'' = 0$ — дифференциальное уравнение третьего порядка;

$s_t'' = 12t^2 + 6t$, где $s = f(t)$, — дифференциальное уравнение второго порядка.

25. Определить порядок следующих дифференциальных уравнений: а) $y' + 2x = 0$; б) $y'' + 3y' - 4 = 0$; в) $2dy - 3x\,dx = 0$; г) $y'' = \cos x$.

Решение. Уравнения а) и в) — первого порядка, а уравнения б) и г) — второго порядка.

26. Определить порядок дифференциальных уравнений:

а) $y'+p(x)y=q(x)$; б) $y''+p(x)y'+q(x)y=0$; в) $y'''-ay''+by'+cy=0$; г) $y^{V}+y^{IV}-y=0$.

Итак, к дифференциальным уравнениям первого порядка относятся уравнения, в которые входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$F(x,\ y,\ y')=0. \tag{1}$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то оно примет вид $y'=f(x,\ y)$ или $dy=f(x,\ y)\,dx$.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными

Определение 1. Уравнение вида

$$f(x)dx+\varphi(y)dy=0, \tag{2}$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ — данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными.*

Это уравнение можно переписать в виде

$$f(x)dx=-\varphi(y)dy$$

и рассматривать как равенство двух дифференциалов.

Каждая часть уравнения с разделенными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Например,

$$x\,dx+y\,dy=0,\ 2y\,dy=3x^2dx,\ ds=(3t^2-2)dt,$$

$$2y\,dy=(1-3x^2)dx,\ e^xdx=y\,dy,\ \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

— уравнения с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

27. Решить уравнение $x\,dx+y\,dy=0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int x\,dx+\int y\,dy=C;\ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C;\ x^2+y^2=2C.$$

Так как C произвольно, то можно обозначить $2C$ через C^2, учитывая, что левая часть последнего равенства положительна. Тогда это равенство примет вид $x^2+y^2=C^2$. Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения мы получили семейство (совокупность) концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом, равным C (сравните полученное уравнение с известным уравнением окружности вида $x^2+y^2=R^2$).

28. Решить уравнение $2y\,dy = 3x^2 dx$.

Решение. Здесь $\varphi(y) = 2y$, $f(x) = 3x^2$. Интегрируя обе части уравнения, имеем

$$\int 2y\,dy = \int 3x^2 dx, \quad y^2 = x^3 + C.$$

Получили общее решение дифференциального уравнения. Это решение можно записать в явной форме: $y = \sqrt{x^3 + C}$.

29. Решить уравнение $2y^2 dy = 3x\,dx$.

30. Решить уравнение $2y\,dy = (1 - 3x^2)dx$.

31. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (x^2 - 1)dx$, если $y = 4$ при $x = 1$.

Решение. Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} - 1 + C$, откуда $C = \frac{14}{3}$. Итак, получаем ответ: $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$.

32. Решить уравнение $dx = (3t^2 - 2)\,dt$, если $s = 0$ при $t = 1$.

33. Решить уравнение $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, имеем

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}; \quad \ln(y+1) = \ln(x-1) + C.$$

Произвольную постоянную C можно обозначить через $\ln C$; тогда $\ln(y+1) = \ln(x-1) + \ln C$. Представив в правой части равенства сумму логарифмов в виде логарифма произведения, получим $\ln(y+1) = \ln C(x-1)$, откуда $y+1 = C(x-1)$. Это и есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения мы получили уравнение пучка прямых с центром в точке $M(1;\ -1)$ и с угловым коэффициентом C (сравните полученное уравнение с уравнением пучка прямых $y - y_1 = k(x - x_1)$).

34—39. Решить уравнения:

34. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$. **35.** $e^x dx = y\,dy$.

36. $\sqrt{y}\,dy = 3\sqrt{x}\,dx$. **37.** $\operatorname{tg} t\,dt + \frac{ds}{s} = 0$.

38. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$. **39.** $\frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{x} = 0$.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение 2. Уравнение вида

$$f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0, \tag{3}$$

где $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ — заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Например,

$$x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0,\ 1+y-xy'=0,$$
$$2dx-3dy+xdx+y^2dy=0,\ 1+y'+y+xy'=0$$

являются дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными.

Уравнение (3) можно привести к виду (2), если разделить все его члены на произведение $\varphi(x)F(y)$.

40. Решить уравнение $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x^2+1)(y^2-1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$. Теперь переменные разделены; интегрируя, находим

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=C_1;\ \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\frac{1}{2}\ln C.$$

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на 1/2, получим $\ln(x^2+1)(y^2-1)=\ln C$, откуда $(x^2+1)(y^2-1)=C$. Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

Замечание. При делении на произведение $\varphi(x)F(y)$ можно потерять те решения уравнения, которые обращают это произведение в нуль (если они входят в состав сокращаемого множителя).

41. Найти все решения дифференциального уравнения $y'=xy^2$.

Решение. Очевидно, что $y=0$ является решением данного уравнения. Пусть теперь $y\neq 0$. Тогда

$$\frac{dy}{y^2}=xdx$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^2+C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид $y=-\frac{2}{x^2+C}$, где C — произвольная постоянная. Заметим, что решение не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C.

42. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(1+x^2)dy-2xydx=0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $y(1+x^2)$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{y}-\frac{2xdx}{1+x^2}=0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\ln|y| - \ln(1+x^2) = \ln|C| \text{ или } \ln\left(\frac{|y|}{1+x^2}\right) = \ln|C|,$$

откуда получаем общее решение $y = C(1+x^2)$.

Замечание. При делении на $y(1+x^2)$ предполагалось, что $y(1+x^2) \neq 0$, т. е. $y \neq 0$, $1+x^2 \neq 0$. Однако $y = 0$ есть решение уравнения, в чем можно убедиться непосредственно. Это решение получается из общего при $C = 0$.

На основании решенных примеров очевиден алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1^0. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.

2^0. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.

3^0. Разделяют переменные.

4^0. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.

5^0. Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

43. Найти общее решение уравнения $1+y'+y+xy' = 0$.

Решение. 1^0. Заметим y' на $\dfrac{dy}{dx}$:

$$1+\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx} = 0.$$

2^0. Умножим все члены равенства на dx:

$$dx+dy+y\,dx+x\,dy = 0.$$

Сгруппируем все члены, содержащие dy и dx, и запишем полученные выражения в разных частях равенства:

$$(1+x)dy = -(1+y)dx.$$

3^0. Разделим обе части равенства на выражение $(1+x)(1+y)$.

$$\frac{dy}{1+y} = -\frac{dx}{1+x}.$$

4^0. Интегрируя обе части равенства, имеем

$$\int\frac{dy}{1+y} = -\int\frac{dx}{1+x};\ \ln|1+y| = -\ln|1+x|+\ln C;$$

$$\ln|1+y| = \ln\left|\frac{C}{1+x}\right|;\ 1+y = \frac{C}{1+x};\ y = \frac{C}{1+x}-1.$$

44—51. Решить уравнения:

44. $x\,dy+2y\,dx = 0$. **45.** $x^2dy = y^2dx$.

46. $\dfrac{dy}{2x}+y\,dx = 0$. **47.** $y' = x$.

48. $y' = y^2\cos x$. **49.** $y' - y - 1 = 0$.

50. $t\,dx - dx + x\,dt = 0$. **51.** $y' + 2x^2y' + 2xy - 2x = 0$.

52. Найти частное решение уравнения $2y\,dx = (1+x)dy$, если $y = 4$ при $x = 1$.

Решение. Разделяем переменные:

$$\frac{2dx}{1+x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{2dx}{1+x} = \int \frac{dy}{y}, \quad 2\ln(1+x) = \ln y + C, \quad \text{или} \quad \ln(1+x)^2 = \ln y + \ln C$$

(здесь C заменено на $\ln C$). Потенцируя, находим $(1+x)^2 = Cy$ — общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Найдем теперь частное решение данного уравнения по заданным начальным условиям. Полагая в общем решении $x = 1$, $y = 4$, имеем $2^2 = 4C$, откуда $C = 1$. Следовательно, $y = (1+x)^2$.

53. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = 2 + y$, если $y = 3$ при $x = 0$.

Решение. Заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, а затем умножив все члены на dx, получим

$$dy = 2dx + y\,dx, \quad \text{т. е.} \quad dy = (2+y)dx.$$

Разделим обе части равенства на $2+y$ и проинтегрируем:

$$\frac{dy}{2+y} = dx; \quad \int \frac{dy}{2+y} = \int dx; \quad \ln(2+y) = x + \ln C.$$

Выразим x через логарифм: $x = \ln e^x$. Тогда получим

$$\ln(2+y) = \ln e^x + \ln C.$$

Потенцируя, находим

$$2 + y = Ce^x, \quad y = Ce^x - 2.$$

Это общее решение данного уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим в общее решение $x = 0$, $y = 3$ и определим C: $3 = C\cdot e^0 - 2$; $e^0 = 1$; $3 = C - 2$; $C = 5$. Итак, $y = 5e^x - 2$.

54. Найти частное решение уравнения $(1+y^2)dx = xy\,dy$, если $y = 1$ при $x = 2$.

55. Найти частное решение уравнения $(1+x^3)dy = 3x^2y\,dx$, если $y = 2$ при $x = 0$.

56. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(1+x^2)\times$ $\times dy - 2xy\,dx = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y = 4$ при $x = -1$.

57. Найти частное решение уравнения $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = 0$, если $y = 2$ при $x = 0$.

Решение. 1^0. $\frac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tg}\,x = 0$.

2^0. $dy = -y\,\mathrm{tg}\,x\,dx$.

3^0. $\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx.$

4^0. $\int \frac{dy}{y} = -\int \operatorname{tg} x\, dx;\ \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|,\ y = C\cos x.$

5^0. При $x = 0$, $y = 2$ имеем $2 = C \cdot 1$, $C = 2$, т. е. $y = 2\cos x$.

58. Найти частное решение уравнения $y' + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} y} = 0$, если $y = \frac{\pi}{6}$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

59. Найти частное решение уравнения $y\,dx + \operatorname{ctg} x\, dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi/3) = -1$.

4. Задачи, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

60. Найти уравнение линии, проходящей через точку (1; 3) и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен $2x - 3$ (см. задачу 19).

Решение. Используя условие, составим дифференциальное уравнение:

$$y' = 2x - 3;\ \frac{dy}{dx} = 2x - 3;\ dy = (2x - 3)dx.$$

Найдем общее решение этого уравнения:

$$\int dy = \int (2x - 3)dx;\ y = x^2 - 3x + C.$$

Подставив начальные данные $x = 1$, $y = 3$ в общее решение, получим $C = 5$. Следовательно, частное решение имеет вид $y = x^2 - 3x + 5$.

Семейством интегральных кривых, соответствующих общему решению дифференциального уравнения, являются параболы $y = x^2 - 3x + C$ с вершинами, расположенными на прямой $x = 2/3$. Найденному частному решению соответствует парабола, проходящая через точку (1; 3) и пересекающая ось Oy в точке (0; 5).

61. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (1; 3), если угловой коэффициент касательной к этой кривой в каждой ее точке равен $-2x$.

62. Найти уравнение кривой, обладающей тем свойством, что угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой в 2 раза меньше абсциссы точки.

63. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (-2; $-8/3$), если угловой коэффициент касательной в любой точке этой кривой равен x^2.

64. Решить уравнение $yy' = -0{,}5$. Найти уравнение интегральной кривой, проходящей через точку (0; -2).

65. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/с по истечении t секунд. Определить путь, который пройдет тело за 3 с (см. задачу 20).

Решение. Используя условие, составим дифференциальное уравнение: $\frac{ds}{dt} = 5t^2$, так как скорость $v = \frac{ds}{dt}$.

Найдем общее решение этого уравнения:

$$ds = 5t^2 dt;\ \int ds = 5\int t^2 dt;\ s = \frac{5}{3}t^3 + C.$$

Найдем частное решение этого уравнения. Начальные условия определяются тем, что тело выходит из состояния покоя, т. е. $s = 0$ при $t = 0$. Подставляя эти значения в общее решение, получим $C = 0$. Следовательно, частное решение имеет вид $s = \frac{5}{3}t^3$.

Определим путь, пройденный телом за 3 с:

$$s = \frac{5}{3}\cdot 3^3 = \frac{5}{3}\cdot 27 = 45 \ (\text{м}).$$

66. Составить уравнение движения тела по оси Ox, если оно начало движение из точки $M(4;\ 0)$ со скоростью $v = 2t + 3t^2$.

67. Материальная точка движется так, что скорость ее движения пропорциональна пройденному пути. В начальный момент точка находилась от начала отсчета на расстоянии 1 м, а через 2 с — на расстоянии e м. Найти закон движения материальной точки (см. задачу 21).

Решение. Обозначим скорость движения материальной точки через v. Как известно, скорость равна производной пути по времени, т. е. $v = \frac{ds}{dt}$. По условию, скорость пропорциональна пройденному пути, т. е. $v = \frac{ds}{dt} = ks$, где k — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, дифференциальное уравнение данной задачи имеет вид $\frac{ds}{dt} = ks$. Разделив в нем переменные, получим $\frac{ds}{s} = k\,dt$. Общее решение этого уравнения есть $\ln s = kt + C$.

Найдем частное решение, т. е. из всех возможных движений по этому закону найдем такое, при котором точка в начальный момент удалена на 1 м от начала отсчета. Вообще говоря, расстояние материальной точки от начала отсчета в начальный момент могло быть взято любым, а не обязательно равным 1 м. Этот выбор аналогичен выбору одной кривой из семейства кривых в геометрических задачах.

Используя для определения C начальные условия $t = 0$, $s = 1$, имеем $\ln 1 = k\cdot 0 + C$, откуда $C = 0$. Тогда закон движения можно записать в виде $\ln s = kt$.

Остается неизвестной еще величина k. Ее можно определить из того условия, что через 2 с точка находилась на расстоянии e (e — основание натуральных логарифмов). Следовательно, $\ln e = k\cdot 2$ или $2k = 1$, откуда $k = 1/2$.

Итак, закон движения материальной точки имеет вид $\ln s = t/2$, т. е. $s = e^{t/2}$.

68. Тело движется прямолинейно со скоростью, пропорциональной времени движения. Найти уравнение движения тела, если от начала отсчета времени оно проходит 20 м за 10 с, а 35 м — за 20 с. Какой путь пройдет тело за 1 мин 40 с?

69. Тело, находящееся в состоянии покоя, начинает двигаться со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Найти уравнение движения тела, если от начала отсчета времени оно проходит 10 м за 2 с, а 40 м — за 4 с. Найти путь, пройденный телом за 6 с.

70. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна их количеству в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 ч. Найти зависимость количества бактерий от времени (см. задачу 22).

Решение. Обозначим количество бактерий в момент времени t через $x(t)$, а в начальный момент — через $x_0 = x(0)$; тогда $\frac{dx}{dt}$ — скорость их размножения. По условию, $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx, \text{ или } \frac{dx}{x} = k\,dt.$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим общее решение этого уравнения:

$$\ln x = kt + \ln C; \quad x(t) = Ce^{kt}.$$

Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям $x(0) = x_0$; имеем $x_0 = Ce^{k\cdot 0}$, т. е. $C = x_0$. Значит, $x(t) = x_0 e^{kt}$ — частное решение дифференциального уравнения.

Чтобы найти искомую зависимость, определим коэффициент пропорциональности k. Известно, что $x(5) = 3x_0$ или $3x_0 = x_0 e^{5k}$, т. е. $e^{5k} = 3$, откуда

$$k = \frac{1}{5}\ln 3 = 0{,}2\ln 3$$

и, следовательно,

$$x(t) = x_0 e^{0{,}2t\ln 3} \approx x_0 e^{0{,}22t}.$$

71. В начальный момент $t = 0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

72. Скорость распада радия пропорциональна его количеству в данный момент времени. Найти закон радиоактивного распада, если известно, что через 1600 лет останется половина первоначального количество радия (см. задачу 23).

Решение. Пусть R — количество радия в момент t, а R_0 — его первоначальное количество. Тогда скорость распада радия равна $\frac{dR}{dt}$ и является отрицательной величиной, так как R с возрастанием t убывает. Согласно условию, имеем $\frac{dR}{dt} = -kR$, где k — коэффициент пропорциональности, подлежащий определению.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dR}{R} = -k\,dt; \quad \ln R = -kt + \ln C; \quad \ln R = \ln e^{-kt} + \ln C; \quad \ln R = \ln Ce^{kt}.$$

Таким образом, $R = Ce^{-kt}$ — общее решение уравнения.

Найдем теперь C и k. Для определения произвольной постоянной C воспользуемся начальными условиями $R = R_0$. В начальный момент времени $t_0 = 0$, откуда $R_0 = C$. Поэтому закон распада имеет вид $R = R_0e^{-kt}$.

Для нахождения k используем следующие условия: $R = \frac{1}{2}R_0$ при $t = 1600$; отсюда

$$\frac{1}{2}R_0 = R_0e^{-1600k}, \text{ т. е. } e^{-1600k} = \frac{1}{2}.$$

Прологарифмируем обе части полученного показательного уравнения:

$$-1600k\ln e = \ln\frac{1}{2}; \ -1600k = -\ln 2; \ 1600k = \ln 2; \ k = \frac{\ln 2}{1600} = 0{,}00043.$$

Итак, окончательно получаем $R = R_0e^{-0{,}00043t}$

73. Период полураспада некоторого радиоактивного вещества равен 1000 лет. Какое количество этого вещества останется через 500 лет?

74. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела T и температурой воздуха T_0. Определить закон изменения температуры тела в зависимости от времени, если опыт проводится при $T_0 = 20\,°C$, причем тело за 20 мин охладилось от 100 до 60 °C. (см. задачу 24).

Решение. Скорость охлаждения тела (скорость изменения его температуры) равна производной $\frac{dT}{dt}$ и, следовательно, закон Ньютона можно выразить равенством

$$\frac{dT}{dt} = k(T-20),$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Решая полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, имеем

$$\frac{dT}{T-20} = k\,dt; \ \int\frac{dT}{T-20} = k\int dt; \ \ln(T-20) = kt + \ln C,$$

откуда

$$T = 20 + Ce^{kt}. \tag{4}$$

Для определения C и k воспользуемся условиями задачи: $T = 100°$ при $t = 0$; $T = 60°$ при $t = 20$.

Подставляя эти значения в равенство (4), получим

$$\begin{cases} 100 = 20 + C, \\ 60 = 20 + Ce^{20k}. \end{cases}$$

Отсюда $C = 80$, $e^{20k} = \frac{1}{2}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$. Таким образом,

$$T=20+80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}.$$

Это и есть закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t при указанных условиях.

75. Температура воздуха равна 15 °С. Известно, что за 30 мин тело охлаждается от 90 до 40 °С. Какова будет температура тела через 1 ч после первоначального измерения?

76. Температура воздуха равна 20 °С. Тело охлаждается за 40 мин от 80 до 30 °С. Какую температуру будет иметь тело через 30 мин после первоначального измерения?

77. Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру 70 °С, через 10 мин температура воды стала равной 65 °С, температура окружающей резервуар среды составляет 15 °С. Найти: а) температуру воды в резервуаре через 30 мин от начального момента; б) момент времени, когда температура воды в резервуаре станет равной 20 °С.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Основные понятия

Определение. Уравнение вида $y'+py=q$, где p и q — функции переменной x или постоянные величины, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Замечание. Уравнение называется линейным, так как искомая функция y и ее производная y' входят в это уравнение в первой степени.

78. Даны уравнения:

а) $y'+\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$; б) $y''+2xy=0$; в) $\frac{dy}{dx}+xy^2=(x-3)^2$.

Какие из них являются линейными уравнениями первого порядка, а какие нет и почему?

Решение. Уравнение а) есть линейное уравнение первого порядка, так как y и y' входят в первой степени, а $p=\frac{2}{x+1}$, $q=(x+1)^3$ — функции одной переменной x. Уравнения б) и в) не являются линейными, так как содержат соответственно вторую производную и y^2.

79. Являются ли линейными дифференциальными уравнениями первого порядка следующие уравнения:

а) $y'+\frac{y}{x}=ay^2\ln x$; б) $y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3$; в) $y'-\frac{3}{x}y=x$?

Линейное уравнение может быть одновременно и уравнением с разделяющимися переменными, например $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2}$. В этом случае оно решается как уравнение с разделяющимися переменными.

К уравнениям с разделяющимися переменными относятся линейные уравнения первого порядка без правой части (т. е. при $q=0$). Например, линейные уравнения

$$y'+y\sin 2x=0,\ \frac{dy}{dx}=8y,\ xy'-2y=0$$

могут быть решены сразу разделением переменных и интегрированием.

2. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли

Чтобы решить дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью ($q\neq 0$), нужно свести его к уравнению с разделяющимися переменными.

При решении таких уравнений применяют *метод Бернулли*. Для этого используют подстановку $y=uv$, в результате которой уравнение $y'+py=q$ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$u'+pu=0;\ uv'=q,$$

где u и v — новые функции переменной x.

Одну из этих функций подбирают так, чтобы уравнение, содержащее другую функцию, стало уравнением с разделяющимися переменными.

Рассмотрим решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка на примерах.

80. Решить уравнение $y'-\frac{3}{x}y=x$.

Решение. Это линейное уравнение, так как оно имеет вид $y'+py=q$, где $p=-3/x$, $q=x$. Положим $y=uv$; тогда $y'=u'v+v'u$. Подставив выражения y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v+v'u-\frac{3}{x}uv=x,$$

или

$$u\left(v'-\frac{3}{x}v\right)+u'v=x. \qquad (1)$$

Считая, что неизвестная функция y является произведением двух (также неизвестных) функций u и v, мы тем самым можем одну из этих функций выбрать произвольно. Поэтому приравняем нулю коэффициент при u в уравнении (1):

$$v' - \frac{3}{x} v = 0.$$

Разделяя переменные в полученном уравнении, имеем

$$\frac{dv}{v} = 3\frac{dx}{x};\ \int \frac{dv}{v} = 3\int \frac{dx}{x};\ \ln v = 3\ln x;\ v = x^3.$$

Снова ввиду произвольности в выборе v мы можем не учитывать произвольную постоянную C (точнее — можем приравнять ее нулю).

Найденное значение v подставляем в уравнение (1):

$$u'x^3 = x;\ u' = \frac{1}{x^2};\ du = \frac{1}{x^2}dx;\ \int du = \int \frac{dx}{x^2};\ u = -\frac{1}{x} + C$$

(здесь C писать обязательно, иначе получится не общее, а частное решение).

Тогда окончательно получим $y = uv = \left(C - \frac{1}{x}\right)x^3$.

Замечание. Уравнение (1) можно было записать в эквивалентном виде:

$$v\left(u' - \frac{3}{x}u\right) + uv' = x.$$

Произвольно выбирая функцию u (а не v), мы могли полагать $u' - \frac{3}{x}u = 0$ и т. д. Этот путь решения отличается от предыдущего одной лишь заменой v на u (и следовательно, u на v), так что окончательное значение y оказывается тем же самым.

Общая формула для решения линейных уравнений слишком громоздка и поэтому удобнее в каждом отдельном случае проводить решение линейных уравнений заново.

81. Решить уравнение $y' + y\operatorname{tg}x = \cos^2 x$.

Решение. Это — линейное уравнение, так как оно имеет вид $y' + py = q$, где $p = \operatorname{tg}x$, $q = \cos^2 x$. Пусть $y = uv$; тогда $y' = u'v + v'u$. Подставив выражения y и y' в исходное уравнение, имеем

$$u'v + v'u - uv\operatorname{tg}x = \cos^2 x$$

или

$$u'v + (v' + v\operatorname{tg}x)u = \cos^2 x. \qquad (2)$$

Из двух функций u и v одну можно выбрать произвольно; поэтому определим функцию v так, чтобы множитель при u в уравнении (2) обратился в нуль, т. е. чтобы

$$v' + v\operatorname{tg}x = 0 \text{ или } \frac{dv}{v} + \operatorname{tg}x\,dx = 0,$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} + \int \operatorname{tg}x = 0;\ \ln|v| - \ln|\cos x| = 0;\ v = \cos x$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю).

Подставляя выражение функции v в уравнение (2), для определения u получаем уравнение

$$u'\cos x = \cos^2 x \text{ или } du = \cos x\,dx,$$

откуда

$$\int du = \int \cos x\,dx + C, \text{ т. е. } u = \sin x + C.$$

Так как $y = uv$, то общее решение заданного уравнения примет вид

$$y = (\sin x + C)\cos x.$$

Из рассмотренных примеров легко установить алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

1^0. Приводят уравнение к виду $y' + py = q$.

2^0. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + v'u$ и подставляют эти выражения в уравнение.

3^0. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций v или u за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.

4^0. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.

5^0. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$.

6^0. Если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

82. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1$.

Решение. 1^0. Разделив все члены уравнения на $\cos x$, получим

$$\frac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}.$$

2^0. Полагаем $y = uv$; $y' = \frac{dy}{dx} = u'v + v'u$.

Подставляя выражение y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение, имеем

$$u'v + v'u + uv\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x},$$

или

$$u'v + u(v' + v\,\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos x}. \tag{3}$$

3^0. Полагаем $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$, или $\frac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x$. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\,x\,dx;\ \int \frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx \text{ или } \ln v = \ln\cos x$$

(произвольную постоянную C не пишем); отсюда $v = \cos x$.

4^0. Теперь уравнение (3) примет вид

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x}, \text{ или } \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ или } du = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Интегрируя, находим $\int du = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$, т. е. $u = \operatorname{tg} x + C$.

5^0. Подставляя значения u и v в равенство $y = uv$, получим $y = (\operatorname{tg} x + C)\cos x$, или, окончательно,

$$y = \sin x + C\cos x.$$

83—92. Решить уравнения:

83. $y' + \frac{2y}{x} = x^2 \ (x \neq 0)$.

84. $y' = 2x - 2xy$.

85. $\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$.

86. $y' - \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}$.

87. $\cos x\, dy + y \sin x\, dx = 0$.

88. $\frac{y'}{\sin x} - \frac{y}{\sin x} = 2e^x$.

89. $\frac{y'}{(x+1)^3} - \frac{2y}{(x+1)^4} = 1$.

90. $\frac{y'}{x} - 2y = (1 - x^2)e^{x^2}$.

91. $(1 + x^2)y' - xy = 2x$.

92. $y'x + 2y = x^3 \ (x \neq 0)$.

3. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

93. Найти частное решение уравнения $y' = \frac{2}{x} y = x^4$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1} = \frac{4}{3}$.

Решение. Поскольку данное уравнение является линейным, полагаем $y = uv$ и, следовательно, $y' = u'v + v'u$. Подставляя выражения y и y' в исходное уравнение, имеем

$$u'v + v'u - \frac{2}{x} uv = x^4$$

или

$$u'v + \left(v' - \frac{2}{x} v\right)u = x^4. \qquad (4)$$

Выберем v так, чтобы

$$v' - \frac{2}{3} v = 0, \text{ или } \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x},$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}; \ \ln|v| = 2\ln|x|; \ v = x^2.$$

Подставив выражение v в уравнение (4), для определения u получаем уравнение

$$u'x^2 = x^4 \text{ или } du = x^2 dx,$$

откуда

$$\int du=\int x^2dx, \text{ т. е. } u=\frac{x^3}{3}+C.$$

Поскольку $y=uv$, общее решение заданного уравнения записывается в виде

$$y=\left(\frac{x^3}{3}+C\right)x^2.$$

Теперь, используя начальные условия $y\big|_{x=1}=\frac{4}{3}$, находим C; имеем $\frac{4}{3}=\left(\frac{1}{3}+C\right)\cdot 1$, откуда $C=1$. Следовательно, частное решение заданного уравнения имеет вид

$$y=\left(\frac{x^3}{3}+1\right)x^2 \text{ или } y=\frac{x^5}{3}+x^2.$$

94—101. Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

94. $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos^3 x}$; $y=0$ при $x=0$.

95. $xy'+y=x^2$ $(x\neq 0)$; $y\big|_{x=1}=2$.

96. $y'-2y+3e^{2x}=0$; $y=1$ при $x=0$.

97. $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$; $y=0$ при $x=0$.

98. $xy'-y=x^3$; $y=1/2$ при $x=1$.

99. $y'+2y\operatorname{tg}x=\cos^4 x$; $y=-1$ при $x=0$.

100. $x^2y'+2yx=\sin x$; $y=0$ при $x=\pi$.

101. $xy'+y-2x=0$; $y=2$ при $x=-1$.

4. Линейные дифференциальные уравнения вида $y'+ay=b$ и $y'=ay$

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка, имеющее вид $y'+ay=b$, где a и b — постоянные ($a\neq 0$). Это уравнение решается разделением переменных:

$$\frac{dy}{dx}=b-ay;\quad \frac{dy}{b-ay}=dx.$$

Отсюда

$$\int\frac{dy}{b-ay}=\int dx;\quad -\frac{1}{a}\ln|b-ay|=x+C_1;\quad \ln|b-ay|=aC_1-ax.$$

Освобождаясь от логарифма, получаем окончательный ответ:

$$y=Ce^{-ax}+\frac{b}{a}\left(\text{здесь } C=-\frac{1}{a}e^{aC_1}\right).$$

102. Решить уравнение $y'+2y+3=0$.

Решение. $\frac{dy}{dx}=-(2y+3)$; $\frac{dy}{2y+3}=-dx$; $\int\frac{dy}{2y+3}=-\int dx$;

$\ln|2y+3|=-x+\ln C$; $\ln\frac{2y+3}{C}=-x$,

$\frac{2y+3}{C}=e^{-x}$; $2y+3=Ce^{-x}$, $y=Ce^{-x}-\frac{3}{2}$.

103. Найти частное решение уравнения $y'+3y=1$, если $y=0$ при $x=0$.

104. Найти частное решение уравнения $y'-2y+3=0$, если $y=1$ при $x=0$.

В том случае, когда $b=0$, решениями линейного дифференциального уравнения указанного вида являются показательные функции. Поэтому процессы, описываемые уравнениями вида $y'=ay$, называются *процессами показательного роста.* Если $b\neq 0$ и $a<0$, то всякое решение указанного уравнения с течением времени стремится к числу b/a. Процессы этого вида называют *процессами выравнивания.*

105. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v_0=20$ км/ч. Определить скорость катера через 2 мин после выключения двигателя, если за 40 с она уменьшилась до $v_1=8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

Решение. Пусть скорость движения катера в момент времени t равна v. Тогда на движущийся катер действует сила сопротивления воды $F=-kv$. Согласно закону Ньютона, $F=ma=m\frac{dv}{dt}$ и, следовательно, $m\frac{dv}{dt}=-kv$, или

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{k}{m}v.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением показательного роста; его общее решение имеет вид

$$v(t)=Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Постоянную C найдем из начальных условий $v(0)=20$ км/ч:

$$20=Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0};\ C=20.$$

Итак, скорость движения катера после выключения двигателя определяется формулой

$$v=20e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{5}$$

Найдем значение постоянной $e^{-k/m}$. Для этого воспользуемся тем, что $v=80$ км/ч при $t=40$ с $=1/90$ ч:

$$8=20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}};\ e^{-\frac{k}{m}}=\left(\frac{2}{5}\right)^{90}.$$

Полагая в равенстве (5) $t = 2$ мин $= \frac{1}{30}$ ч, $e^{-k/m} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}$, найдем искомую скорость:

$$v = 20\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{90}\right)^{1/30} = \frac{32}{25} = 1{,}28 \text{ (км/ч)}.$$

5. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка с искомой функцией $x(y)$

Иногда уравнение становится линейным, если y считать независимой переменной, а x — зависимой, т. е. поменять роли x и y. Это можно сделать при условии, что x и dx входят в уравнение линейно.

106. Решить уравнение $y'(y^2 - x) = y$.

Решение. Это уравнение не является линейным относительно неизвестной функции y, так как его нельзя привести к виду $y' + p(x))y = q(x)$. Однако если x считать функцией, а y — аргументом, то это уравнение окажется линейным относительно неизвестной функции x, поскольку его можно привести к виду $x' + p(y)x = q(y)$.

В самом деле, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx}(y^2 - x) = y \quad \text{или} \quad (y^2 - x)\,dy = y\,dx.$$

Разделив обе части последнего уравнения на произведение $y\,dy$, приведем его к виду

$$y - \frac{1}{y}x = x' \quad \text{или} \quad x' + \frac{1}{y}x = y. \qquad (6)$$

Здесь $p(y) = \frac{1}{y}$, $q(y) = y$. Это — линейное уравнение относительно x; поэтому полагаем $x = uv$ (где u и v — функции от y), откуда $\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}v + \frac{dv}{dy}u$.

Подставляя выражения x и $\frac{dx}{dy}$ в уравнение (6), имеем

$$\frac{du}{dy}v + \frac{dv}{dy}u + \frac{1}{y}uv = y \quad \text{или} \quad \frac{du}{dy}v + \left(\frac{dv}{dy} + \frac{1}{y}v\right)u = y.$$

Выберем v так, чтобы

$$\frac{dv}{dy} + \frac{1}{y}v = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y},$$

откуда

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dy}{y}; \ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dy}{y}; \ \ln|v| = -\ln|y|; \ v = \frac{1}{y}.$$

Теперь уравнение (7) примет вид

$$\frac{du}{dy}\cdot\frac{1}{y} = y \quad \text{или} \quad du = u^2 dy,$$

откуда

$$\int du = \int y^2 dy + C, \text{ т. е. } u = \frac{y^3}{3} + C.$$

Так как $x = uv$, то общее решение данного уравнения имеет вид

$$x = \left(\frac{y^3}{3} + C\right)\frac{1}{y}.$$

107. Найти частное решение уравнения $(x+y)y' = 1$, удовлетворяющее начальным условиям $y = 0$ при $x = -1$.

Решение. Это уравнение не является линейным относительно y, так как содержит произведение искомой функции y и ее производной y'. Однако если рассматривать x как функцию от y, то, учитывая, что $y' = 1/x'$, получим линейное уравнение

$$x' = x + y. \tag{8}$$

Применим подстановку $x = uv$; тогда $x' = u'v + uv'$. Подставляя эти выражения в уравнение (8), получим

$$u'v + uv' = uv + y \text{ или } u'v + u(v' - v) = y.$$

Выберем функцию $v \neq 0$ так, чтобы коэффициент при u в последнем уравнении обратился в нуль:

$$v' - v = 0; \ \frac{dv}{dy} - v = 0; \ \frac{dv}{v} = dy.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln v = y; \ v = e^y.$$

Далее, находим

$$e^y \frac{du}{dy} = y; \ du = ye^{-y}dy; \ u = \int ye^{-y}dy = -ye^{-y} - e^{-y} + C.$$

Таким образом, общее решение уравнения есть

$$x = uv = (-ye^{-y} - e^{-y} + C)e^y \text{ или } x = -y - 1 + Ce^y.$$

Полагая $x = -1$ и $y = 0$, получим $-1 = -1 + C$, т. е. $C = 0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y = -(x+1)$.

Решить уравнения:

108. $y'(y^2 - x) = y$. **109.** $y\,dx = (y^3 - x)dy$.

§ 4. Дифференциальные уравнения высших порядков

Понятие о дифференциальном уравнении высшего порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка и его общее решение

Задача Коши для простейшего дифференциального уравнения второго порядка

Задачи, сводящиеся к простейшим дифференциальным уравнениям второго порядка

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Понятие о дифференциальном уравнении высшего порядка

Как было отмечено выше, дифференциальные уравнения принято классифицировать в зависимости от порядка производной, входящей в уравнение.

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

(напомним, что символом $y^{(n)}$ обозначается производная n-го порядка).

Если же уравнение (1) можно разрешить относительно старшей производной (т. е. относительно $y^{(n)}$), то оно примет вид

$$y^{(n)} = \varphi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Общим решением уравнения n-го порядка называется семейство функций $y = f(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, которое при любом наборе произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ удовлетворяет исходному уравнению.

Общее решение дифференциального уравнения должно содержать столько произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения; так, если уравнение имеет первый порядок, то оно должно содержать одну произвольную постоянную. Ниже будут рассмотрены некоторые дифференциальные уравнения второго порядка, общие решения которых содержат две произвольные постоянные.

Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y = f(x)$, получающаяся при подстановке некоторого набора произвольных постоянных $C_1, C_2, \dots, C_n$ в общее решение этого уравнения.

2. Дифференциальное уравнение второго порядка и его общее решение

Уравнение, содержащее производные или дифференциалы второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка.*

Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно y'', имеет вид

$$y'' = f(x, y, y'). \tag{3}$$

Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида

$$y'' = f(x).$$

Такое уравнение решается двукратным интегрированием:

$$\frac{dy'}{dx} = f(x); \quad dy' = f(x)dx,$$

откуда

$$y' = \int f(x)\,dx.$$

Проинтегрировав эту функцию, получим какую-то новую функцию от $f(x)$, которую обозначим через $F(x)$. Таким образом,

$$y' = F(x) + C_1;\ \frac{dy}{dx} = F(x) + C_1;\ dy = (F(x) + C_1)dx.$$

Интегрируем еще раз:

$$y = \int (F(x) + C_1)dx = \int F(x)dx + C_1 \int dx$$

или

$$y = \Phi(x) + C_1 x + C_2.$$

Итак, получили общее решение данного дифференциального уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2.

110. Найти общее решение уравнения $y'' = 4x$.

Решение. Имеем

$$\frac{dy'}{dx} = 4x;\ dy' = 4x\,dx;\ y' = 4\int x\,dx = 2x^2 + C_1;$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + C;\ dy = (2x^2 + C_1)dx;$$

$$y = \int (2x^2 + C_1)dx = 2\int x^2 dx + C_1 \int dx = \frac{2}{3}x^3 + C_1 x + C_2.$$

Полученный результат проверим дифференцированием:

$$y' = \frac{2}{3}\cdot 3x^2 + C_1 = 2x^2 + C_1;\ y'' = 4x.$$

111. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin 2x$.

Решение. Умножим обе части уравнения на dx и затем проинтегрируем:

$$dy' = \sin 2x\,dx;\ \int dy' = \int \sin 2x\,dx;\ y' = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1.$$

Обе части последнего уравнения умножим на dx и проинтегрируем:

$$dy = -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx + C_1 dx;\ \int dy = -\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + C_1 \int dx + C_2.$$

Итак, $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$ — общее решение уравнения.

112—119. Найти общие решения уравнений:

112. $y'' = 0$. **113.** $y'' = 5$.
114. $y'' = x$. **115.** $y'' = 3x$.
116. $y'' = x^3$. **117.** $y'' = \cos x$.
118. $s'' = t + 1$. **119.** $y'' = 18x + 2$.

В общее решение уравнения первого порядка входит одна произвольная постоянная C, а в общее решение уравнения второго порядка — две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Функция $y = \varphi(x, C_1, C_2)$, удовлетворяющая данному уравнению при любых произвольных постоянных, называется его *общим решением*.

3. Задача Коши для простейшего дифференциального уравнения второго порядка

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка состоит в том, чтобы найти решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Так как в функцию $y = \varphi(x, C_1, C_2)$ входят две произвольные постоянные C_1 и C_2, то для выделения из общего решения уравнения некоторого частного решения необходимо иметь два начальных условия: $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y'_0$. Тогда получим

$$\begin{cases} y_0 = \varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y'_0 = \varphi'(x_0, C_1, C_2). \end{cases}$$

Из этой системы можно определить постоянные C_1 и C_2 и тем самым найти частное решение уравнения (3).

120. Найти решение уравнения $y'' = 2$, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $y = 1$ и $y' = 2$ при $x = 0$.

Решение. Интегрируя данное уравнение по x последовательно два раза, сначала получим $y' = 2x + C_1$, а затем $y = x^2 + C_1x + C_2$. Используя теперь начальные условия, имеем

$$\begin{cases} y' = 2x + C_1, \\ y = x^2 + C_1x + C_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = 2\cdot 0 + C_1, \\ 1 = 0 + C_1\cdot 0 + C_2; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 = C_1, \\ 1 = C_2, \end{cases}$$

т. е. $C_1 = 2$, $C_2 = 1$. Следовательно, искомое решение имеет вид $y = x^2 + 2x + 1$ или $y = (x+1)^2$.

Таким образом, для решения дифференциального уравнения вида $y'' = f(x)$ используют следующий алгоритм:

1^0. Интегрируют обе части уравнения и находят $\frac{dy}{dx}$.

2^0. Интегрируя $\frac{dy}{dx}$, находят общее решение, содержащее две произвольные постоянные.

3^0. Если требуется найти частное решение (найти решение задачи Коши), то определяют C_1 и C_2 из начальных условий и подставляют их в общее решение.

121. Решить задачу Коши для уравнения $y'' = 1 + x + x^2 + x^3$, если $y = 1$ и $y' = 1$ при $x = 0$.

Решение. 1^0. $\frac{dy}{dx} = \int (1 + x + x^2 + x^3)\,dx = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C_1.$

2^0. $y = \int \left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + C_1\right) dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{x^5}{20} + C_1x + C_2.$

3^0. Подставив начальные условия $y=1$ и $y'=1$ при $x=0$, получим $C_1=1$, $C_2=1$.

Следовательно, $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{20}+x+1$.

122—127. Решить задачу Коши для уравнений:

122. $y''=0$, если $y=0$ при $x=0$ и $y'=1$ при $x=1$.

123. $s''=t+1$, если $s=2$ и $s'=-11/6$ при $t=0$.

124. $y''=1-2x$, если искомая кривая проходит через точки $(0;\ 1)$ и $(1;\ 1/6)$.

125. $y''=x^2$, если $y=12\frac{3}{4}$ при $x=3$ и $y'=2\frac{1}{3}$ при $x=1$.

126. $y''=\sin x$, если $y=0$ и $y'=2$ при $x=0$.

127. $y''=1-\frac{1}{x^2}$, если $y=-1$ и $y'=1$ при $x=1$.

4. Задачи, сводящиеся к простейшим дифференциальным уравнениям второго порядка

В задачах, решение которых приводит к интегрированию дифференциальных уравнений, используют известные законы физики, механики и других наук.

При решении задач сначала нужно составить дифференциальное уравнение по условию задачи, а затем найти решение этого уравнения по общему правилу.

Напомним, что под скоростью движения в данный момент времени разумеется производная пути по времени, т. е. $v=\frac{ds}{dt}=s'$, а ускорение есть производная скорости по времени или вторая производная пути по времени, т. е. $a=s''_t$.

128. Найти уравнение движения, если точка движется прямолинейно с постоянным ускорением, равным a см/с^2 (под уравнением движения понимается уравнение, устанавливающее зависимость между временем и пройденным путем).

Решение. Согласно условию, имеем уравнение $s''=a$. Интегрируя, получим

$$\frac{ds'}{dt}=a;\ ds'=a\,dt;\ s'=a\int dt=at+C_1.$$

Интегрируем еще раз:

$$\frac{ds}{dt}=at+C_1;\ ds=(at+C_1)dt;\ s=\int(at+C_1)\,dt=\frac{at^2}{2}+C_1t+C_2.$$

Для определения механического смысла произвольных постоянных C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями.

Рассмотрим формулу $s'=at+C_1$. Поскольку $s'=v$, запишем ее в виде $v=at+C_1$; эта формула устанавливает зависимость между временем и скоростью в данный момент времени. Следовательно, она верна в момент начала движения, т. е. при $t=0$ и $v=v_0$. Подставляя эти данные, получаем $v_0=a\cdot 0+C_1$, откуда $C_1=v_0$, т. е. C_1 представляет собой начальную скорость. Теперь подставим это значение в выражение для пройденного пути: $s=\frac{at^2}{2}+v_0t+C_2$. При $t=0$, т. е. в момент начала движения, величина $s=s_0$, т. е. равна начальному пути s_0, с которого производится отсчет.

Итак,

$$s=\frac{at^2}{2}+v_0t+s_0.$$

Это и есть общее уравнение движения тела с постоянной скоростью.

Если $s=0$ и $v_0=0$, то последняя формула принимает вид

$$s=\frac{at^2}{2}$$

и называется формулой пути при равнопеременном движении.

При $a=9{,}8$ м/с^2 получим $s=\frac{9{,}8t^2}{2}=4{,}9t^2$; это — уравнение движения свободно падающего тела в пустоте.

129. Тело движется прямолинейно с ускорением $a=6t-4$. При $t=0$ начальный путь $s_0=0$, начальная скорость $v_0=4$. Найти скорость и пройденный путь как функции времени.

Решение. Согласно условию, имеем $s''=6t-4$. Интегрируя обе части этого уравнения, получим $\frac{ds}{dt}=3t^2-4t+C_1$, т. е. скорость выражена как функция времени.

Интегрируя обе части последнего уравнения, выразим путь как функцию времени:

$$s=t^3-2t^2+C_1t+C_2.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из начальных данных: $v_0=4$ и $s_0=0$ при $t=0$. Подставив эти данные в выражения $\frac{ds}{dt}$ и s, находим $C_1=4$, $C_2=0$.

Тогда скорость тела и пройденный им путь окончательно запишутся в виде $v=3t^2-4t$, $s=t^3-2t^2+4t$.

130. Ускорение брошенного вверх тела постоянно и равно $-g$. Найти уравнение движения, если $s=0$, $v=v_0$ при $t=0$.

131. Ускорение прямолинейного движения тела определяется уравнением $\omega=t^2+1$. Найти закон движения тела, если в момент $t=1$ его скорость $v=2$, путь $s=4$.

132. Ускорение ω материальной точки, движущейся прямолинейно, в зависимости от времени t выражется формулой $\omega=2t+3$. Найти закон движения, если $v=0$ и $s=0$ при $t=0$.

133. Тело движется с ускорением $a=t^2+t$; если $t=0$, то $s=0$, а $v=1$. Найти путь, пройденный телом за 2 с, и скорость к концу 2-й секунды.

5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Прежде чем дать определение нового вида дифференциального уравнения, раскроем подробно его название:

1) дифференциальное уравнение (по определению) обязательно содержит производные или дифференциалы искомой функции;

2) уравнение второго порядка содержит производную, наивысший порядок которой равен 2;

3) это уравнение — линейное относительно искомой функции и ее производных, т. е. содержит их в первой степени;

4) это — уравнение с постоянными коэффициентами; значит, коэффициенты при функции и ее производных являются постоянными величинами.

Учитывая все это, можно сказать, что рассматриваемое уравнение содержит y, y', y'' в первой степени и коэффициенты при них — постоянные величины.

Коэффициент при y'' всегда можно сделать равным единице, полученные при этом коэффициенты при y' и y обозначим через p и q. Тогда получим уравнение вида

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{4}$$

где p и q — постоянные величины, а $f(x)$ — непрерывная функция x.

Если правая часть уравнения (4) равна нулю, т. е.

$$y''+py'+qy=0,$$

то оно называется *уравнением без правой части* (или *однородным уравнением*).

Определение 1. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y''+py'+qy=0, \tag{5}$$

где p и q — постоянные величины.

Напомним, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Для нахождения общего решения этого уравнения рассмотрим следующие теоремы.

▲ **Теорема 1.** *Если функция $y=y_1$ — решение уравнения* (5), *то функция $y=ay_1$, где a — постоянный множитель, также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Так как по условию $y=y_1$ есть решение уравнения $y''+py'-qy=0$, то функция y_1 обращает это уравнение в тождество: $y_1''+py_1'+qy_1=0$.

Пусть $y=ay_1$, где a — постоянный множитель; тогда $y'=ay_1'$ и $y''=ay_1''$. Для того чтобы показать, что функция $y=ay_1$ является решением данного уравнения, подставим в него эту функцию и ее производные; имеем

$$ay_1''+pay_1'+qay_1=0.$$

Вынося a за скобки, получим

$$a(y_1''+py_1'+qy_1)=0.$$

Выражение в скобках равно нулю, так как по условию y_1 — решение уравнения.

Очевидно, что функция ay_1 обращает данное уравнение в тождество, т. е. является его решением, что и требовалось доказать.

▲ **Теорема 2.** *Если функции $y=y_1$ и $y=y_2$ — решения уравнения* (5), *то и функция $y=y_1+y_2$ также является решением этого уравнения.*

При этом y_1 и y_2 называют *частными решениями* уравнения (5).

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 1, подставим функцию $y=y_1+y_2$ и ее производные в данное уравнение и покажем, что оно обращается в тождество. Имеем $y=y_1+y_2$, $y'=y_1'+y_2'$, $y''=y_1''+y_2''$, откуда

$$y_1''+y_2''+p(y_1'+y_2')+q(y_1+y_2)=0.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав члены уравнения, получим

$$(y_1''+py_1'+qy_1)+(y_2''+py_2'+qy_2)=0.$$

Выражения в скобках равны нулю, так как по условию $y=y_1$ и $y=y_2$ — решения уравнения $y''+py'+qy=0$.

Следовательно, функция $y=y_1+y_2$ обращает рассматриваемое уравнение в тождество, а значит, является его решением, что и требовалось доказать.

Определение 2. Два частных решения уравнения $y''+py'+qy=0$ называются *линейно независимыми*, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный множитель, т. е. $y_2\neq ay_1$ ни при каких значениях a.

▲ **Теорема 3.** *Если $y=y_1$ и $y=y_2$ — линейно независимые частные решения уравнения* (5), *то его общее решение имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.*

Доказательство. Воспользуемся результатами двух предыдущих теорем.

Так как $y=y_1$ и $y=y_2$ — решения уравнения (5), то согласно теореме 1 функции C_1y_1 и C_2y_2 также являются решениями этого уравнения. Далее, поскольку C_1y_1 и C_2y_2 — решения уравнения (5), в силу теоремы 2 функция $y=C_1y_1+C_2y_2$ также есть решение этого уравнения, что и требовалось доказать.

Замечание. Если $y_2=ky_1$ (т. е. y_2 и y_1 линейно зависимы), то $y=C_1y_1+C_2y_2=C_1y_1+C_2ky_1=C_3y_1$. Это означает, что решение будет содержать одну произвольную постоянную, тогда как решение дифференциального уравнения второго порядка обязательно должно содержать две произвольные постоянные. Именно поэтому в теореме говорится о линейно независимых частных решениях y_1 и y_2.

Итак, для того чтобы найти общее решение уравнения $y''+ +py'+qy=0$, имеющее вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, нужно найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2.

Эйлер предложил искать частное решение рассматриваемого уравнения в виде $y=e^{kx}$, где k — постоянная величина, которую нужно подобрать. При различных значениях k функции $y=e^{kx}$ будут линейно независимы.

Например, функции $y_1=e^x$ и $y_2=e^{3x}$ являются линейно независимыми.

Чтобы найти значение k, при котором $y=e^{kx}$ окажется решением уравнения $y''+py'+qy=0$, нужно подставить функцию $y=e^{kx}$ и ее производные в это уравнение. Тогда получим $y= =e^{kx}$, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, откуда

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$$

или, вынося e^{kx} за скобки,

$$e^{kx}(k^2+pk+q)=0.$$

Выражение e^{kx} как показательная функция ни при каких значениях x не равна нулю; следовательно, $k^2+pk+q\neq 0$. Из этого уравнения находим два значения k_1 и k_2. Функции $y_1= =e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$ являются частными решениями уравнения $y''+ +py'+qy=0$.

134. Решить уравнение $y''-3y'+2y=0$.

Решение. Подставим функцию $y=e^{kx}$ и ее производные $y'= =ke^{kx}$ и $y''=k^2e^{kx}$ в данное уравнение:

$$k^2e^{kx}-3ke^{kx}+2e^{kx}=0.$$

Выносим e^{kx} за скобки: $e^{kx}(k^2-3k+2)=0$. Так как $e^{kx}\neq 0$, то $k^2-3k+2=0$.

Решаем полученное квадратное уравнение относительно k:

$$k_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2};\quad k_1=1,\ k_2=2.$$

Частные решения данного уравнения таковы: $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$. Общее решение уравнения имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

135. Найти общее решение уравнения $y''-4y'+3y=0$.

Уравнение $k^2+pk+q=0$ называется *характеристическим* для данного дифференциального уравнения. Чтобы получить это уравнение, достаточно заменить y'', y', y соответственно на k^2, k, 1.

Известно, что при решении квадратного уравнения могут получиться корни следующих видов: 1) действительные и различные; 2) действительные и разные; 3) комплексные.

Каждому виду корней квадратного уравнения соответствует свой вид решения дифференциального уравнения.

I случай. Корни k_1 и k_2 — действительные и различные

($D>0$). Функции $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$ являются частными линейно независимыми решениями уравнения $y''+py'+qy=0$. В этом случае общее решение указанного уравнения записывается в виде

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

136. Решить уравнение $y''+2y'-8y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2+2k-8=0$. Здесь $D=p^2-4q=2^2-4\cdot(-8)=4+32=36>0$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Определим их: $k_1=-4$, $k_2=2$.

Находим частные решения данного дифференциального уравнения: $y_1=e^{-4x}$, $y_2=e^{2x}$.

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{2x}.$$

137. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+3y=0$.

138. Найти общее решение уравнения $y''-y'-2y=0$.

139. Показать, что функция $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением уравнения $y''+y'-2y=0$.

140. Найти частное решение уравнений $y''-2y'-3y=0$, если $y=8$ и $y'=0$ при $x=0$.

Решение. Имеем $k^2-2k-3=0$, $D>0$, $k_1=-1$, $k_2=3$; значит, $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{3x}$ — частные линейно независимые решения данного уравнения. Его общее решение имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$$

Далее, находим

$$y'=-C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}.$$

Подставляем начальные данные:

$$8=C_1e^{-1\cdot 0}+C_2e^{3\cdot 0}=C_1+C_2;\ 0=-C_1e^{-1\cdot 0}+3C_2e^{3\cdot 0}=-C_1+3C_2,$$

т. е. $8=C_1+C_2$; $0=-C_1+3C_2$, откуда $C_1=6$ и $C_2=2$.

Итак, искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид $y=6e^{-x}+2e^{3x}$.

141. Найти частное решение уравнения $y''-9y=0$, если $y=2$ и $y'=6$ при $x=0$.

II случай. Корни k_1 и k_2 — действительные и равные ($D=0$).

Одно частное решение имеет вид $y_1=e^{kx}$. Можно доказать, что второе частное решение есть $y_2=xe^{kx}$. Покажем это на примере.

142. Найти линейно независимые частные решения и общее решение уравнения $y''-4y'+4y$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-4k+4=0$ имеет равные корни: $k_1=k_2=2$.

Одно частное решение есть $y_1=e^{2x}$. Покажем, что $y_2=xe^{2x}$. Имеем $y'=e^{2x}+2xe^{2x}$, $y'=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}=4e^{2x}+4xe^{2x}$, откуда

$$4e^{2x}+4xe^{2x}-4(e^{2x}+2xe^{2x})+4xe^{2x}=0,$$

т. е. получили тождество. Следовательно, $y_2=xe^{2x}$ — второе частное решение. Эти два решения линейно независимы. Поэтому общее решение записывается в виде

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

143. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+9y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$ имеет равные корни: $k_1=k_2=3$. Частными линейно независимыми решениями этого уравнения являются функции $y_1=e^{3x}$, $y_2=xe^{3x}$, а общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}=(C_1+C_2x)e^{3x}.$$

144. Найти общее решение уравнения $y''+6y'+9y=0$.

145. Найти общее решение уравнения $y''-10y'+25y=0$.

146. Найти частное решение уравнения $y''-2y'+y=0$, если $y(0)=4$, $y'(0)=2$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет равные действительные корни: $k_2=k_1=1$. Поэтому общим решением данного дифференциального уравнения является функция $y=e^x\times\times(C_1+C_2x)$.

Далее, в равенства $y=e^x(C_1+C_2x)$ и $y'=e^x(C_2x+C_1+C_2)$ подставим начальные условия $y_{(0)}=4$ и $y'_{(0)}=2$. Получим систему уравнений $4=C_1$, $2=C_1+C_2$, из которой определяем $C_2=-2$.

Подставив значения $C_1=4$, $C_2=-2$ в общее решение $y=e^x(C_1+C_2x)$, получим частное решение $y=e^x(4-2x)$.

147. Найти частное решение уравнения $y''-4y'+4y=0$, если $y(0)=3$ и $y'(0)=-1$.

148. Найти частное решение уравнения $y''+6y'+9y=0$, если $y=2$ и $y'=1$ при $x=0$.

III случай. Корни k_1 и k_2 — сопряженные комплексные: $k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$. Частные решения уравнения $y''+py'+qy=0$ можно записать в виде

$$y_1=e^{(a+bi)x};\quad y_2=e^{(a-bi)x}.$$

Обычно их преобразуют так, чтобы избавиться от мнимых величин в показателе степени. Для этого используют формулы Эйлера:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \text{ и } e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

(эти формулы мы принимаем без доказательства). Отсюда

$$e^{(a+bi)x}=e^{ax}\cdot e^{bix}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx),$$
$$e^{(a-bi)x}=e^{ax}\cdot e^{-bix}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx).$$

Общее решение имеет вид

$$y=C_{\text{I}}e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+C_{\text{II}}e^{ax}(\cos bx-i\sin bx).$$

Группируя члены и обозначая $C_1=C_{\text{I}}+C_{\text{II}}$ и $C_2=(C_{\text{I}}-C_{\text{II}})i$, получим

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx),$$

где $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$ — линейно независимые функции, не содержащие мнимых величин.

149. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^2 - 4k + 13 = 0$; $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$.

Запишем общее решение данного уравнения:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

150. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

151. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$.

152. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + 50y = 0$, если $y = 1$ и $y' = 1$ при $x = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 50 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 50} = 1 \pm 7i$. Поэтому общее решение данного уравнения есть

$$y = e^x(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x).$$

Далее, находим

$$y' = e^x(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x) + e^x(-7C_1\sin 7x + 7C_2\cos 7x).$$

Подставив $x = 0$, $y = 1$ в выражение y, получим $C_1 = 1$. Затем, подставив $x = 0$, $y' = -1$, $C_1 = 1$ в выражение y', находим $C_2 = -2/7$.

Итак, искомое частное решение имеет вид

$$y = e^x\left(\cos 7x - \frac{2}{7}\sin 7x\right).$$

153. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' - 5y = 0$, если $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

154. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

155. Найти частное решение уравнения $y'' + 4y' + 7y = 0$, если $y = 1$ и $y' = 1$ при $x = 0$.

На основании рассмотренных примеров получаем алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1^0. Записывают дифференциальное уравнение в виде $y'' + py' + qy = 0$.

2^0. Составляют его характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$.

3^0. Вычисляют дискриминант $D = p^2 - 4q$.

а) Если $D > 0$, то уравнение имеет два разных корня k_1 и k_2, а общее решение записывается в виде

$$y = C_1e^{kx} + C_2e^{k_2x}.$$

б) Если $D = 0$, то уравнение имеет два разных корня $k_1 = k_2$, а общее решение записывается в виде

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}.$$

в) Если $D<0$, то уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2}=a\pm bi$, а общее решение записывается в виде

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx).$$

Для практического использования указанный алгоритм удобно оформить в виде следующей таблицы:

Дифференциальное уравнение	$y''+py'+qy=0$		
Характеристическое уравнение	$k^2+pk+q=0$		
Дискриминант	$D>0$	$D=0$	$D<0$
Корни характеристического уравнения	$k_1\neq k_2$	$k_1=k_2$	$k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$
Множества решений	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$	$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$	$y=e^{ax}(C_1\cos bx+$ $+C_2\sin bx)$

156—179. Найти общие решения уравнений:

156. $y''+3y'=0$. **157.** $y''+24y'+144y=0$.
158. $y''-5y'+6y=0$. **159.** $y''-2y'+3y=0$.
160. $y''+y'+y=0$. **161.** $y''+4y'+4y=0$.
162. $y''+6y'+13y=0$. **163.** $y''-3y'+2y=0$.
164. $y''-2y'+y=0$. **165.** $y''+12y'+36y=0$.
166. $y''-2ay'+a^2y=0$. **167.** $y''-8y'=0$.
168. $y''+10y'-11y=0$. **169.** $y''+14y'+49y=0$.
170. $y''-y'-12y=0$. **171.** $y''-4y'+10y=0$.
172. $y''+49y=0$. **173.** $y''+20y'+19y=0$.
174. $y''-ay=0$. **175.** $y''-4y'+20y=0$.
176. $y''-22y'+121y=0$. **177.** $y''-7y'+10y=0$.
178. $y''-4y'+8y=0$. **179.** $y''+6y'+25y=0$.

180—188. Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

180. $y''+3y'+2y=0$, если $y=-1$, $y'=3$ при $x=0$.
181. $y''+2y'+5y=0$, если $y=1$, $y'=1$ при $x=0$.
182. $y''-4\sqrt{2}y'+6y=0$, если $y=-3$, $y'=\sqrt{2}$ при $x=0$.
183. $y''+4y=0$, если $y(\pi/4)=1$, $y'(\pi/4)=-2$.
184. $y''+4y'+4y=0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.
185. $y''-10y'+25y=0$, если $y(0)=2$, $y'(0)=8$.
186. $y''-y=0$, если $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

187. $y''+2y'-8y=0$, если $y(0)=4$, $y'(0)=-4$.

188. $y''-2y'+y=0$, если $y=4$ и $y'=2$ при $x=0$.

Как было отмечено ранее, геометрически общее решение дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых. Геометрический смысл частного решения состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через данную точку.

189. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''+2y'+2y=0$, проходящую через точку (0; 1) и касающуюся в этой точке прямой $y=x+1$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2+2k+2=0$ — комплексные сопряженные: $-1\pm i$. Уравнение семейства интегральных кривых данного дифференциального уравнения, записывается в виде

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Чтобы найти уравнение искомой интегральной кривой, подставим в равенства

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

и

$$y'=e^{-x}((C_2-C_1)\cos x-(C_2+C_1)\sin x)$$

значения ординаты $y=1$ и углового коэффициента касательной $y'=k=1$ в точке $x=0$. Получим систему уравнений $1=C_1$, $1=C_2-C_1$, из которой определяем $C_1=1$, $C_2=2$. Подставив эти значения в уравнение семейства, получим искомое уравнение

$$y=e^{-x}(\cos x+2\sin x).$$

190. Найти интегральную кривую уравнения $y''-4y'+3y=0$, проходящую через точку (0; 2) и касающуюся в этой точке прямой $y=x+2$.

§ 5. Решения некоторых дополнительных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

1. Сфера применения дифференциальных уравнений

Широкое распространение дифференциальных уравнений в естествознании объясняется тем, что многие явления и процессы, происходящие в природе, количественно описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В настоящее время диапазон применения дифференциальных уравнений очень широк. С их помощью решаются задачи математики, физики, химии, биологии, электротехники, радиоэлектроники, экономики, технологии производства и многих других сфер человеческой деятельности.

Дифференциальные уравнения возникают в тех случаях, когда исследуются процессы, в описании которых используются такие величины, как скорость (быстрота) протекания процесса, изменение скорости и т. п.

С помощью дифференциальных уравнений или систем таких уравнений можно создать математическую модель изучаемого физического, химического или биологического процесса. Решение этих уравнений позволяет предсказать свойства изучаемого явления и прогнозировать конечный результат.

Правда, это возможно лишь в том случае, когда составленное дифференциальное уравнение совершенно точно и полно отражает физическую, химическую или биологическую сущность явления. Составить, а тем более решить такие уравнения удается далеко не всегда. Поэтому часто дифференциальные уравнения оказываются приближенными, описывающими лишь частный случай изучаемого процесса.

2. Составление дифференциального уравнения по условию задачи

Рассмотрим конкретные задачи, решение которых приводит к интегрированию дифференциальных уравнений.

При решении этих задач сначала составляют дифференциальное уравнение, которое затем решают тем или иным способом в зависимости от его типа.

Составление дифференциальных уравнений по условию задачи напоминает составление алгебраических уравнений.

Дифференциальное уравнение задачи составляют по ее условию и в зависимости от этого условия оно получается либо как соотношение между дифференциалами переменных величин, либо как соотношение, содержащее производные неизвестной функции.

При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между дифференциалами переменных можно делать различные допущения, упрощающие задачу и вместе с тем не отражающиеся на результатах.

Например, как и при отыскании дифференциала неизвестной величины, здесь можно небольшой участок кривой считать прямолинейным, небольшой участок поверхности — плоским, переменное движение в течение малого промежутка времени можно рассматривать как равномерное, а всякий физический, химический или технический процесс — как протекающий с неизменной скоростью. При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между производными используют геометрический, физический или механический смысл производной.

Кроме того, при составлении дифференциального уравнения задачи в зависимости от ее условия используют известные законы физики, химии, механики и других наук, в которых выражена зависимость между функцией, аргументом и производной. Например, из механики известно, что скорость, ускорение и путь при прямолинейном движении связаны соотношениями $v = s'_t$, $a = v'_t$, $a = s''_t$. Из электротехники известно, что сила тока есть производная количества электричества q, протекающего через проводник, по времени t, т. е. $\frac{dq}{dt} = f(q, t)$.

Теплоемкость тела равна производной количества теплоты Q по температуре T, т. е. $\frac{dQ}{dT} = f(Q, T)$. Скорость химической реакции определяется изменением количества вещества x за промежуток времени t, т. е. $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$.

Можно использовать формулу силы тока как функции напряжения и времени, т. е. $\frac{dI}{dt} = f(U, t)$ и др.

3. Алгоритм решения задач на составление дифференциальных уравнений

На основании рассмотренных ранее задач на составление дифференциальных уравнений получаем алгоритм решения таких задач:

1^0. Из переменных величин выделяют функцию и аргумент, устанавливают физический смысл функции и ее производной. Затем, используя известные сведения из физики, механики, электротехники и других дисциплин, выражают зависимость между функцией, ее производной и аргументом, т. е. составляют дифференциальное уравнение.

2^0. Определяют, к какому типу относится составленное уравнение и находят его общее решение.

3^0. Если в задаче даны начальные условия, то получают частное решение уравнения.

191. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки в зависимости от времени выражается формулой $a(t) = 6t - 2$. Найти закон движения, если в начальный момент времени $t = 0$ скорость $v = 1$ м/с, а путь $s = 0$.

Решение. 1^0. Закон движения точки выражается функцией $s(t)$. Тогда $v(t) = \frac{ds}{dt}$ — скорость точки; $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение движения. Согласно условию, составим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 2.$$

2^0. Полученное уравнение является простейшим дифференциальным уравнением второго порядка. Понизим его порядок; так как $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$, то

$$\frac{dv}{dt}=6t-2;\ dv=(6t-2)dt;\ v=3t^2-2t+C_1.$$

Отсюда

$$\frac{ds}{dt}=3t^2-2t+C_1;\ ds=(3t^2-2t+C_1)dt;\ s=t^3-t^2+C_1t+C_2.$$

3^0. Используя начальные условия, находим $C_1=1$, $C_2=0$; следовательно, $s=t^3-t^2+t$ — искомый закон движения.

4. Дополнительные задачи на составление дифференциальных уравнений

Перед рассмотрением решений задач данного раздела следует еще раз просмотреть решения задач п. 3 § 1 и п. 4 § 2.

192. Металлический шар, температура которого в начале опыта была равна 12 °С, охлаждается струей воды, имеющей температуру 0°. Через 8 мин шар охладился до 9°. Считая скорость охлаждения пропорциональной разности между температурой тела и температурой охлаждающей среды, определить, в течение какого времени шар охладился до 7°.

Р е ш е н и е. 1^0. Обозначим через T температуру шара, а через t — время, прошедшее после начала опыта. Тогда скорость охлаждения шара есть производная $\frac{dT}{dt}$ (T'_t). Согласно условию, $T'=k(T-0)=kT$, где k — коэффициент пропорциональности.

2^0. Это — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем $\frac{dT}{dt}=kT$, $\frac{dT}{T}=kdt$, откуда $\ln T=kt+\ln C$, или $\ln T=\ln e^{kt}+\ln C$. Наконец, после потенцирования получим

$$T=Ce^{kt}. \qquad (1)$$

3^0. Чтобы найти постоянные C и k, воспользуемся данными задачи: при $t=0$ температура шара $T=12°$, а при $t=8$ она составляет $T=9°$. Заменяя в равенстве (1) t и T их значениями, находим $12=Ce^0$ и $9=Ce^{8k}$. Из первого равенства имеем $C=$ $=12$, а из второго $e^{8k}=0{,}75$. Для нахождения e^k извлечем из обеих частей равенства корень восьмой степени:

$$e^k=\sqrt[8]{0{,}75}=0{,}75^{1/8}.$$

Возведя в степень t обе части этого равенства, имеем

$$e^{kt}=0{,}75^{t/8}.$$

Подставив в равенство (1) вместо C и e^{kt} найденные значения, получим

$$T=12\cdot(0{,}75)^{t/8}. \qquad (2)$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, прологарифмируем по основанию 10 равенство (2):

$$\lg T = \lg 12 + \frac{t}{8}\lg 0{,}75$$

и положим в полученном равенстве $T = 7$:

$$\lg 7 = \lg 12 + \frac{t}{8}\lg 0{,}75.$$

Отсюда окончательно находим

$$t = \frac{8(\lg 7 - \lg 12)}{\lg 0{,}75} = \frac{8(0{,}8451 - 1{,}0792)}{\bar{1}{,}8751} = \frac{-8\cdot 0{,}2341}{-0{,}1249} = \frac{1{,}8728}{0{,}1249} \approx 15 \text{ мин.}$$

193. Сосуд вместимостью 100 л наполнен рассолом, содержащим 10 кг растворенной соли. За 1 мин в него втекает 3 л воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же вместимости, первоначально наполненный водой, из которого избыток жидкости выливается. В какой момент времени количество соли в обоих сосудах окажется одинаковым?

Решение. Пусть в момент времени t (мин) в первом сосуде содержится x (кг) соли и пусть в последующий малый промежуток времени dt количество соли в этом сосуде уменьшится на dx.

За время dt из сосуда вытечет $3dt$ (л) рассола. Концентрация рассола (количество соли в одном литре раствора) в момент t составит $\frac{x}{100}$ (кг/л). Если допустить, что в течение малого промежутка времени dt концентрация рассола останется неизменной, то за это время количество соли уменьшится на $-dx = \frac{x}{100}\cdot 3dt$ (так как $dx < 0$). Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3}{100}dt; \quad \ln x = -0{,}03t + C_1$$

Исходя из начального условия $x = 10$ при $t = 0$, определяем значение постоянной $C_1 = \ln 10$.

Следовательно, зависимость количества соли x в первом сосуде от времени t выражается равенством

$$\ln x = -0{,}03t + \ln 10 \text{ или } x = 10e^{-0{,}03t}. \tag{3}$$

Найдем теперь зависимость количества соли y от времени для второго сосуда. Во втором сосуде концентрация рассола в момент t равна $\frac{y}{100}$ (кг/л). За время dt в него вольется $3dt$ (л) рассола, содержащих $\frac{3x}{100}dt$ (кг) соли, а выльется $3dt$ (л) рассола, содержащих $\frac{3y}{100}dt$ (кг) соли, т. е. за время dt количество соли во втором резервуаре изменится на величину

$$dy = 0{,}03x\,dt - 0{,}03y\,dt \text{ или } dy = 0{,}03(x - y)\,dt.$$

Заменяя в этом уравнении x его выражением из формулы (3), получим линейное уравнение первого порядка

$$dy = 0{,}03(10e^{-0{,}03t} - y)dt; \quad y' + 0{,}03y = 0{,}3e^{-0{,}03t},$$

общий интеграл которого имеет вид

$$y = e^{-0,03t}(C_2 + 0,3t).$$

Значение постоянной C_2 определяем из начальных условий; так как $y=0$ при $t=0$, то $C_2=0$. Следовательно, зависимость количества соли y во втором сосуде от времени t выражается равенством

$$y = 0,3te^{0,03t}.$$

Искомый момент времени, в который количество соли в обоих сосудах станет одинаковым, найдем, полагая $x=y$:

$$10e^{-0,03t} = 0,3te^{-0,03t};\ 10 = 0,3t;\ t = 33\frac{1}{3}\ \text{с}.$$

В этот момент в каждом сосуде окажется по $10/e \approx 3,68$ кг соли.

194. Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. 1^0. Сила тока I представляет собой производную количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t, т. е. $I = \frac{dq}{dt}$. В цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\frac{q}{Q}$, т. е. $E = U - \frac{q}{Q}$. Согласно закону Ома, $I = \frac{E}{R}$.

Теперь можем составить уравнение

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{Q}}{R} \quad \text{или} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{QR} = \frac{U}{R}.$$

2^0. Это — линейное уравнение первого порядка. Его общее решение имеет вид

$$q = Ce^{-\frac{t}{QR}} + UQ.$$

3^0. По условию $q=0$ при $t=0$ и, значит, $0 = C + UQ$, т. е. $C = -UQ$. Таким образом, заряд конденсатора в момент t выражается формулой

$$q = UQ\left(1 - e^{-\frac{t}{QR}}\right).$$

195. В моторной лодке, имеющей начальную скорость $v_0 = 5$ м/с, выключили мотор. При движении лодка испытывает сопротивление воды, сила которой пропорциональна квадрату скорости лодки, причем коэффициент пропорциональности равен $m/50$, где m — масса лодки. Через какой промежуток времени скорость лодки уменьшится вдвое и какой путь пройдет лодка за это время?

Решение. 1^0. Согласно условию, за функцию можно принять путь s, а за аргумент — время t. Используя второй закон Ньютона $F = ma$, получим уравнение

$$ms''_{(t)} = -\frac{m}{50}(s'_{(t)})^2, \quad \text{или} \quad s''_{(t)} = -\frac{1}{50}(s'_{(t)})^2,$$

где знак минус показывает, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению.

2^0. Это — дифференциальное уравнение второго порядка. Понизим его порядок. Так как $s'_{(t)} = v_{(t)}$ и $s''_{(t)} = v'(t)$, то приходим к уравнению первого порядка

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{50}v^2.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dv}{v^2} = -\frac{1}{50}dt; \ \frac{1}{v} = \frac{t}{50} + C_1.$$

3^0. Используя условие $v_0 = 5$ м/с, находим $C_1 = \frac{1}{5}$, откуда $v = \frac{50}{t+10}$. Тогда получим

$$\frac{ds}{dt} = \frac{50}{t+10}; \ ds = \frac{50dt}{t+10}; \ s = 50\ln(t+10) + C_2.$$

Из условия $s = 0$ при $t = 0$ находим $C_2 = -50\ln 10$, откуда

$$s = 50\ln\frac{t+10}{10}.$$

Необходимо определить промежуток времени, в течение которого скорость уменьшится вдвое. Подставляя в формулу для v значение $\frac{1}{2}v_0 = 2{,}5$, находим $2{,}5 = \frac{50}{t+10}$; $t = 10$ с. За это время лодка пройдет путь $s = 50\ln 2 \approx 34{,}5$ (м).

196. Материальная точка массы m притягивается неподвижной точкой O с силой, пропорциональной массе m и расстоянию x от точки O; при этом коэффициент пропорциональности равен ω^2. Найти закон движения.

Решение. 1^0. Из механики известно, что если материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы F, то $F = ma$, т. е. $F = mx''$, где t — время, а x'' — ускорение, вызываемое силой F.

Учитывая, что притягивающая сила F пропорциональна m и x, а также что эта сила при положительном x направлена в сторону его убывания, находим

$$F = -\omega^2 mx.$$

Заменив в этом уравнении F его значением $F = mx''$, получаем уравнение движения:

$$mx'' = -\omega^2 mx, \text{ или } x'' + \omega^2 x = 0.$$

2^0. Решим полученное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $k^2 + \omega^2 = 0$ имеет мнимые корни: $k_1 = \omega i$, $k_2 = -\omega i$. Общим решением является функция

$$x = C_1\cos\omega t + C_2\sin\omega t.$$

Этой зависимости можно придать более простой вид, полагая $C_1 = R\sin\alpha$, $C_2 = R\cos\alpha$, где R и α — постоянные величины. Имеем

$$x = R(\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha).$$

В скобках записано развернутое выражение синуса суммы двух углов ωt и α. В результате получим соотношение

$$x = R\sin(\omega t + \alpha),$$

выражающее закон простого гармонического колебательного движения.

197. Гиря, поддерживаемая спиральной пружиной, приподнята на расстояние b и затем освобождена. Она начинает падать, причем ее ускорение определяется уравнением $g = -p^2 s$, где p — постоянная, а s — расстояние от положения равновесия. Найти уравнение движения.

Решение. Запишем дифференциальное уравнение

$$s'' = -ps, \text{ или } s'' + p^2 s = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $k^2 + p = 0$, $k = \pm pi$, $a = 0$, $b = p$. Таким образом,

$$s = e^0(A\sin pt + B\cos pt), \text{ т. е. } s = A\sin pt + B\cos pt.$$

Для определения произвольных постоянных A и B воспользуемся начальными условиями. При $t = 0$ имеем $s = b$; следовательно,

$$b = A\sin 0 + B\cos 0 = A\cdot 0 + B\cdot 1, \text{ т. е. } b = B.$$

Найдем скорость в данный момент:

$$v = s' = Ap\cos pt - Bp\sin pt$$

и воспользуемся тем, что $v = 0$ при $t = 0$. Имеем

$$0 = Ap\cos 0 + Bp\sin 0;\ 0 = Ap + 0;\ Ap = 0;$$

так как $p \neq 0$, то $A = 0$.

Итак, уравнение движения имеет вид $s = b\cos pt$. Функция $\cos pt$ — периодическая, поэтому и s является периодической функцией; функция s будет периодически то возрастать, то убывать, т. е. гиря будет совершать колебательное движение то вниз, то вверх.

198. К источнику с э.д.с., равной $e(t)$, подключают контур, состоящий из последовательно соединенных катушки, индуктивности L, омического сопротивления R и емкости C (рис. 206). Найти силу тока i в цепи как функцию времени t, если в начальный момент времени сила тока в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

Решение. 1^0. По закону Кирхгофа электродвижущая сила в цепи равна сумме падений напряжения на индуктивности, сопротивления и емкости:

$$e(t) = U_L + U_R + U_C,$$

связанных с силой тока соотношениями

$$U_L = L\frac{di}{dt};\ U_R = Ri;\ U_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt.$$

Заметим, что последнее равенство получается из соотношения между силой тока и зарядом конденсатора: $i = \frac{dq}{dt}$, от

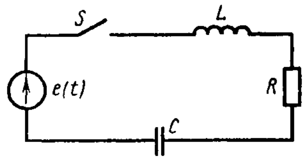


Рис. 206

куда $q=\int\limits_0^t i(t)\,dt+q_0$, а так как $U_C=\frac{q}{C}$, то $U_C=\frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)\,dt+\frac{q_0}{C}$.
В данной задаче $q_0=0$ по условию.

Таким образом, получаем уравнение

$$e(t)=L\frac{di}{dt}+R_i+\frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)\,dt.$$

2^0. Это уравнение — интегрально-дифференциальное. Продифференцировав его по t, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}\left(\frac{di}{dt}=i',\ \frac{d^2i}{dt^2}=i''\right).$$

Здесь возможны два случая: 1) $e(t)=\text{const}$; 2) $e(t)=E\sin\omega t$.

Рассмотрим первый случай. Здесь $\frac{de}{dt}=0$. Тогда получим однородное уравнение

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}\cdot i=0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2+\frac{R}{L}r+\frac{1}{LC}=0$$

имеет корни

$$r_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}.$$

Если $R^2C-4L\geqslant 0$, то корни характеристического уравнения — действительные и общее решение есть функция непериодическая. Соответственно апериодической является и сила тока. Никаких электрических колебаний в цепи не произойдет.

Если же $R^2C-4L<0$, то общее решение

$$i=e^{-\delta t}\cdot(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t),$$

где положено $\delta=\frac{R}{2L}$, $\omega^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$, определяет электрические колебания.

3^0. Так как $L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=E$, то $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{E}{L}$. Следовательно, начальные условия можно записать в виде

$$i\Big|_{t=0}=0;\ \frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{E}{L}.$$

Дифференцируя i по t, имеем

$$\frac{di}{dt}=e^{-\delta t}\cdot(-\delta(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)+\omega(-C_1\sin\omega_1 t+C_2\cos\omega_1 t)).$$

Подставив $t=0$ в выражения для i и $\frac{di}{dt}$, получим $0=C_1$, $\frac{E}{L}=$ $=-\delta C_1+\omega_1 C_2$, откуда $C_1=0$ и $C_2=\frac{E}{L\omega}$.

Итак, частное решение уравнения принимает вид

$$i=\frac{E}{L\omega_1}\cdot e^{-\delta t}\cdot \sin\omega_1 t.$$

Замечание. При рассмотрении второго случая получается линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=E\omega\cos\omega t,$$

которое в данном пособии не рассматривается.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Приведите примеры.

2. Какие из следующих уравнений являются дифференциальными:
а) $yy'+2=0$; б) $2y^2+3y=0$; в) $3^y+y=3$;
г) $y^2+y''=y$; д) $\frac{dv}{dt}=3v$; е) $v^3=2v+v^2$?

3. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?

4. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое — частным?

5. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?

6. Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?

7. Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?

8. Определите порядок следующих дифференциальных уравнений:
а) $y''+2y'=0$; б) $y'-y\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos x}$;
в) $y''+y'''=y'$; г) $xyy'+x^2-2y^2=0$.

9. Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого порядка? третьего порядка?

10. Может ли функция $y=C_1x+C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, быть общим решением дифференциального уравнения первого порядка?

11. Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения или нет?

12. Проверьте, является ли решением дифференциального уравнения $y'\operatorname{ctg}x+y=2$ функция $y=\cos x+2$.

13. Определите, какие из указанных функций являются решениями, общими решениями уравнения $y'=y$: а) $y=e^{2x}$; б) $y=e^x$; в) $y=e^x+C$; г) $y=Ce^x$.

14. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического уравнения?

15. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.

16. Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными и с разделяющимися переменными?

17. Как решается уравнение с разделенными переменными?

18. Чем отличается уравнение с разделяющимися переменными от уравнения с разделенными переменными? Как разделяют переменные?

19. Можно ли считать, что уравнение с разделенными переменными является частным случаем уравнения с разделяющимися переменными?

20. В какой последовательности решают дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными?

21. Решите уравнения: а) $(x+5)dy=y\,dx$; б) $y'=2\sqrt{y}$; в) $y'\operatorname{tg}x-y=a$.

22. В чем заключается задача Коши? Каков его геометрический смысл?

23. Найдите уравнение линии, проходящей через точку $M(3;\ 4)$ и такой, что ее угловой коэффициент касательной равен отношению абсциссы к ординате.

24. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка? Как для них формулируется задача Коши?

25. Какие из следующих уравнений являются линейными: а) $yy'' = x$; б) $(t-1) = ss' = 0$; в) $y' - \frac{y}{x} = x$?.

26. Какими величинами являются и от чего зависят коэффициенты p и q в линейном дифференциальном уравнении первого порядка?

27. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

28. Решите уравнение $y' + \frac{2y}{x} = x^3$.

29. Какой вид имеет простейшее дифференциальное уравнение второго порядка? Как оно решается?

30. Определите, какая из указанных функций является общим решением дифференциального уравнения $y'' = 2x$:

а) $y = 2x^3 + C_1x + C_2$; б) $y = x^3 + C_2$;

в) $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$; г) $y = x^3 + x$.

31. Запишите задачу Коши для уравнения $y'' = f(x)$.

32. Решите уравнения: а) $y'' = -2x$; б) $y'' = \cos 2x$; в) $y'' = e^{-x/2}$.

33. Как определяется и как записывается в общем виде линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?

34. Что такое характеристическое уравнение?

35. Известно, что $y_1 = e^x$ и $y_2 = 2e^x$ являются решениями уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Можно ли утверждать, что $y = C_1e^x + 2C_2e^x$ — общее решение этого уравнения?

36. Известно, что $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$ — решения уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Можно ли утверждать, что $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ — общее решение данного уравнения?

37. Какой вид имеет общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения: а) действительные и различные ($k_2 \neq k_1$); б) действительные и равные ($k_2 = k_1 = k$); в) комплексные сопряженные ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)?

38. Решите уравнения: а) $y'' + 4y' + 3y = 0$; б) $y'' + 8y' + 16y = 0$; в) $y'' + 9y = 0$.

39. Решите следующие уравнения. Перед решением следует определить, к какому виду оно относится, и перечислить его отличительные признаки:

а) $(1+x)y\,dx + (1-y)x\,dy = 0$; б) $(x+y)dx + x\,dy = 0$;

в) $y'' - y = 0$; г) $x^2\frac{dy}{dx} = 2xy + 3$;

д) $y'' + y = 0$; е) $y'' - 7y' + 12y = 0$.

40. Каков порядок решения задач на составление дифференциальных уравнений?

41. Тело движется со скоростью $v = \frac{1}{t+2}$. Найдите уравнение движения, если $s = 0$ при $t = 0$.

42. Угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке задан функцией $\cos x$. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку $(0;\ 0)$.

43. Ускорение прямолинейного движения материальной точки задано уравнением $a = 6t - 4$. Найдите уравнение движения точки, если $s = 5$ м, $s' = 6$ м/с при $t = 2$с.

44. Составьте уравнение линии, проходящей через точку $A(1;\ 0)$ и имеющей касательную, угловой коэффициент которой в каждой точке равен 2.

45. Тело, температура которого 25 °С, погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0 °С. Зная, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и окружающей среды, определите, за какое время тело охладится до 10 °С, если за 20 мин оно охлаждается до 20 °С.

Ответы

2. Уравнения а) и г). 8. Уравнения б), г) — первый, а) — второй, в) — третий. 10. Нет, так как в общем решении дифференциального уравнения первого порядка содержится одна произвольная постоянная. 12. Да. 13. Функция б) — частное решение, функция в) — общее решение. 21. а) $y = C(x+5)$; б) $y = (x+C)^2$; в) $y = C\sin x - a$. 23. $y^2 - x^2 = 2C$. 25. Уравнения б) и в). 28. $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x}$. 30. Функция в). 32. а) $y = -\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$; б) $y = -\frac{1}{4} \times \cos 2x + C_1x + C_2$; в) $y = 4e^{-x/2} + C_1x + C_2$. 38. а) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$; б) $y = e^{-4x}(C_1 + C_2x)$; в) $y = C_1\sin 3x + C_2\cos 3x$. 39. а) $\ln xy + x - y = C$; б) $x^2 + 2xy = C$; в) $y = C_1 + C_2e^x$; г) $y = Cx^2 - \frac{1}{x}$; д) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; е) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$ 41. $s = \ln\left(\frac{t}{2} + 1\right)$. 42. $y = \sin x$. 43. $s = t^3 - 2t^2 - 2t + 1$. 44. $y = 2x + 2$. 45. 82 мин.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Решите уравнение $y\operatorname{tg} x + dy = 0$.
2. Найдите общее решение уравнения $xy' = y + 1$.
3. Найдите частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, если $y = 2$, $y' = 3$ при $x = 0$.
4. Скорость прямолинейного движения материальной точки выражается формулой $v = 3 + 4t$. Найдите уравнение движения точки, если $s = 10$ м при $t = 1$ с.

Вариант 2

1. Решите уравнение $y' + 2x^2y' + 2xy - 2x = 0$.
2. Найдите общее решение уравнения $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$.
3. Найдите частное решение уравнения $y'' - 6y' + 13 = 0$, если $y = 0$, $y' = 5$ при $x = 0$.
4. Ускорение прямолинейного движения материальной точки выражается формулой $a = 12t + 4$. Найдите уравнение движения точки, если $s = 1$ м, $v = 4$ м/с при $t = 1$ с.

Ответы

Вариант 1. 1. $y = C\cos x$. 2. $y = Cx - 1$. 3. $y = e^{2x} - 1$. 4. $2t^2 + 3t + 5$.
Вариант 2. 1. $(1-y)\sqrt{1+2x^2}$. 2. $y = (x^2 + C)\sin x$. 3. $y = e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x)$. 4. $s = 2t^3 + 2t^2 - 6t + 3$.

Глава VII
Элементы теории вероятностей

§ 1. Основные понятия комбинаторики

Понятие факториала
Перестановки
Размещения
Сочетания

В разделе математики, который называется комбинаторикой, решаются некоторые задачи, связанные с рассмотрением множеств и составлением различных комбинаций из элементов этих множеств. Например, если взять 10 различных цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9 и составлять из них комбинации, то будем получать различные числа, например, 345, 534, 1036, 5671, 45 и т. п.

Мы видим, что некоторые из таких комбинаций отличаются только порядком цифр (например, 345 и 534), другие — входящими в них цифрами (например, 1036 и 5671), третьи различаются и числом цифр (например, 345 и 45).

Таким образом, полученные комбинации удовлетворяют различным условиям. В зависимости от правил составления можно выделить три типа комбинаций: перестановки, размещения, сочетания. Рассмотрим их отдельно. Однако предварительно познакомимся с понятием факториала.

1. Понятие факториала

Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно называют *n-факториалом* и пишут

$$n! = 1\cdot2\cdot3...(n-1)n.$$

1. Вычислить: а) $3!$; б) $7!-5!$; в) $\frac{7!+5!}{6!}$.

Решение. а) $3!=1\cdot2\cdot3=6$.

б) Так как $7!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7$ и $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$, то можно вынести за скобки 5! Тогда получим

$$5!(6\cdot7-1)=5!\cdot41=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot41=120\cdot41=4920.$$

в) $\frac{5!(6\cdot 7+1)}{6!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 43}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=\frac{43}{6}$.

2. Упростить: а) $\frac{(n+1)!}{n!}$; б) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$; в) $\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}$.

Решение. а) Учитывая, что $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3...n(n+1)$, а $n!=$ $=1\cdot 2\cdot 3...n$, сократим дробь; $\frac{(n+1)!}{n!}=n+1$.

б) Так как $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3...(n-1)n(n+1)$, то после сокращения получим $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=n(n+1)$.

в) Имеем $(n+1)!=1\cdot 2\cdot 3...n(n+1)$, $n!=1\cdot 2\cdot 3...n$. Приведем дробь к общему знаменателю, за который примем $(n+1)!$. Тогда получим

$$\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{n!}=\frac{1+(n+1)}{(n+1)!}=\frac{n+2}{(n+1)!}.$$

3—5. Вычислить:

3. $\frac{6!-4!}{3!}$. **4.** $\frac{5!}{3!+4!}$. **5.** $\frac{5!\cdot 3!}{6!}$.

6—11. Упростить выражения:

6. $\frac{(n+1)!}{n}$. **7.** $\frac{n!}{n(n-1)}$. **8.** $\frac{(n-1)!}{(n+2)!}$.

9. $\frac{n!}{(n-2)!}$. **10.** $\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$. **11.** $\frac{1}{(k-1)!}-\frac{1}{k!}$.

2. Перестановки

Пусть даны три буквы A, B, C. Составим все возможные комбинации из этих букв: ABC; ACB; BCA; CAB; CBA; BAC (всего 6 комбинаций). Мы видим, что они отличаются друг от друга только порядком расположения букв.

Комбинации из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называются *перестановками*.

Перестановки обозначаются символом P_n, где n — число элементов, входящих в каждую перестановку.

Число перестановок можно вычислить по формуле

$$P_n=n(n-1)(n-2)...3\cdot 2\cdot 1 \qquad (1)$$

или с помощью факториала:

$$P_n=n! \qquad (2)$$

Так, число перестановок из трех элементов согласно формуле (2) составляет $P_3=3!=3\cdot 2\cdot 1=6$, что совпадает с результатом рассмотренного выше примера.

Действительно, на первое место в комбинации (перестановке) можно поставить три буквы. На второе место уже можно поставить только две буквы из трех (одна заняла первое место), а на третьем окажется только одна из оставшихся. Значит, $3\cdot 2\cdot 1=$ $=6=P_3$.

12. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна цифра в числе не повторяется?

13. В соревнованиях участвовало четыре команды. Сколько вариантов распределения мест между ними возможно?

14—16. Вычислить:

14. $\frac{P_6 - P_5}{5!}$. **15.** $\frac{P_{20}}{P_4 P_{16}}$. **16.** $\frac{P_x}{P_{(x-2)} P_2}$.

3. Размещения

Пусть имеются четыре буквы A, B, C, D. Составив все комбинации только из двух букв, получим:

$$\begin{gathered} AB,\ AC,\ AD; \\ BA,\ BC,\ BD; \\ CA,\ CB,\ CD; \\ DA,\ DB,\ DC. \end{gathered}$$

Мы видим, что все полученные комбинации отличаются или буквами, или их порядком (комбинации BA и AB считаются различными).

Комбинации из m элементов по n элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами или порядком элементов, называются *размещениями.*

Размещения обозначаются символом A_m^n, где m — число всех имеющихся элементов, n — число элементов в каждой комбинации. При этом полагают, что $n \leqslant m$. Число размещений можно вычислить по формуле

$$A_m^n = \underbrace{m(m-1)(m-2)\ldots,}_{n \text{ множителей}} \tag{3}$$

т. е. число всех возможных размещений из m элементов по n равно произведению n последовательных целых чисел, из которых большее есть m.

Так, $A_4^2 = 4 \cdot 3 = 12$, что совпадает с результатом приведенного примера: поскольку число строк соответствует числу всех имеющихся букв, т. е. $m = 4$, а число столбцов равно 3, всего имеется 12 различных комбинаций.

17. Вычислить: а) A_6^3; б) $\frac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5}$.

Решение. а) $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

б) Так как $A_{15}^3 = 15 \cdot 14 \cdot 13$, $A_{15}^4 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$, $A_{15}^5 = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \times$ $\times 11$, то

$$\frac{A_{15}^3 + A_{15}^4}{A_{15}^5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 + 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13(1+12)}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{13}{132}.$$

18. Сколько двузначных чисел можно составить из пяти цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии, что ни одна из них не повторяется?

Решение. Так как двузначные числа отличаются друг от друга или самими цифрами, или их порядком, то искомое количество равно числу размещений из пяти элементов по два: $A_5^2=5\cdot 4=20$. Итак, можно составить 20 различных двузначных чисел.

При нахождении числа размещений мы перемножаем n последовательно убывающих целых чисел, т. е. до полного факториала не хватает $(m-n)$ последовательно убывающих целых множителей.

Поэтому формулу числа размещений можно записать в виде

$$A_m^n=\frac{\overbrace{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n)(m-n-1)\ldots 2\cdot 1}^{m\ \text{множителей}}}{(m-n)(m-n-1)\ldots 2\cdot 1}.$$

Отсюда, учитывая, что числитель равен $m!$, а знаменатель равен $(m-n)!$, запишем эту формулу в факториальной форме:

$$A_m^n=\frac{m!}{(m-n)!}. \qquad (4)$$

19. Вычислить в факториальной форме A_6^3.

Решение. $A_6^3=\frac{6!}{(6-3)!}=6\cdot 5\cdot 4=120.$

20—25. Вычислить любым способом:

20. A_{10}^3. **21.** A_{12}^5. **22.** A_6^4.

23. A_{25}^2. **24.** A_{13}^5. **25.** $\frac{A_8^5-A_8^4}{A_8^3}$.

26. Сколько существует вариантов распределения трех призовых мест, если в розыгрыше участвуют 7 команд?

27. Сколько различных четырехзначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, ..., 8, 9?

28. Сколько вариантов расписания можно составить на один день, если всего имеется 8 учебных предметов, а в расписание на день могут быть включены только три из них?

29. Сколько вариантов распределения трех путевок в санатории различного профиля можно составить для пяти претендентов?

4. Сочетания

Сочетаниями называются все возможные комбинации из m элементов по n, которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом (здесь m и n — натуральные числа, причем $n\leqslant m$).

Так, из четырех различных букв A, B, C, D можно составить следующие комбинации, отличающиеся друг от друга хотя бы одним элементом: AB, AC, AD, BC, BD, CD. Значит, число сочетаний из четырех элементов по два равно 6. Это кратко записывается так: $C_4^2=6$.

В каждой комбинации сделаем перестановки элементов:

$$AB,\ AC,\ AD,\ BC,\ BD,\ CD;$$
$$BA,\ CA,\ DA,\ CB,\ DB,\ DC.$$

В результате мы получили размещения из четырех элементов по два. Следовательно, $C_4^2 P_2 = A_4^2$, откуда $C_4^2 = \frac{A_4^2}{P_2}$.

В общем случае число из m элементов по n равно числу размещений из m элементов по n, деленному на число перестановок из n элементов:

$$C_m^n = \frac{A_m^n}{P_n}. \tag{5}$$

Используя для чисел размещений и перестановок факториальные формулы $A_m^n = \frac{m!}{(m-n)!}$ и $P_n = n!$, получим формулу числа размещений в виде

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!}. \tag{6}$$

30. Вычислить: а) C_8^3; б) C_{10}^8.

Решение. а) Применяя формулу (6) при $m = 8$, $n = 3$, находим

$$C_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!3!} = \frac{8!}{5!3!} = \frac{5!6\cdot7\cdot8}{5!3\cdot2\cdot1} = 56.$$

б) $C_{10}^8 = \frac{10!}{(10-8)!\cdot8!} = \frac{10!}{2!\cdot8!} = \frac{8!9\cdot10}{1\cdot2\cdot8!} = 45.$

Отметим основное свойство числа сочетаний:

$$C_m^n = C_m^{m-n}. \tag{7}$$

Действительно,

$$C_m^n = \frac{m!}{(m-n)!n!},\quad C_m^{m-n} = \frac{m!}{(m-m+n)!(m-n)!} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Мы видим, что правые части этих равенств равны; следовательно, равны и левые части.

Это свойство числа сочетаний позволяет упростить нахождение числа сочетаний из m элементов по n, когда n превосходит $\frac{1}{2}m$.

31. Сколькими способами можно выбрать трех дежурных, если в классе 30 учащихся?

32. Сколькими способами можно выбрать двух человек в президиум, если на собрании присутствует 78 человек?

33. Найти x, если известно, что $C_{x-2}^2 = 21$.

34. Найти x, если $C_x^2 = 153$.

35. Сколькими способами можно заполнить лотерейный билет «5 из 36»?

36. Сколькими способами можно составить дозор из трех солдат и одного офицера, если имеется 80 солдат и 3 офицера?

§ 2. Основные понятия теории вероятностей

1. Предмет теории вероятностей

В своей практической деятельности мы часто встречаемся с явлениями, исход которых невозможно предсказать, результат которых зависит от случая. Так, стрелок, участвуя в данных соревнованиях, может попасть или не попасть в мишень. Однако в серии, например, из ста выстрелов, проведенных в одних и тех же условиях (одна и та же винтовка, одинаковое расстояние до мишени, одинаковая погода и т. д.), мы говорим о том, что в среднем у него 92 попадания (и, значит, около 8 неудачных). Конечно, не в каждой сотне выстрелов окажется 92 удачных; иногда их будет 90 или 91, иногда 93 или 94; иногда число их может оказаться даже заметно меньше или заметно больше, чем 92; вместе с тем в среднем, при многократном повторении стрельбы в тех же условиях, это число попаданий будет оставаться неизменным.

Случайное явление можно охарактеризовать отношением числа его наступлений к числу испытаний, в каждом из которых при одинаковых условиях всех испытаний оно могло наступить или не наступить.

Теория вероятностей есть раздел математики, в котором изучаются случайные явления (события) и выявляются закономерности при массовом их повторении.

Для того чтобы записывать и исследовать эти закономерности, введем некоторые основные понятия и определения.

2. Основные понятия и определения

Всякое действие, явление, наблюдение с несколькими различными исходами, реализуемое при данном комплексе условий, будем называть *испытанием*.

Например, многократное подбрасывание монеты, процесс изготовления какой-либо детали представляют собой испытания.

Результат этого действия или наблюдения будем называть *случайным событием*. Например, появление цифры при подбрасывании монеты является случайным событием, поскольку оно могло произойти или не произойти.

Если нас интересует какое-либо определенное событие из всех возможных событий, то будем называть его *искомым событием* (или искомым исходом).

Все рассматриваемые события будем считать *равновозможными*, т. е. такими, которые имеют равные возможности произойти. Так, при бросании кости могут появиться 1 очко, 2, 3, 4, 5 или 6 очков и эти исходы испытания являются равновозможными. Иными словами, равновозможность означает равноправность, симметрию отдельных исходов испытаний при соблюдении некоторых условий.

События принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита: A, B, C, D.

События называются *несовместными*, если никакие два из них не могут произойти в данном опыте вместе. В противном случае события называются *совместными*.

Так, при подбрасывании монеты появление цифры исключает одновременное появление герба; это — пример несовместных событий.

Рассмотрим другой пример. Пусть на мишени нарисованы раздельно круг, ромб и треугольник. Произведен один выстрел. Событие A — попадание в круг, событие B — попадание в ромб, событие C — попадание в треугольник. Тогда событие A и B, A и C, C и B являются несовместными.

Событие называется *достоверным*, если оно происходит в данном испытании обязательно.

Например, выигрыш по билету беспроигрышной лотереи есть событие достоверное.

Достоверные события обозначаются буквой U.

Событие называется *невозможным*, если оно в данном опыте не может произойти.

Например, при бросании игральной кости невозможно получить 7 очков.

Невозможное событие обозначается буквой V.

Полной системой событий A_1, A_2, A_3, ..., A_n называется совокупность несовместных событий, наступление хотя бы одного из которых обязательно при данном испытании.

Так, выпадение одного, двух, трех, четырех, пяти, шести очков при бросании игральной кости есть полная система событий, поскольку все эти события несовместны и наступление хотя бы одного из них обязательно.

Если полная система состоит из двух несовместимых событий, то такие события называются *противоположными* и обозначаются A и $\bar{A}$.

37. Имеется один билет лотереи «6 из 45». Событие A состоит в том, что он выигрышный, а событие B — в том, что он невыигрышный. Являются ли эти события несовместными?

38. В коробке находится 30 пронумерованных шаров. Установить, какие из следующих событий являются невозможными, достоверными, противоположными: достали пронумерованный шар (A); достали шар с четным номером (B); достали шар с нечетным номером (C); достали шар без номера (D). Какие из них образуют полную группу?

39. Являются ли достоверными или невозможными события, состоящие в том, что при однократном бросании кости выпадет: 5 очков; 7 очков; от 1 до 6 очков? Какие события в этом испытании составляют полную группу?

3. Относительная частота события

Пусть производится некоторое испытание и A — случайное событие, которое может произойти или не произойти в этом испытании.

Если произведено N одинаковых испытаний и M — число испытаний, в котором событие A произошло, то отношение M/N называется *частотой* наступления события A в данной последовательности испытаний.

Частота случайна и зависит от числа N всех испытаний.

Если N достаточно велико, то при его дальнейшем увеличении частота обычно меняется мало, т. е. становится статистически устойчивой.

Случайные события со статистически устойчивой частотой широко распространены в физике, биологии, экономике и других областях знаний.

Статистически устойчивая частота позволяет объективно расценить вероятность наступления события A. Понятие вероятности связано в испытании с опытным понятием статистически устойчивой частоты, а формула $M/N \approx P(A)$ выражает статистический подход к определению понятия вероятности.

4. Определение вероятности события

Пусть имеется 100 деталей, из которых 97 стандартных и 3 бракованных. Очевидно, что если взять одну деталь, то событие A, состоящее в том, что эта деталь стандартная, и событие B, состоящее в том, что она бракованная, не равновозможны. Событие A более возможно, более вероятно, чем событие B.

Число, являющееся выражением меры объективной возможности наступления события, называется *вероятностью* этого события и обозначается символом $P(A)$.

Определение. *Вероятность* события A равна отношению числа m исходов испытаний, благоприятствующих наступлению события A, к общему числу n всех равновозможных несовместных исходов, т. е.

$$P(A) = m/n.$$

Следовательно, для нахождения вероятности события необходимо, рассмотрев различные исходы испытания, подсчитать все возможные несовместные исходы n, выбрать число интересующих нас исходов m и вычислить отношение m к n.

Так, в приведенном выше примере событие A — деталь стандартная; событие B — деталь бракованная; общее число деталей равно 100. Поэтому $P(A)=97/100$; $P(B)=3/100$.

Из этого определения вытекают следующие свойства:

1. *Вероятность любого события есть неотрицательное число, не превосходящее единицы.*

Действительно, число m искомых событий заключено в пределах $0\leqslant m\leqslant n$. Разделив обе части неравенства на n, получим $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

2. *Вероятность достоверного события равна единице,* так как $n/n=1$.

3. *Вероятность невозможного события равна нулю, поскольку* $0/n=0$.

40. Бросают игральную кость. Найти вероятность того, что: а) выпадет четное число очков (событие A); б) выпадет число очков, кратное 3 (событие B); в) выпадет любое число очков, кроме 5 (событие C).

Решение. а) На гранях игральной кости имеются три четные цифры (2, 4 и 6), т. е. число искомых исходов $m=3$. Число всех возможных исходов равно 6 (выпадет любое число очков от 1 до 6). Значит, $P(A)=3/6=1/2$.

б) Здесь имеются две цифры, кратные трем: 3 и 6. Следовательно, $m=2$, а число всех возможных исходов $n=6$, откуда $P(B)=2/6=$ $=1/3$.

в) Искомыми исходами являются цифры 1, 2, 3, 4, 6 — всего их пять ($m=5$). Число всех возможных исходов $n=6$. Поэтому $P(C)=$ $=5/6$.

41. В партии из 100 деталей имеется 5 бракованных. Определить вероятность того, что взятая наудачу деталь окажется стандартной.

42. Выбирают наугад число от 1 до 100. Определить вероятность того, что в этом числе не окажется цифры 3.

43. Найти вероятность того, что наугад выбранное число от 1 до 60 делится на 60.

44. Даны 5 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Найти вероятность того, что, выбрав наугад две точки, учащийся получит нужную прямую.

Решение. Пусть событие A — выбор искомой прямой. Число всех возможных исходов равно количеству прямых, проходящих через заданные пять точек. Так как прямая определяется парой точек и порядок точек внутри этой пары не имеет значения, то каждая пара должна отличаться хотя бы одной точкой. Следовательно, мы должны найти число сочетаний из пяти элементов по два, т. е.

$$n=C_5^2=\frac{5!}{(5-2)!2!}=\frac{5!}{3!2!}=10.$$

Значит, число всех возможных пар точек равно 10, а искомой является только одна пара точек; поэтому $P(A)=1/10$.

45. В классе 17 девочек и 14 мальчиков. Определить вероятность того, что оба вызванных ученика окажутся: а) мальчиками; б) девочками.

46. В семизначном телефонном номере забыта последняя цифра. Определить вероятность того, что наугад выбранная цифра (от 0 до 9) окажется верной.

47. Из коробки, содержащей n пронумерованных шаров, наугад вынимают один за другим все находящиеся в ней шары. Определить вероятность того, что номера шаров расположатся по порядку.

48. Из букв составлено слово «книга». Это слово рассыпали и произвольно собрали заново. Какова вероятность того, что снова получится слово «книга»?

§ 3. Операции над событиями

Теорема сложения вероятностей
Условная вероятность
Независимые события. Теорема умножения вероятностей
Формула полной вероятности

1. Теорема сложения вероятностей

Суммой конечного числа событий называется событие, состоящее в наступлении хотя бы одного из них.

Сумму двух событий обозначают символом $A+B$ или $A \cup B$, а сумму n событий — символом $A_1+A_2+\ldots+A_n$ или $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$.

Предположим, что в урне имеются 5 белых шаров, 3 черных, 2 в полоску и 7 в клетку. Найдем вероятность того, что из урны будет извлечен одноцветный шар.

Пусть A — событие, состоящее в извлечении белого шара; B — черного шара; $A+B$ — одноцветного шара. Так как событию $A+B$ благоприятствуют 8 исходов, а число всех шаров в урне равно 17, то $P(A+B)=\frac{8}{17}$.

Эту же вероятность можно найти по-другому: $P(A)=\frac{5}{17}$, $P(B)=\frac{3}{17}$ и, значит, $P(A)+P(B)=\frac{8}{17}$. Итак, $P(A+B)=P(A)+$ $+P(B)$.

После рассмотрения этого примера можно сформулировать следующую теорему.

▲ **Теорема 1** (теорема сложения вероятностей). *Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.*

Доказательство. Пусть в результате опыта могут наступить n несовместных исходов, которые по соображениям симметрии будем считать равновероятными. Далее, пусть m_a — число равновозможных исходов, благоприятствующих событию A; m_b — число равновозможных исходов, благоприятствующих событию B.

Так как события A и B несовместны, то не существует таких исходов, которые одновременно благоприятствовали бы и A, и B. Поэтому событию $A+B$ благоприятствуют m_a+m_b исходов. Но $P(A)=\frac{m_a}{n}$, $P(B)=\frac{m_b}{n}$, $P(A+B)=\frac{m_a+m_b}{n}=\frac{m_a}{n}+\frac{m_b}{n}$, т. е.

$$P(A+B)=P(A)+P(B). \tag{1}$$

Доказанную теорему с помощью метода математической индукции можно распространить на случай нахождения вероятности суммы попарно несовместных событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$:

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_k)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_k).$$

Следствие 1. *Если события A, B, ..., M образуют полную систему, то сумма вероятностей этих событий равна единице.*

Действительно, по теореме о вероятности суммы несовместных событий имеем $P(A+B+\ldots+M)=P(A)+P(B)+\ldots+P(M)$. Так как эти события образуют полную систему, то их сумма представляет собой достоверное событие (т. е. наступит хотя бы одно из них); но вероятность достоверного события равна 1, т. е. $P(A)+P(B)+\ldots+P(M)=1$.

Следствие 2. *Сумма вероятностей противоположных событий A и $\bar{A}$ равна единице.*

Вероятность события, противоположного событию A; равна разности между единицей и вероятностью события A, т. е. $P(\bar{A})=1-P(A)$.

Действительно, события A и $\bar{A}$ образуют полную систему, а потому на основании следствия 2 можем записать: $P(\bar{A})+ +P(A)=1$, откуда $P(\bar{A})=1-P(A)$.

49. Имеется 100 лотерейных билетов. Известно, что на 5 билетов попадает выигрыш по 20 руб., на 10 — по 15 руб., на 15 — по 10 руб., на 25 — по 2 руб. и на остальные — ничего. Найти вероятность того, что на купленный билет будет получен выигрыш не меньше 10 руб.

Решение. Пусть A, B и C — события, состоящие в том, что на купленный билет падает выигрыш, равный соответственно 20, 15 и 10 руб. Так как события A, B и C несовместны, то

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{5}{100}+\frac{10}{100}+\frac{15}{100}=0{,}3.$$

50. В корзине находятся 5 белых и 7 черных перчаток. Найти вероятность того, что пара, которую достали наугад, окажется одноцветной.

51. В коробке находятся 250 лампочек, из них 100 по 100 Вт, 50 — по 60 Вт, 50 — по 25 Вт и 50 — по 15 Вт. Вычислить вероятность того, что мощность любой взятой наугад лампочки не превысит 60 Вт.

Решение. Пусть A — событие, состоящее в том, что мощность лампочки равна 60 Вт, B — 25 Вт, C — 15 Вт, D — 100 Вт. События A, B, C и D образуют полную систему, так как все они несовместны и одно из них обязательно наступит в данном испытании (выборе лампочки). Вероятность наступления одного из них есть достоверное событие, т. е. $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1$.

События «мощность лампочки не более 60 Вт» и «мощность лампочки более 60 Вт» — противоположные. Согласно свойству противоположных событий, имеем $P(A)+P(B)+P(C)=1-P(D)$. Учитывая, что $P(A)+P(B)+P(C)=P(A+B+C)$, получим $P(A+B+C)=1-$ $-P(D)$, откуда $P(A+B+C)=1-\frac{100}{250}$, т. е. $P(A+B+C)=\frac{3}{5}$.

52. Из урны, содержащей белые, черные и синие шары, извлекают один шар. События A_1 и A_2 означают появление соответственно белого и черного шаров. Что означает событие A_1+A_2?

53. Дана электрическая цепь с элементами l_1 и l_2, соединенными последовательно. Событие A — выход из строя элемента l_1; событие B — выход из строя элемента l_2. Что означает событие $A+B$?

54. Событие A означает появление шести очков на верхней грани игрального кубика. Что означает событие $\bar{A}$?

55. Событие A состоит в том, что хотя бы одна из 15 имеющихся электрических лампочек нестандартная. Что означает событие $\bar{A}$?

56. В группе 5 человек учится на отлично, 7 человек — на хорошо и отлично, 15 человек имеют тройки и 3 человека — неудовлетворительные оценки. Определить вероятность того, что вызванный учащийся не имеет ни двоек, ни троек.

57. У продавца имеется 10 красных, 8 синих, 5 зеленых и 15 желтых шаров. Вычислить вероятность того, что купленный шар окажется красным, синим или зеленым.

Произведением конечного числа событие называется событие, состоящее в том, что каждое из них произойдет.

Произведение двух событий обозначают символом AB или $A\cap B$, а произведение n событий — символом $A_1A_2...A_n$ или $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$.

Согласно определениям суммы и произведения двух событий, сумма $A+\bar{A}$ представляет собой достоверное событие U, а произведение $\bar{A}A$ — невозможное событие V.

Событие B называется *частным случаем* события A, если из наступления B следует наступление события A.

Пусть A и B — произвольные события. Далее, пусть m — число равновозможных исходов, благоприятствующих событию

A, а k — число исходов, благоприятствующих событию B. Предположим, что среди упомянутых $m+k$ исходов содержится t таких, которые благоприятствуют и событию A, и событию B.

Если n — общее число равновозможных исходов, образующих полную систему событий, то $P(A)=\frac{m}{n}$, $P(B)=\frac{k}{n}$.

Так как t исходов состоят в том, что события A и B наступят одновременно, то можно записать $P(AB)=\frac{t}{n}$.

Рассмотрим событие $A+B$; ему благоприятствуют $m+k-t$ исходов. Поэтому

$$P(A+B)=\frac{m+k-t}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}-\frac{t}{n},$$

т. е.

$$P(A+B)=P(A)+P(Б)-P(AB). \qquad (2)$$

Полученная формула представляет собой обобщение формулы вероятности суммы двух несовместных событий, поскольку если A и B несовместны, то $P(AB)=0$ и формула (2) примет вид (1).

Равенство (2) означает, что *вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность произведения этих событий.*

58. Из 30 учащихся спортивной школы 12 человек занимаются баскетболом, 15 — волейболом, 5 — волейболом и баскетболом, а остальные — другими видами спорта. Какова вероятность того, что наудачу выбранный спортсмен занимается только волейболом или только баскетболом?

59. Дано $P(AB)=1/4$, $P(\bar{A})=1/3$, $P(B)=1/2$. Найти $P(A+B)$.

60. Пусть $P(\bar{A})=1/2$ и $P(B)=2/3$. Совместны ли события A и B?

2. Условная вероятность

При совместном рассмотрении двух случайных событий A и B часто возникает вопрос: как связаны события A и B друг с другом, как наступление одного из них влияет на возможность наступления другого?

Простейшим примером связи между двумя событиями служит причинная связь, когда наступление одного из событий обязательно приводит к наступлению другого, или наоборот, когда наступление одного исключает возможность наступления другого. Пусть, например, из ящика наугад выбрана деталь и событие A заключается в том, что эта деталь стандартна (не содержит брака), а событие B состоит в том, что эта деталь 1-го сорта. Тогда наступление события B (деталь 1-го сорта) влечет за собой наступление события A (деталь стандартная). Рассмотрим событие C — деталь не принял ОТК. В этом случае наступление события C исключает наступление события A. Однако кроме таких крайних случаев, существует и много промежуточных, когда непосредственная причинная зависимость одного события от другого отсутствует, но искомая зависимость все же имеется.

Рассмотрим такой пример. Пусть в корзине находится 30 последовательно пронумерованных шаров; событие A — извлечен шар с номером, кратным трем; событие B — извлечен шар с номером, бо́льшим 10. Очевидно, было бы неверно рассуждать, что наступление одного из этих событий влечет за собой наступление другого, или, что наоборот, одно из них исключает другое. В то же время между событиями A и B имеется какая-то зависимость. Действительно, из 20 случаев, к которым сводится событие B (номер больше 10), событию A (номер кратен числу 3) благоприятствуют 7; поэтому, если считать, что событие B наступило, то вероятность события A при этом условии есть $P(A) = \frac{7}{20}$. В то же время если событие B не наступило, то вероятность события A при этом условии составит $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$. Так как $\frac{7}{20} > \frac{1}{3}$, то следует признать, что наступление события B повышает вероятность события A.

Для характеристики зависимости одних событий от других вводится понятие условной вероятности.

Определение. Пусть A и B — два случайных события одного и того же испытания. Тогда *условной вероятностью* события A или вероятностью события A при условии, что наступило событие B, называется число $\frac{P(AB)}{P(B)}$.

Если обозначить условную вероятность $P(A/B)$, то получим формулу

$$P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \tag{3}$$

(предполагается, что $P(B) \neq 0$).

61. Вычислить вероятность того, что в семье, где есть один ребенок — мальчик, родится второй мальчик.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что в семье два мальчика, а событие B — что один мальчик. Рассмотрим все возможные исходы: мальчик и мальчик; мальчик и девочка; девочка и мальчик; девочка и девочка. Тогда $P(AB) = 1/4$, $P(B) = 3/4$ и по формуле (3) находим $P(A/B) = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$.

62. В ящике находятся 10 лампочек по 15 Вт, 10 — по 25 Вт, 15 — по 60 Вт и 25 — по 100 Вт. Определить вероятность того, что взятая наугад лампочка имеет мощность более 60 Вт, если известно, что число ватт на взятой лампочке — четное.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что лампочка имеет мощность более 60 Вт, а событие B — что число ватт является четным. Но «более 60 Вт» — это в данном случае 100 Вт и, значит, $P(AB) = 25/60 = 5/12$, а «четное число ватт» — это 60 и 100 Вт, т. е. $P(B) = 40/60 = 2/3$.

Итак, искомая вероятность $P(A/B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{5/12}{2/3} = \frac{5}{8}$.

63. На игральной кости грани 1, 2, 3 окрашены в красный цвет, а грани 4, 5, 6 — в черный. При бросании кости выпала черная грань. Какова вероятность того, что на этой грани стоит четное число?

64. Какова вероятность того, что вытащенная наугад кость домино окажется «дублем», если известно, что сумма очков на этой кости является четным числом?

Из формулы (3) следует, что

$$P(AB) = P(B)P(A/B), \tag{4}$$

т. е. вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло.

Полученная формула имеет смысл, если существуют вероятности событий $P(A/B)$ или $P(B/A)$, т. е. если события A и B совместны.

3. Независимость событий. Теорема умножения вероятностей

Из решения задач видно, что вероятности $P(A)$ и $P(A/B)$ различны. Однако возможен случай, когда $P(A/B) = P(A)$; тогда событие A называют независимым от B.

Событие A называется *независимым* от события B, если наступление события B не оказывает никакого влияния на вероятность наступления события A.

Учитывая определение независимости событий и правило умножения событий $P(AB) = P(B)P(A/B)$, получим следующую формулу:

$$P(AB) = P(B)P(A). \tag{5}$$

▲ **Теорема 2** (теорема умножения вероятностей). *Вероятность одновременного появления двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий.*

Легко доказать, что если выполняется равенство $P(AB) = P(A)P(B)$, то событие A не зависит от B. Действительно, так как $P(A) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ и согласно определению условной вероятности правую часть этого выражения можно заменить на $P(A/B)$, то $P(A) = P(A/B)$, а это и есть условие независимости событий A и B. Исходя из этого, в дальнейшем будем понимать независимость событий A и B как выполнение равенства $P(AB) = P(B)P(A)$.

Чаще всего для определения независимости событий пользуются интуицией; так, например, при бросании двух монет очевидно, что выпадение какой-либо стороны на одной из них не оказывает влияния на условия бросания другой и, следовательно, выпадения каких-либо сторон на каждой из них представляют собой независимые события.

Понятие независимости обобщается на любое число событий. События $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ называются *независимыми*, если:

1) любые два из них попарно независимы:

$$P(A_iA_j)=P(A_i)P(A_j)\quad (i\neq j);$$

2) выполняется равенство

$$P(A_1A_2...A_n)=P(A_1)P(A_2)...P(A_n).$$

65. В первой урне находятся 6 черных и 4 белых шара, во второй — 5 черных и 7 белых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся белыми?

Решение. Пусть A_1 — из первой урны извлечен белый шар; A_2 — из второй урны также извлечен белый шар. Очевидно, что события A_1 и A_2 независимы. Так как $P(A_1)=4/10=2/5$, $P(A_2)=7/12$, то по формуле (5) находим

$$P(A_1A_2)=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{12}=\frac{14}{60}=\frac{7}{30}.$$

66. Прибор состоит из двух элементов, работающих независимо. Вероятность выхода из строя первого элемента равна 0,2; вероятность выхода из строя второго элемента равна 0,3. Найти вероятность того, что: а) оба элемента выйдут из строя; б) оба элемента будут работать.

Решение. Пусть событие A — выход из строя первого элемента, событие B — выход из строя второго элемента. Эти события независимы (по условию).

а) Одновременное появление A и B есть событие AB. Следовательно, $P(AB)=0{,}2\cdot 0{,}3=0{,}06$.

б) Если работает первый элемент, то имеет место событие $\bar{A}$ (противоположное событию A — выходу этого элемента из строя); если работает второй элемент — событие $\bar{B}$. Найдем вероятности событий $\bar{A}$ и $\bar{B}$:

$$P(\bar{A})=1-P(A)=1-0{,}2=0{,}8;\quad P(\bar{B})=1-P(B)=1-0{,}3=0{,}7.$$

Тогда событие, состоящее в том, что будут работать оба элемента, есть $\bar{A}\bar{B}$ и, значит,

$$P(\bar{A}\bar{B})=P(\bar{A})P(\bar{B})=0{,}8\cdot 0{,}7=0{,}56.$$

67. В экзаменационные билеты включено по два теоретических вопроса и по одной задаче. Всего составлено 28 билетов. Вычислить вероятность того, что, вынув наудачу билет, учащийся ответит на все вопросы, если он подготовил 50 теоретических вопросов и 22 задачи.

Решение. Полный ответ на билет состоит из произведения двух событий: учащийся одновременно ответит на два вопроса (событие A) и решит задачу (событие B). Вычислим вероятности этих событий.

Число всех возможных комбинаций из 56 вопросов по два составляет

$$C_{56}^2 = \frac{56!}{54!\cdot 2!} = \frac{54!55\cdot 56}{54!2\cdot 1} = 1540.$$

Так как учащийся подготовил только 50 вопросов, то число исходов, благоприятствующих событию A, есть

$$C_{50}^2 = \frac{50!}{48!\cdot 2!} = \frac{48!\cdot 49\cdot 50}{48!\cdot 1\cdot 2} = 1225.$$

Вычислим вероятность события A:

$$P(A) = \frac{C_{50}^2}{C_{56}^2} = \frac{1225}{1540}.$$

Вероятность события B определяется тем, что учащийся знает 22 задачи из 28 возможных:

$$P(B) = \frac{22}{28} = \frac{11}{14}.$$

Поскольку события A и B независимы и должны выполняться одновременно, имеем

$$P(AB) = P(A)P(B) = \frac{1225\cdot 11}{1540\cdot 14} = 0{,}625.$$

68. Вероятность сдачи зачета учащимся равна 0,8, а вероятность сдачи экзамена равна 0,9. Какова вероятность того, что учащийся сдаст экзамен?

69. Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность того, что цифра 5 выпадет три раза?

70. Игральную кость бросают трижды. Какова вероятность того, что ни разу не выпадет цифра 6?

71. Электрическая схема состоит из пяти последовательно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,5; 0,8; 0,1; 0,2. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

72. Электрическая схема состоит из трех параллельно соединенных блоков. Вероятности безотказной работы каждого блока составляют 0,3; 0,7; 0,85. Считая выходы из строя различных блоков независимыми событиями, найти надежность всей схемы в целом.

73. Имеется две урны. В первой урне находятся 1 белый, 3 черных и 4 красных шара; во второй — 3 белых, 2 черных и 3 красных шара. Из каждой урны достают по одному шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что цвета обоих шаров совпадают.

4. Формула полной вероятности

Предположим, что событие A может наступить только вместе с одним из попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$, называемых *гипотезами*. Тогда справедлива следующая *формула полной вероятности*:

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+\dots+P(A/H_n)P(H_n), \qquad (6)$$

т. е. вероятность события A равна сумме произведений условных вероятностей этого события по каждой из гипотез на вероятность самих гипотез.

Докажем это. По условию, событие A может произойти лишь вместе с одним из событий $H_1, H_2, \dots, H_n$. Следовательно,

$$A=AH_1+AH_2+\dots+AH_n.$$

Так как события $H_1 \dots H_n$ попарно несовместны, то несовместны и события $AH_1, AH_2, \dots, AH_n$. Поэтому, применяя теорему сложения, находим

$$P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+\dots+P(AH_n).$$

Заменив каждое слагаемое $P(AH_i)$ на $P(A/H_i)P(H_i)$, получим

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+\dots+P(A/H_n)P(H_n).$$

74. Имеется три партии ламп по 20, 30, 50 штук в каждой. Вероятность того, что лампы проработают заданное время, равна для каждой партии соответственно 0,7; 0,8 и 0,9. Какова вероятность того, что выбранная наудачу лампа из ста данных ламп проработает заданное время?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что взятая наугад лампа проработает заданное время, а H_1, H_2 и H_3 — гипотезы, что лампа принадлежит соответственно первой, второй или третьей партии. Тогда $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}3$, $P(H_3)=0{,}5$. Вероятности того, что лампа проработает заданное время, составляют $P(A/H_1)=0{,}7$, $P(A/H_2)=0{,}8$, $P(A/H_3)=0{,}9$ (по условию). По формуле полной вероятности находим

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)+P(A/H_3)P(H_3)=$$
$$=0{,}7\cdot 0{,}2+0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}9\cdot 0{,}5=0{,}83.$$

75. Имеется две одинаковых урны. Первая содержит 2 черных и 3 белых шара, вторая — 2 черных и 1 белый шар. Сначала произвольно выбирают урну, а затем из нее наугад извлекают один шар. Какова вероятность того, что будет выбран белый шар?

Решение. Пусть событие A состоит в том, что белый шар извлечен из произвольной урны, а H_1 и H_2 — гипотезы, что он принадлежит соответственно первой или второй урне. Тогда вероятность $P(H_1)=$ $=P(H_2)=\frac{1}{2}$, вероятность того, что белый шар принадлежит первой урне, $P(A/H_1)=\frac{3}{5}$, а вероятность того, что белый шар принадлежит второй урне, $P(A/H_2)=\frac{1}{3}$. По формуле полной вероятности получим

$$P(A)=P(A/H_1)P(H_1)+P(A/H_2)P(H_2)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}+\frac{1}{6}=\frac{7}{15}.$$

76. С первого станка на сборку поступает 40 % изготовленных деталей, со второго — 30 %, а с третьего — 30 %. Вероятность изготовления бракованной детали для каждого станка равна соответственно 0,01; 0,03; 0,05. Найти вероятность того, что наудачу выбранная деталь оказалась бракованной.

77. Стрельбу в цель ведут 10 солдат. Для пяти из них вероятность попадания 0,6, для трех — 0,5 и для остальных — 0,3. Какова вероятность поражения цели?

78. Имеется пять винтовок, три из которых с оптическим прицелом. Вероятность попадания в цель при одном выстреле из винтовки с оптическим прицелом равна 0,95; без оптического прицела — 0,8. Найти вероятность попадания в цель, если стрелок сделает один выстрел из наудачу взятой винтовки.

§ 4. Случайные величины

Формула Бернулли
Закон распределения случайной величины
Биномиальное распределение

1. Формула Бернулли

Рассмотрим задачу, в которой проводятся повторные независимые испытания с двумя исходами.

79. Стрелок выполняет три попытки. Успех (попадание в цель) и неуспех (промах) каждой из них не зависит от исходов других попыток, а вероятность успешного завершения каждой попытки постоянна и равна p. Найти вероятность успешного завершения двух попыток из трех.

Решение. Пусть A_1, A_2 и A_3 — соответственно успех в первой, второй и третьей попытке. Тогда две удачные попытки отвечают следующим событиям: $A_1A_2\bar{A}_3$ — две первые попытки удачны, третья нет; $A_1\bar{A}_2A_3$ — удачны первая и третья попытка, вторая неудачна; $\bar{A}_1A_2A_3$ — удачны две последние попытки, первая неудачна.

Интересующее нас событие можно записать как сумму $A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3$. Так как события, входящие в эту сумму, несовместны, а события A_1, A_2, A_3 независимы, то по формулам сложения и умножения находим

$$P(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3)=P(A_1A_2\bar{A}_3)+P(A_1\bar{A}_2A_3)+P(\bar{A}_1A_2A_3)=$$
$$=P(A_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)+P(A_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)+P(\bar{A}_1)P(A_2)P(A_3).$$

Но вероятность попадания в цель в каждой попытке есть p, поэтому вероятность промаха равна $q=1-p$. Подставив эти значения, получим

$$P(A_1A_2\bar{A}_3+A_1\bar{A}_2A_3+\bar{A}_1A_2A_3)=p\cdot p(1-p)+p(1-p)p+(p-1)p\cdot p=$$
$$=3p^2(1-p).$$

На этом примере мы познакомились с общей схемой, которая впервые была рассмотрена швейцарским математиком Я. Бернулли, и называется *схемой Бернулли.*

В общем случае эта схема приводит к формуле

$$P(A_{n,k}) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (1)$$

которая называется *формулой Бернулли.*

80. Монету подбрасывают 10 раз. Какова вероятность, что при этом герб выпадет ровно три раза?

Решение. Пусть $A_{10,3}$ — событие, состоящее в том, что при 10-кратном подбрасывании монеты герб выпадет три раза. При этом вероятность выпадения герба равна $\frac{1}{2}$, т. е. $p=\frac{1}{2}$. Тогда $q = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Подставляя эти значения в формулу Бернулли, получим

$$P(A_{10,3}) = C_{10}^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{10!}{3!\cdot 7!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} =$$

$$= \frac{7!\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{7!\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 2^{10}} = \frac{8\cdot 3\cdot 5}{1024} = \frac{15}{128}.$$

81. Вероятность того, что лампа останется неисправной после 1000 ч работы, равна 0,2. Какова вероятность того, что из пяти ламп не менее трех останутся исправными после 1000 ч работы?

Решение. Будем рассматривать горение каждой лампы в течение 1000 ч как отдельный опыт. Тогда можно сказать, что проведено 5 опытов. Нас интересуют события «горят 3 лампы из 5», «горят 4 лампы из 5» и «горят 5 ламп из 5», т. е. мы можем найти вероятность каждого из этих событий по формуле Бернулли, учитывая, что $p=0{,}2$ и $q=0{,}8$:

$$A_{5,3} = C_5^3 p^3 q^2 = \frac{5!}{3!2!}\cdot 0{,}2^3\cdot 0{,}8^2 = 0{,}0512;$$

$$A_{5,4} = C_5^4 p^4 q^1 = \frac{5!}{4!1!}\cdot 0{,}2^4\cdot 0{,}8 = 0{,}0084;$$

$$A_{5,5} = C_5^5 p^5 q^0 = \frac{5!}{5!}\cdot 0{,}2^5\cdot 1 = 0{,}00032.$$

Тогда искомая вероятность составит $0{,}0512+0{,}0084+0{,}00032 = 0{,}0579$.

82. Самолет имеет 4 двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя равна 0,95. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном из двигателей.

83. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы, равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение 5 дней из 7 перерасхода электроэнергии не произойдет?

84. Для нормальной работы на линии должно быть не менее 8 автобусов, а их имеется 10. Вероятность невыхода каждого автобуса на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы в ближайший день.

85. В цехе имеется три резервных мотора, работающих независимо друг от друга. Для каждого мотора вероятность того, что он включен в данный момент, равна 0,2. Какова вероятность того, что в данный момент включен хотя бы один мотор?

86. При испытаниях по схеме Бернулли вероятность ровно двух успехов в трех испытаниях в 12 раз больше, чем вероятность трех успехов. Найти вероятность успеха в каждом испытании.

2. Закон распределения случайной величины

В примерах, с которыми мы встречались ранее, случайные события характеризуются с помощью чисел (число случаев брака, число попаданий при стрельбе, число родившихся мальчиков). Такое положение типично для теории вероятностей. При этом случайный характер исхода влечет за собой случайность числа; это означает, что при повторении опыта оно меняется непредвиденным образом.

Случайной величиной называется переменная величина, которая может принимать те или иные значения в зависимости от случая. Случайные величины будем обозначать заглавными буквами латинского алфавита (X, Y, Z), и их значения — соответствующими строчными буквами.

Случайные величины делятся на прерывные (или дискретные) и непрерывные.

Дискретными случайными величинами называются случайные величины, принимающие лишь конечное или счетное множество значений.

Функция, связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, называется *законом распределения* дискретной случайной величины. Его удобно задавать в виде следующей таблицы:

Значения x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_n
Вероятности p_i	p_1	p_2	p_3	...	p_n

События $X = x_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$$

87. Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 руб. и одна вещь стоимостью 30 руб. Составить закон распределения выигрышей для человека, купившего один билет из 50.

Решение. Искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать три значения: 0, 5 и 30 руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату — два случая и третьему — один случай. Найдем их вероятности:

$$P(x_1)=47/50=0{,}94;\ P(x_2)=2/50=0{,}04;\ P(x_3)=1/50=0{,}02.$$

Закон распределения случайной величины имеет вид

Значения x_i	0	5	30
Вероятности p_i	0,94	0,04	0,02

В качестве проверки найдем $P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)=0{,}94+$ $+0{,}04+0{,}02=1$.

88. Составить таблицу распределения вероятностей случайного числа очков, выпавшего на верхней грани игрального кубика при одном подбрасывании.

89. Игральную кость бросают дважды. Случайная величина X — сумма очков при обоих бросаниях. Составить таблицу распределения вероятностей.

90. В коробке находятся 7 карандашей, из которых 4 — красные. Наудачу извлекают 3 карандаша. Какой закон распределения имеет случайная величина, означающая число извлеченных красных карандашей?

3. Биномиальное распределение

Пусть производится определенное число n независимых опытов, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие p. Рассмотрим случайную величину X, представляющую собой число наступлений событий A в n опытах. Закон ее распределения имеет вид

Значения x_i	0	1	2	...	n
Вероятности p_i	$P(A_{n,0})$	$P(A_{n,1})$	$P(A_{n,2})$	...	$P(A_{n,n})$

где $P(A_{n,k})$ вычисляются по формуле Бернулли.

Закон распределения, который характеризуется такой таблицей, называется *биномиальным*.

91. Монету подбрасывают пять раз. Составить закон распределения случайной величины X — числа выпадения герба.

Решение. Возможны следующие значения случайной величины X: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Зная, что вероятность выпадения герба в одном испытании равна 1/2, найдем вероятности значений случайной величины X по формуле Бернулли:

$$P(A_{5,0})C_5^0p^0q^5 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32};$$

$$P(A_{5,1}) = C_5^1p^1q^4 = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{32};$$

$$P(A_{5,2}) = C_5^2p^2q^3 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{10}{32};$$

$$P(A_{5,3}) = C_5^3p^3q^2 = 10\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32};$$

$$P(A_{5,4}) = C_5^4p^4q^1 = 5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32};$$

$$P(A_{5,5}) = C_5^5p^5q^0 = 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32}.$$

Закон распределения имеет вид

Значения x_i	0	1	2	3	4	5
Вероятности p_i	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

Произведем проверку: $\frac{1}{32}+\frac{5}{32}+\frac{10}{32}+\frac{10}{32}+\frac{5}{32}+\frac{1}{32}=1.$

92. По одному и тому же маршруту в один и тот же день совершают полет три самолета. Вероятность посадки по расписанию для каждого равна 0,7. Составить закон распределения случайного числа самолетов, отклонившихся от расписания.

93. Устройство состоит из трех взаимно независимых деталей. Вероятность отказа каждой детали в одном опыте равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших деталей в одном опыте.

94. Составить закон распределения вероятностей для случайного числа страниц с опечатками, если в статье 8 страниц, а вероятность, что на странице могут оказаться опечатки, равна 0,01.

§ 5. Математическое ожидание

Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Понятие о законе больших чисел

Понятие о задачах математической статистики

1. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

Мы знаем, что наиболее исчерпывающей характеристикой случайной величины является ее закон распределения вероятностей. Однако не всегда обязательно знать весь закон распределения. Иногда можно обойтись одним или несколькими числами, отражающими наиболее важные особенности закона распределения, например числом, имеющим смысл «среднего значения» случайной величины, или же числом, показывающим средний размер отклонения случайной величины от своего среднего значения. Такого рода числа называются *числовыми характеристиками* случайной величины. Оперируя числовыми характеристиками, можно решать многие задачи, не пользуясь законом распределения.

Одна из самых важных числовых характеристик случайной величины есть математическое ожидание.

Если известна дискретная случайная величина X, закон распределения которой имеет вид

Значения x_i	x_1	x_2	...	x_n
Вероятности p_i	p_1	p_2	...	p_n

то *математическим ожиданием* (или средним значением) дискретной величины X называется число

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n.$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины X равно сумме произведений возможных значений этой величины на их вероятности.

95. Найти математическое ожидание числа очков, выпадающих при бросании игральной кости.

Решение. Случайная величина X числа очков принимает значения 1, 2, 3, 4, 5, 6. Составим закон ее распределения:

Значения x_i	1	2	3	4	5	6
Вероятности p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Тогда математическое ожидание есть

$$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=3{,}5.$$

Различные случайные величины могут иметь одно и то же математическое ожидание. Поэтому необходимо ввести еще одну числовую характеристику для измерения степени рассеивания, разброса значений, принимаемых случайной величиной X, около ее математического ожидания.

Рассмотрим разность $x-m$, где m — математическое ожидание величины X.

Случайную величину $x-m$ называют *отклонением* величины от ее математического ожидания.

Дисперсией случайной величины X называется число

$$D(X)=M[(x-m)^2].$$

Другими словами, дисперсия есть математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания.

96. Пусть X — число очков, выпадающих при одном бросании игральной кости. Найти дисперсию случайной величины X.

Решение. Закон распределения случайной величины X и ее математическое ожидание $M(X)=3{,}5$ были найдены в предыдущем примере. Найдем отклонения для $x_1, x_2, \ldots, x_6$:

$$x_1^0=1-3{,}5;\ x_2^0=2-3{,}5;\ x_3^0=3-3{,}5;\ x_4^0=4-3{,}5;\ x_5^0=5-3{,}5;$$
$$x_6^0=6-3{,}5.$$

Вычислим дисперсию:

$$D(x)=\frac{1}{6}[(1-3{,}5)^2+(2-3{,}5)^2+(3-3{,}5)^2+(4-3{,}5)^2+(5-3{,}5)^2+$$
$$+(6-3{,}5)^2]=\frac{35}{12}.$$

97. Монету подбрасывают 5 раз. Найти дисперсию случайной величины X — выпадения герба.

2. Понятие о законе больших чисел

Теория вероятностей, как мы знаем, изучает закономерности, свойственные массовым случайным явлениям. Простейшая из них — устойчивость частоты — лежит в основе всех приложений теории вероятностей к практике. Если попытаться в немногих словах отразить общий смысл подобных закономерностей, то придем к такому заключению. Пусть производится большая серия однотипных опытов. Исход каждого отдельного опыта является случайным, неопределенным. Однако, несмотря на это, средний результат всей серии опытов утрачивает случайный характер и становится закономерным. Под *законом больших чисел* в теории вероятностей понимается ряд теорем, в каждой из которых устанавливается факт приближения средних характеристик большого числа опытов к некоторым определенным постоянным.

Если число случайных величин достаточно велико и они удовлетворяют некоторым весьма общим условиям, то, как бы они ни были распределены, практически достоверно, что их средняя арифметическая сколь угодно мало отклоняется от постоянной величины — средней арифметической их математических ожиданий, т. е. является практически постоянной величиной. Таково содержание теорем, относящихся к закону больших чисел. Следовательно, закон больших чисел — одно из выражений диалектической связи между случайностью и необходимостью.

Можно привести различные примеры возникновения новых качественных состояний как проявления закона больших чисел, в первую очередь — среди физических явлений. Рассмотрим один из них. По современным представлениям, газы состоят из отдельных частиц — молекул, которые находятся в хаотическом движении, и нельзя точно сказать, где в данный момент находится и с какой скоростью движется та или иная молекула. Однако наблюдения показывают, что суммарное действие молекул, например давление газа на стенку сосуда, проявляется с поразительным постоянством. Оно определяется числом ударов и силой каждого из них. Хотя первое и второе являются делом случая, приборы не улавливают колебаний давления газа, находящегося в нормальных условиях. Это объясняется тем, что благодаря огромному числу молекул даже в самых небольших объемах изменение давления на заметную величину практически невозможно. Следовательно, физический закон, утверждающий постоянство давления газа, является проявлением закона больших чисел.

Закон больших чисел лежит в основе различных видов страхования (страхование жизни человека на всевозможные сроки, имущества, скота, посевов и др.).

При планировании ассортимента товаров широкого потребления учитывается спрос на них населения. В этом спросе проявляется действие закона больших чисел.

Широко применяемый в статистике выборочный метод находит свое научное обоснование в законе больших чисел. Например, о качестве привезенной из колхоза на заготовительный пункт пшеницы судят по качеству зерен, случайно захваченных в небольшую мерку. Зерна в мерке немного по сравнению со всей партией, но во всяком случае мерку выбирают такой, чтобы зерен в ней было вполне достаточно для проявления закона больших чисел с точностью, удовлетворяющей потребности практики. Тогда мы вправе принять за показатели засоренности, влажности и средней массы зерен всей партии поступившего зерна соответствующие показатели в выборке.

В изучение общих условий применимости закона больших чисел к последовательности случайных величин большой вклад внесли русские и советские ученые П. Л. Чебышев, А. А. Марков, А. Н. Колмогоров и А. Я. Хинчин.

3. Понятие о задачах математической статистики

Известно, какое значение в экономике, сельском хозяйстве, биологии, медицине и т. д. имеют статистические методы изучения случайных явлений. Обычно к этим методам прибегают в тех случаях, когда требуется изучить распределение большой совокупности предметов (явлений, индивидуумов) по некоторому признаку. Например, можно интересоваться распределением множества людей по возрасту, множества животных данного вида по массе, распределением пахотных земель по урожайности, изделий определенного наименования по сортности, распределением больных гриппом по их реакции на данное лекарство. Так как практически любой признак допускает количественную оценку, то вместо того чтобы говорить о распределении предметов по признаку, говорят о распределении некоторой случайной величины X; опыт, с которым связана величина X, заключается в выборе наугад одного представителя данной совокупности, а значение, принимаемое X, есть значение признака для этого представителя.

Понятно, что исчерпывающее описание такого распределения можно было бы получить, выяснив значения признака для всех без исключения представителей данной совокупности. Однако такой способ трудно осуществим ввиду большого объема совокупности. В некоторых случаях ему препятствует еще и то обстоятельство, что сама рассматриваемая совокупность не существует в готовом виде, а является лишь воображаемой. Например, если нас интересует распределение ошибки, допускаемой измерительным прибором, то изучаемая совокупность представляет собой совокупность всех мыслимых измерений, которые можно произвести с помощью данного прибора. Ясно, что обследовать все элементы такой совокупности невозможно.

Выход из создавшегося положения разумно искать в том, чтобы заменить обследование всей совокупности обследованием лишь небольшой (притом выбранной наугад) ее части. Такую часть обычно называют *выборкой*; в противоположность ей вся совокупность называется *генеральной совокупностью*. Разумеется, при этом желательно, чтобы результаты обследования выборки отражали характерные, основные черты изучаемого признака; для этого объем выборки не должен быть чрезмерно мал. Например, о распределении жителей Москвы по размерам носимой ими одежды нельзя судить по результатам обследования одной квартиры; в этом смысле данные, относящиеся к целому дому, более показательны. Вообще, точные указания относительно объема выборки сформулировать довольно трудно; в каждой конкретной ситуации этот вопрос решается по-своему, с учетом таких факторов, как объем всей совокупности, предполагаемый характер распределения признака и т. д.

Разработка методов, позволяющих по результатам обследования выборки делать обоснованные заключения о распределении признака по всей совокупности, и является одной из важнейших задач математической статистики.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Что называется n-факториалом?
2. Вычислите 5!; 7!.
3. Запишите, чему равен $n!$.
4. Вычислите $\frac{n!}{(n-2)!}$.
5. Вычислите $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}$.
6. Вычислите $\frac{(n+1)!}{(n-3)!}$.
7. Перечислите основные задачи комбинаторики.
8. Что называется перестановками?
9. Запишите формулу для числа перестановок из m элементов.
10. Вычислите число перестановок из 5 предметов.
11. Что называется размещениями?
12. Запишите формулу числа размещений из m элементов по n.
13. Вычислите A_5^2; A_7^3; A_{10}^8.
14. Что называется сочетаниями?
15. Запишите формулу для числа сочетаний из m элементов по n.
16. Вычислите C_8^2; C_{10}^3; C_5^5.
17. Какие события называются достоверными? Приведите примеры.
18. Какие события называются невозможными? Приведите примеры.
19. Что называется вероятностью события?
20. В партии имеется 100 деталей, пять из которых бракованные. Определите вероятность того, что взятая наугад деталь окажется бракованной.
21. Что называется относительной частотой события?
22. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.
23. Чему равна сумма несовместных событий?
24. Какие события называются противоположными?
25. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
26. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
27. В корзине 5 черных, 3 белых и 7 полосатых шаров. Чему равна вероятность достать наугад одноцветный шар?
28. Что называется условной вероятностью?
29. Какова вероятность извлечь из корзины, где лежат 10 пронумерованных шаров, шар с четным номером, если известно, что его номер больше 5?
30. Как формулируется теорема умножения вероятностей?
31. Имеются три урны. В первой находится 5 белых и 3 черных шара, во второй — 4 белых и 4 черных шара, в третьей — 8 белых шаров. Наугад выбирают одну из урн из нее наугад извлекают шар. Какова вероятность того, что он окажется черным?
32. Какая величина называется случайной?
33. Какая случайная величина называется дискретной?
34. Опишите схему Бернулли. Какие элементарные события повторяются в этих опытах?
35. Запишите формулу Бернулли.
36. Из урны, в которой находятся 6 белых и 9 черных шаров, извлекают шар, фиксируют его цвет, после чего возвращают шар в урну. Опыт повторяют трижды. Какова вероятность того, что из трех извлеченных при этом шаров ровно два окажутся белыми?
37. Что называется законом распределения случайной величины?
38. Какой закон распределения называется биномиальным?
39. По мишени стреляют 5 раз, причем вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Составьте закон распределения случайной величины X — попадания в цель.
40. Что называется математическим ожиданием дискретной случайной величиной?
41. Что называется дисперсией случайной величины?
42. Что понимается под законом больших чисел?

Ответы

2. 120; 5040. **4.** $(n-1)n$. **5.** $(n+1)n$. **6.** $(n-2)(n-1)n(n+1)$. **13.** 20; 210; 1 814 400. **16.** 28; 120; 1. **20.** 0,05. **27.** 8/15. **29.** 3/5. **31.** 7/24. **36.** 30/125.
39.

Значения x_i	0	1	2	3	4	5
Вероятности p_i	0,16807	0,36015	0,3087	0,1323	0,02835	0,00243

Контрольное задание

Вариант 1

1. На 6 карточках было записано слово «победа». Их рассыпали и взяли снова только 4 карточки. Какова вероятность того, что получится слово «обед»?

2. В лотерее из 100 билетов имеются 5 выигрышей по 3 руб., 10 выигрышей по 2 руб. и 55 выигрышей по 1 руб. Какова вероятность на один купленный билет выиграть не менее двух рублей?

3. В ящике находятся 4 детали. Каждую деталь осматривают, выбирая стандартную. Если обнаружится дефект, то вынимают следующую. Найдите математическое ожидание для номера стандартной детали, если вероятность дефекта каждой равна 0,3.

Вариант 2

1. Собрание сочинений из четырех томов нужно поставить на полку по порядку. Вычислите вероятность того, что нужный порядок будет достигнут.

2. Какова вероятность того, что при бросании двух игральных костей получится грань с цифрой, кратной трем?

3. Правильная треугольная пирамида имеет пронумерованные грани 1, 2, 3, 4. Запишите закон распределения для выпадения номера грани, на которой стоит пирамида.

Ответы

Вариант 1. **1.** 1/360. **2.** 0,15. **3.** 1/3846. Вариант 2. **1.** 1/24. **2.** 2/3.
3.

Значения x_i	1	2	3	4
Вероятности p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Вводная глава

2. x^2+6x+9. **3.** $25x^2-20xy+4y^2$. **4.** $a^4-2a^2b^2+b^4$. **5.** a^4+2a^2+1. **6.** c^6-2c^3+1. **7.** $a^2-a+0{,}25$. **8.** $m^4n^6-2m^3n^4+m^2n^2$. **9.** $\frac{1}{4}x^2y^4+x^2y^2+x^2$. **10.** $4x^{2m}-12x^my^n+9y^{2n}$. **10.** $4x^{2m}-12x^my^n+9y^{2n}$. **12.** $(m-3n)^2$. **13.** $(2a+b)^2$. **14.** $(m^3+n^4)^2$. **15.** $(5x+2y)^2$. **16.** n^2. **17.** $70xb$. **18.** $9b^2$. **19.** a^2. **20.** 1. **21.** $2a^3b^2$. **23.** $(x+4)^2-16$. **24.** $(x-1)^2+2$. **25.** $(x-5)^2+2$. **26.** $(x+3)^2-12$. **28.** 10 609. **29.** 9801. **30.** 6084. **31.** 1089. **32.** 110,25. **33.** 26,01. **34.** 47,61. **35.** 104,04. **37.** $8+12a+6a^2+a^3$. **38.** $x^3-6x^2+12x-8$. **39.** $x^3+9x^2+27x+27$. **40.** $c^3-9c^2d+27cd^2-27d^3$. **41.** $27x^3+135x^2y+225xy^2+125y^3$. **42.** $a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6$. **43.** $a^9-3a^6b^3+3a^3b^6-b^9$. **44.** $8m^6-36m^4n^4+54m^2n^8-27n^{12}$. **45.** $x^{3n}-3x^{2n}+3x^n-1$. **48.** $25x^2-y^2$. **49.** $4a^2-9b^2$. **50.** $25x^2-9y^2$. **51.** c^6-d^6. **52.** $4x^2y^2-1$. **53.** $1-9a^2b^2$. **54.** $25a^4-9b^2$. **55.** $a^{2n}-b^{2n}$. **57.** 3599. **58.** 399,99. **59.** 224,96. **60.** 48,96. **61.** 15,9999. **62.** 891. **63.** 600. **64.** 2800. **65.** 840. **67.** a^3+1. **68.** $8a^3+27$. **69.** x^3-8. **70.** $1+m^6$. **71.** $n^3+\frac{1}{8}$. **72.** $\frac{1}{8}a^3-8b^3$. **73.** x^3+8. **74.** $27-4a$. **75.** $-3(3m+2)$. **76.** $8x+58$. **79.** $9/(x-y)$. **80.** $1/(a+c)$. **81.** $(a+b)/(a-b)$. **82.** $-1/(a^2+1)$. **83.** $a/(2n-a)$. **84.** a. **85.** $-y/(x+y)$. **86.** -243. **87.** 0,0001. **88.** 125. **89.** 1/16. **90.** $9a^2b^2$. **91.** $0{,}008x^3$. **92.** $27a^6b^{12}$. **93.** x^8y^4/z^{12}. **94.** $625a^{16}b^8c^4$. **95.** $-0{,}008a^9b^3c^3/d^6$. **96.** $(125/64)a^6b^3$. **97.** $(64/729)\times a^{12}b^{18}c^6$. **98.** $14a^4b^2$. **99.** $9y^3$. **100.** a^9; x^{-3}; 1; 1. **101.** $2a^2b^3$; $5ax^{-1}$. **102.** a^{-8}; a^{-8}; a^8. **103.** $8a^6b^{-9}$; $(1/4)x^6y^4$. **104.** $5^{2/3}a^{2/3}c$; $a^{5/8}$. **105.** 1; 1; 1; 1. **106.** 1; 1. **107.** 1; 1; 1. **109.** 1/125; 16/9; 1000/27. **110.** 1/8; 27/64; 8. **112.** x^{-4}; x^{-7}; $3x^{-1}$; $5x^{-3}$; $-7x^{-2}$. **113.** $a^{-3}b^{-2}c^{-1}$; $3a^{-1}(a-b)^{-2}$; 2^{-6}; $3^{-1}a^{-2}(b-c)^{-3}$; $5^{-1}a^{-3}(b+c)^{-1}$. **114.** $a^{-1/2}$ **115.** $3^{1/3}4^{-1}a^{-1/3}b^{-8/3}$. **116.** 1. **117.** $a^{5/6}$. **118.** $10a^{5/6}x$. **119.** $5ac^{-1/12}$. **122.** 7/16. **123.** $19\frac{4}{9}$. **124.** 255. **125.** $-22{,}5$. **126.** 652. Указание: $-3{,}6^\circ=-1$. **127.** 40. **128.** $-8{,}5$. **130.** -1. **131.** $3/(x^{0,5}-6)$. **132.** $(1-y)^2$. **133.** $2q^{0,5}/(p-q)$. **135.** 10. **136.** $-x^2$. **142.** $x=5$. **143.** $x=-4$. **144.** $x=-1{,}5$. **145.** $x=-0{,}5$. **146.** $x=-2$. **147.** $x=4$. **148.** $x=4$. **149.** $x=-4$. **150.** $x=-5$. **151.** $x=1$. **152.** $x_1=4$; $x_2=5$. **153.** $x_1=-5$; $x_2=3$. **155.** $x=7$. **156.** $x=2$. **157.** $x_1=7$; $x_2=3$. **158.** $x=0{,}5$. **159.** $x=3$. **160.** $x=2{,}5$. **163.** $x=3$. **164.** $x=4$. **165.** $x=1$. **166.** $x=5$. **167.** $x=1$. **168.** $x=3$. **169.** $x=1$. **170.** $z=3$. **173.** $x_1=3$; $x_2=-2$. **174.** Нет решений. **175.** $x=0$. **176.** $x=2$. **177.** $x_1=1$; $x_2=0$. **178.** $x=2$. **180.** $\log_7 343=2$ **181.** $\log_8(1/512)=-3$. **182.** $\lg 0{,}01=-2$. **183.** $\lg 1=0$. **185.** $10^{-3}=0{,}001$. **186.** $16^{1/2}=4$. **187.** $5^{-2}=1/25$. **188.** $b^9=p$. **190.** 3. **191.** -3. **192.** -4. **193.** 0. **194.** 4/3. **195.** -4. **196.** 4. **197.** $-1/2$. **198.** $-1/2$. **200.** $0{,}5^{3/2}$. **201.** $3^{3/2}$. **202.** 1/3. **203.** 1. **204.** 64. **205.** $3^{-1/2}$. **206.** 22. **207.** 2. **208.** 45. **209.** 0. **213.** $\log x=3\log a+3\log b$. **214.** $\log x=\log 5+3\log a+2\log c-4\log b$. **215.** $\log x=\log 2+2\log a+\log(a+b)-\log 3-3\log b$. **216.** $\log x=\log 7+3\log a+\log b-(1/8)\log c$. **217.** $\log x=(\log 7+3\log a+\log b)13$. **218.** $\log x=3\log a+\frac{1}{2}\log 2+\frac{1}{2}\log b-\log 8-3\log c-2\log y$. **219.** $\log x=\frac{1}{5}(2\log a+\log b-3\log(a-b))$. **220.** $\log y=5\log a+2\log\sin\alpha-\log\cos\alpha$. **224.** $x=a^3(a+c)/b^2$. **225.** $x=2^2(a+b)(a-b)$. **226.** $x=$

$=\sqrt[5]{mn}$. **227.** $x=\sqrt{a\sqrt[3]{b/(b-c)}}$. **228.** $x=\sqrt{a(a+b)^3}/\sqrt[3]{c^5(a-b)}$. **233.** $x=20$. **234.** $x=2$. **235.** $x=6$. **236.** $x=7$. **237.** $x=2$. **238.** $x=1$. **239.** $x=4/9$. **240.** $x=5$. **243.** $\sqrt[4]{4}$ и $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[6]{125}$ и $\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[12]{27}$ и $\sqrt[12]{256}$. **244.** $\sqrt[6]{8/27}$ и $\sqrt[6]{9/4}$; $\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[12]{16}$ и $\sqrt[12]{8}$; $\sqrt[6]{8/27}$ и $\sqrt[6]{1/2}$. **245.** $\sqrt[12]{1/16}$ и $\sqrt[12]{64/27}$; $\sqrt[6]{8/27}$; $\sqrt[6]{9/4}$ и $\sqrt[6]{3/4}$. **246.** $\sqrt[12]{a^8}$ и $\sqrt[12]{a^9}$; $\sqrt[6]{27m^3}$ и $\sqrt[6]{9m^2}$. **247.** $\sqrt[6]{8a^3b^3}$ и $\sqrt[6]{16a^2b^4}$. **248.** $\sqrt{a}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt{m}$; $\sqrt{x}$. **249.** $\sqrt[3]{b^2}$; $\sqrt[3]{n}$; $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt[4]{x^3}$. **250.** $\sqrt{5xy}$; $\sqrt{3mn}$; $\sqrt[3]{3a^2b}$. **251.** $\sqrt{4x^3yz^4}$; $\sqrt[4]{a^nb^n}$; $\sqrt[3]{x^2y^4}$. **252.** $\sqrt{2x^3y}$; $\sqrt{2m^3/(3n)}$; $\sqrt[3]{2ab^4/(3cd^3)}$. **254.** 40; 20; 54. **255.** 60; 420. **256.** 6; 20; 30. **257.** 6; 6. **258.** 7/5; 2/5; 4/9; 1/2. **259.** 7/4; 4/3; 2/3. **260.** 4; 5; 4/9; 9. **261.** x^2; a^3; m^2; y^3. **262.** $2x^2$; $(1/2)xy^2$; $(1/3)ab^3$. **263.** ab^2c^3; $4ay^2z$; $2mn^4$. **264.** $2ab/(5c^2d^3)$; $2a^2bc^3/(3x^4)$; $4ab^3/(3xy^2)$. **265.** $5(a+b)/(c-d)^2$; $(a+b)^n/(x+y)^{2n}$; $(a+b)^2/(a^3(a-b))$. **267.** $3\sqrt{3}$; $4\sqrt{2}$; $4\sqrt{3}$; $2\sqrt{15}$. **268.** $2\sqrt[3]{2}$; $3\sqrt[3]{2}$; $5\sqrt[3]{2}$; $2\sqrt[3]{9}$. **269.** $3\sqrt{a}$; $a\sqrt{2}$; $a^2\sqrt{5}$. **270.** $2\sqrt[3]{m^2}$; $n\sqrt[3]{5}$; $x^2\sqrt[3]{2}$; $2y\sqrt[3]{2}$. **271.** $3ac\sqrt{bc}$; $3xz\sqrt[3]{xy^2}$; $3cd\sqrt[4]{c^2d}$. **272.** $a^2\sqrt[n]{b^5}$; $x\sqrt[n]{x}$. **273.** $\sqrt{3}(x+y)/2$; $\sqrt{5}(a+b)/(3\times\times\sqrt{a-b})$; $\sqrt{a+b}/(2(a-b))$. **275.** $\sqrt{8}$; $\sqrt{490}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{a^3}$. **276.** $\sqrt[3]{2a^3b^2}$; $\sqrt{x}$; $\sqrt[3]{2a}$. **277.** $\sqrt{(a+b)^3}$; $\sqrt[3]{24a^7b^2}$. **279.** $\sqrt{5}/5$; $\sqrt[3]{4}/2$; $\sqrt[4]{27}/3$; $\sqrt[5]{2}/2$. **280.** $\sqrt{15}/6$; $\sqrt[3]{6}/3$; $\sqrt[4]{6}/2$; $\sqrt[3]{45}/3$. **281.** $\sqrt{2mn}/(2n)$; $\sqrt{6am}/(2a)$; $\sqrt[3]{mn}/n$. **282.** $\sqrt[5]{a^2b}/a$; $\sqrt[3]{ac}/a$; $\sqrt[3]{12}/2$. **283.** $\sqrt[3]{a(a+b)}/(a+b)$; $\sqrt{2(a-b)}/(a-b)$; $\sqrt[5]{5c(a-b)^3}/(a-b)$. **284.** $2\sqrt{3xy}/(xy)$; $7b\sqrt{5ab}/(5a)$; $2c\sqrt{abc}/(3a^2b)$; $3ab\sqrt{2axy}/(4xy^2)$. **285.** $\sqrt[3]{a^2b^2}/(2a)$; $\sqrt[3]{12xy}/(2x)$; $5\sqrt{m^2-2n^2}$. **286.** $2x^2y\sqrt{x^2+3y}$; $\sqrt[4]{m+1}/m$. **287.** $\sqrt[3]{(a^9-b^9)b^2}/(a^2b)$; $\sqrt{a^2x^3+a^4y}/a$. **290.** $19\sqrt{2}$. **291.** $4\sqrt{10}-7\sqrt{6}$. **292.** $\sqrt[4]{a}$. **293.** $7\sqrt{x}-5\sqrt[3]{y}$. **294.** $4\sqrt[3]{3}$; $a\sqrt{b}$; $a\sqrt[4]{a}$. **295.** $\sqrt[3]{2000}$; $\sqrt{y}$. **296.** $\sqrt[12]{3/2}$; $\sqrt[6]{a/x}$. **297.** $a^2\sqrt[4]{a}$; $m\sqrt[8]{3^7m}$. **298.** $\sqrt{5}$; $\sqrt{6}$; $2\sqrt{3}$; a^3. **299.** $a\sqrt[3]{3}$, $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{m^2}$. **300.** $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{2}$. **301.** 729; 49; 25. **302.** $x^2\sqrt[4]{x}$; $y\sqrt[5]{y}$; $n^5\sqrt[6]{n^5}$. **303.** $ab\sqrt{ab}$; $xy^2\sqrt[3]{xy^2}$; $a\sqrt[5]{a^3b^4}$. **304.** $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt[6]{x}$; $\sqrt[6]{5}$. **305.** $\sqrt[3]{a^2b}$; $\sqrt[3]{xy^2}$; $\sqrt[9]{mn^3}$. **306.** $\sqrt[15]{a^6b^3c}$; $c\sqrt{a+b}$; $\sqrt[mn]{a^{4m}b^{6n}}$. **307.** $\sqrt[24]{x^{23}}$; $\sqrt[8]{a^7}$; $\sqrt{m}$. **309.** $\sqrt{3}/3$; $\sqrt{5}/5$; $3\sqrt{6}$; $\sqrt{10}/2$. **310.** $\sqrt{a}$; $\sqrt{m}$; $2x\sqrt{x}$; $5\sqrt{n}/3$. **311.** $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[3]{5}/2$; $\sqrt[3]{9}$; $\sqrt[5]{25}$. **312.** $a\sqrt[7]{x^3}/x$; $\sqrt[6]{a^5}$; $a\sqrt[4]{x^2}/x$. **313.** $\sqrt{a+b}/(a+b)$; $\sqrt{a^2-b^2}/(a^2-b^2)$; $(a+b)\sqrt{a-b}/(2(a-b))$; $\sqrt{x^2-4}/(x+2)$. **314.** $2-\sqrt{2}$; $3(\sqrt{7}+1)$; $2(\sqrt{5}-1)$. **315.** $x+\sqrt{x^2-1}$; $(2+\sqrt{x})^2/(2-x)$; $(a++b\sqrt{x})^2/(a^2-b^2x)$; $(\sqrt{x+2}+2)/(x-2)$. **316.** $(x+\sqrt{x^2-1})^2$; $\sqrt{x}(1-\sqrt{x})/(1-x)$; $x(\sqrt{x^2-1}-1)/(x^2-2)$. **317.** $(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2/(2b)$; $(\sqrt{a+b})+\sqrt{a-b})/2$. **322.** $x=9$. **323.** $x=86/3$. **324.** $x=5$. **325.** Нет решений. **326.** $x=25$. **327.** $x=9$. **328.** $x_1=5$, $x_2=-5/4$. **329.** $x=1$. **330.** $x=7$. **331.** $x=11$. **332.** $x=7$. **333.** $x_1==34$; $x_2=2$. **334.** $x=9$. **335.** $x=1$. **338.** $\pi/3$; $2\pi/3$; $5\pi/6$; $5\pi/4$; $5\pi/3$; $23\pi/12$. **339.** 60°; 150°; 420°; 495°; 450°. **344.** а) $\sin x=-3/5$; $\cos x=-4/5$; $\operatorname{tg}x=3/4$; $\operatorname{ctg}x=4/3$; б) $\sin x=40/41$; $\cos x=-9/41$; $\operatorname{tg}x=-40/9$; $\operatorname{ctg}x=-9/40$. **346.** Плюс; минус; минус; плюс. **347.** Минус; плюс; плюс; плюс. **348.** Плюс; минус; плюс; минус. **349.** Минус; минус; плюс; плюс. **350.** Минус; плюс; минус; плюс. **351.** Минус. **352.** Плюс. **353.** Плюс. **354.** Минус. **355.** Плюс. **356.** Плюс. **357.** Минус. **360.** 3,5. **361.** 2. **362.** $3+2\sqrt{3}$. **363.** $-0{,}5$. **364.** 19/54. **365.** -2. **366.** $(3+\sqrt{3})/2$. **367.** $(1+\sqrt{3})/2$. **368.** $2-2\sqrt{2}$. **369.** $-\sqrt{3}$. **370.** -2. **372.** 1/2; $\sqrt{2}/2$; $\sqrt{3}/3$; $\sqrt{3}/3$. **373.** $\sqrt{3}/2$; 1/2; $\sqrt{3}$; 1. **374.** 0; 1; 0; не существует. **375.** $\sqrt{3}$. **376.** $\sqrt{3}/3$. **377.** 1. **379.** $(3a+b)/2$. **380.** $(8\sqrt{3}-3)/8$. **381.** $a^2+12a^3\sqrt{3}$. **382.** 2. **387.** $\cos^2\alpha$. Указание: воспользоваться формулой $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$. **388.** $\sin^2\alpha$. Указание: записать $\operatorname{ctg}\alpha=\cos\alpha/\sin\alpha$. **389.** $1/\cos^2\alpha$. **390.** Решение. $\sin^2\alpha--\cos^2\alpha-(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=\sin^2\alpha-1-\cos^2\alpha=-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha=-2\cos^2\alpha$. **391.** $2/\cos\alpha$. **392.** 0. Указание: выразить $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ через $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$. **393.** $\sin^2\beta$. **394.** 1. **397.** $\sin x=0{,}6$; $\operatorname{tg}x=-3/4$; $\operatorname{ctg}x=-4/3$. **398.** $\sin x=12/13$; $\cos x==5/13$; $\operatorname{tg}x=12/5$. **399.** $\cos x=-3/5$; $\sin x=4/5$; $\operatorname{ctg}x=-3/4$. **400.** $\cos x==24/25$; $\operatorname{tg}x=-7/24$; $\operatorname{ctg}x=-24/7$. **405.** $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta$. **406.** $\operatorname{tg}\alpha$. Указание: воспользоваться формулами сложения аргументов, заменить $\sin 45°$ и $\cos 45°$ их значениями и привести подобные члены. **407.** $\operatorname{ctg}25°$. **408.** $\cos 2\alpha$. **409.** $\sin 3\alpha$. **410.** Указание: заменить $\operatorname{tg}30°$ на $\sin 30°/\cos 30°$ и привести левую часть к общему знаменателю. **420.** 0. **421.** $2\cos\alpha$. **422.** $(\sqrt{3}-3)/6$. **423.** $2\cos^2\alpha$. **424.** $\cos^2 35°$. **425.** 0. **426.** $-\operatorname{ctg}^2 40°$. **427.** $\cos\alpha$. **436.** $-\operatorname{tg}\alpha$. **437.** $\operatorname{tg}2\alpha$. **438.** $\operatorname{ctg}\alpha$. **439.** $\cos 2\alpha$. **440.** 1. **441.** $\operatorname{ctg}\alpha$. **452.** $2\sqrt{3}$. **453.** $-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}5\alpha$. **454.** $4\cos\alpha\sin(5\alpha/2)\cos(\alpha/2)$.

455. $4\cos\alpha\cos(5\alpha/2)\cos(\alpha/2)$. **456.** $4\sin 12°30'\cos 9°30'\cos 3°$. **457.** $2\sqrt{2}\sin((45°+\alpha)/2)\sin((\alpha-45°)/2)$. Указание: вынести $\sqrt{2}$ за скобки и заменить число в скобках на косинус соответствующего угла. **458.** $\operatorname{tg}3\alpha$. **460.** $(-1)^k\pi/6+\pi k$, $k\in Z$. **461.** $\pm 2\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$. **462.** $-\pi/3+\pi k$, $k\in Z$. **463.** $\pi/6+\pi k$, $k\in Z$. **464.** πk, $k\in Z$. **465.** $\pi/2+\pi k$, $k\in Z$. **466.** πk, $k\in Z$. **467.** $-\pi/2+\pi k$, $k\in Z$. **472.** $-\pi/2+2\pi k$, $k\in Z$. **473.** $-\pi/2+2\pi k$; $(-1)^k\pi/6+\pi k$, $k\in Z$. **474.** πk; $\pm\pi/4+\pi k$, $k\in Z$. **475.** πk, $k\in Z$. **476.** $\pi/4+\pi k$; $\operatorname{arctg}(3/2)+\pi k$, $k\in Z$. **477.** $\pm\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$. **478.** $\pm\pi/6+\pi k$, $k\in Z$. **479.** $\operatorname{arctg}4+\pi k$; $\operatorname{arctg}(1/3)+\pi k$, $k\in Z$. **480.** $\pi/2+\pi k$; $-\operatorname{arctg}(4/3)+\pi k$, $k\in Z$. **481.** $-\pi/4+\pi k$, $k\in Z$. **482.** $\pi/8+\pi k$, $k\in Z$. **483.** $\pi/6+\pi k/3$, $k\in Z$. **484.** $\pi/2+\pi k$, $k\in Z$. **485.** $-45°+180°k$, $k\in Z$. **486.** $(-1)^k\pi/12+\pi k/2$, $k\in Z$. **487.** $2\pi k/3$, $k\in Z$ **488.** $\pm\pi/3+\pi k$, $k\in Z$. **489.** $\pm\pi/4+\pi k$, $k\in Z$. **490.** πk; $\pi/10+\pi k/5$, $k\in Z$. **491.** $\pi/5+2\pi k/5$; $\pi/3+2\pi k/3$, $k\in Z$. **492.** $\pi/8+\pi k/2$; $-\pi/4+\pi k$, $k\in Z$. **493.** $\pi k/2$; $\pm\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$. **494.** $\pi/4+\pi k/2$; $\pm\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$. **495.** $\pi k/4$, $k\in Z$. **496.** $\pi k/2$; $\pm 2\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$. **497.** Нет решений. **498.** $\pi/2+\pi k$; **499.** $\pm\pi/3+2\pi k$, $k\in Z$. **500.** πk; $\pi/2+2\pi k$, $k\in Z$. **501.** $\pm\pi/4+\pi k$; $\operatorname{arctg}0{,}5+\pi k$, $k\in Z$.

Глава I

2. $\begin{pmatrix}7&3&-3\\7&0&4\\6&5&3\end{pmatrix}$ **3.** $\begin{pmatrix}6&0\\0&-1\\7&11\end{pmatrix}$ **4.** $\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ **9.** $\begin{pmatrix}9&-14&-1\\6&1&10\end{pmatrix}$. **10.** $\begin{pmatrix}18&-1\\5&4\\5&15\end{pmatrix}$.

11. $\begin{pmatrix}14&8\\36&16\end{pmatrix}$. **13.** $\begin{pmatrix}0&2\\5&1\end{pmatrix}$. **14.** $\begin{pmatrix}10&1\\4&3\end{pmatrix}$. **15.** $\begin{pmatrix}9&0&4\\2&2&3\\5&1&4\end{pmatrix}$. **17.** $\begin{pmatrix}10\\8\end{pmatrix}$. **18.** $\begin{pmatrix}-3&0&9\\-2&-1&0\\12&5&-6\end{pmatrix}$.

19. $\begin{pmatrix}4&5\\7&9\end{pmatrix}$. **20.** $\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. **21.** $\begin{pmatrix}-10&3\\10&3\end{pmatrix}$. **22.** $\begin{pmatrix}6&-4&-5\\6&-2&-4\\9&5&-4\end{pmatrix}$. **23.** $\begin{pmatrix}-4&4\\7&7\end{pmatrix}$.

24. $\begin{pmatrix}2&3&4\\5&-1&6\end{pmatrix}$. **25.** $\begin{pmatrix}2&1\\-1&4\\5&-2\end{pmatrix}$. **27.** -22. **28.** 19. **29.** $4ab$. **30.** 1. **31.** a^2-b^2-2ab.

32. $\sin(\alpha-\beta)$. **34.** 0. **35.** 0. **36.** $abc+abx+acx+bcx$. **37.** 351. **38.** -10. **39.** -40. **43.** 2; 4; -4. **46.** -6. **47.** -9. **48.** $\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma-\alpha)$. **49.** 0. **50.** 48.

51. 223. **54.** $\begin{pmatrix}-2&1\\3/2&-1/2\end{pmatrix}$. **55.** $\begin{pmatrix}7&-4\\-5&3\end{pmatrix}$. **56.** $\begin{pmatrix}1/2&1/6\\0&1/3\end{pmatrix}$. **57.** $\begin{pmatrix}1&-1&1\\-38&41&-34\\27&-29&24\end{pmatrix}$.

58. $\begin{pmatrix}-8&29&-11\\-5&18&-7\\1&-3&1\end{pmatrix}$. **59.** $\begin{pmatrix}1/4&1/4&1/2&0\\1/4&1/4&-1/2&0\\1/4&-1/4&0&1/2\\1/4&-1/4&0&-1/2\end{pmatrix}$. **62.** (1; 1; 1). **63.** (5; 4; 0).

64. (1; -2; 4). **65.** (2; 0; 3). **67.** (16; 7). **68.** (2; 3). **69.** (-3; 2; 1). **70.** (-1; 1; -2). **75.** (41/22; 12/11). **76.** Бесконечное множество решений. **77.** Нет решений. **78.** (-3; 2; 1). **79.** (-1; 1; -2). **80.** (5; 2; 0). **81.** (1; 2; 2; 0). **84.** (0; -1; 2). **85.** (-2; -3; 5). **86.** (2; 1; 1; 1). **87.** (0; 2; 5/3; $-4/3$). **88.** Нет решений. **89.** (1; 0; 1; 2).

Глава II

2. 0,711. **3.** 0,04. **4.** 0,000017. **5.** 0,00012. **6.** 87 856. **7.** 0,0001. **8.** 3. **9.** 102. **11.** 347, $4953\leqslant a_0\leqslant 347{,}5047$. **12.** $0{,}30095\leqslant a_0\leqslant 0{,}30105$. **13.** $7{,}2686\leqslant a_0\leqslant 7{,}2694$. **14.** $142\,140\leqslant a_0\leqslant 142\,200$. **15.** $419\,500\leqslant a_0\leqslant 420\,500$. **16.** $7{,}26299\leqslant a_0\leqslant 7{,}26301$. **17.** $0{,}1626\leqslant a_0\leqslant 0{,}163$. **18.** $99{,}946\leqslant a_0\leqslant 100{,}000$. **20.** 6, 9, 4, 7 — верные; 5, 6 — сомнительные. **21.** 1, 4, 2 — верные; 8 — сомнительная. **22.** 1, 2, 9 — верные; 8 — сомнительная. **23.** 4, 2 — верные; 8, 7, 3, 5 — сомнительные. **24.** 2, 4, 6 — верные; 8 — сомнительная. **25.** 7, 4 — верные; 9, 3 — сомнительные. **26.** Все верные. **27.** 7, 2, 9 — верные; 5 — сомнительная. **28.** 4 — верная; 2, 8, 9 — сомнительные. **29.** Все верные. **30.** 4 — верная; 2, 8, 7 — сомнительные. **31.** 6 — верная; 4, 2, 8 — сомнительные. **33.** 0,3500. **34.** $163\,000\cdot 10^3$. **35.** $76\,500\cdot 10$. **36.** 0,4. **37.** $2780\cdot 10^2$. **38.** $42{,}8\cdot 10$. **39.** $64{,}93\cdot 10$. **40.** 172420,0. **42.** $\Delta a=10$. **43.** $\Delta a=10\,000$. **44.** $\Delta a=0{,}01$. **45.** $\Delta a=0{,}01$. **46.** $\Delta a=0{,}01$. **47.** $\Delta a=0{,}01$. **48.** $\Delta a=0{,}001$. **49.** $\Delta a=1$. **50.** $\Delta a=1000$. **51.** $\Delta a=10$. **52.** $\Delta a=100\,000$. **53.** $\Delta a=100$. **54.** $15{,}4\times$

$\times 10^3$. **55.** $24\cdot10^3$. **56.** $3\cdot10^3$. **57.** $4\cdot10^3$. **58.** $1\cdot10^3$. **59.** $56\cdot10^3$. **60.** $2\cdot10^3$. **61.** $42\cdot10^3$. **62.** $89\cdot10^3$. **63.** $666\cdot10^3$. **64.** $759\cdot10^3$. **65.** $112\cdot10^3$. **66.** $35\cdot10^3$. **67.** $75\cdot10^3$. **68.** $54\cdot10^3$. **69.** $8\cdot10^3$. **70.** $1628\cdot10^3$. **71.** $429\cdot10^3$. **73.** 0,43. **74.** 2,65. **75.** 9,00. **76.** 16,45. **77.** 25,69. **78.** 81,34. **79.** 10,33. **80.** 74,65. **81.** 62,84. **82.** 15,16. **83.** 17,90. **84.** 22,15. **85.** 16. **86.** 17. **87.** 35. **88.** 61. **89.** 1. **90.** 3. **91.** 31. **92.** 786. **93.** 0. **94.** 2000. **95.** 4000. **96.** 65 000. **97.** 10 000. **98.** 72 000. **99.** 17 000. **100.** 4000. **101.** 7000. **102.** 1000. **104.** 0,2 %. **105.** 0,15 %. **106.** 0,008 %. **107.** 0,006 %. **108.** 0,17 %. **109.** 0,47 %. **110.** 0,015. **111.** 0,026. **113.** 0,1. **114.** 0,004. **115.** 0,000013. **116.** 1,28. **117.** 0,43. **118.** 370. **120.** 1473,4. **121.** 1548,1. **122.** 45,10. **123.** 15 076. **124.** 2901. **125.** 259. **126.** 340. **127.** 15 966. **128.** 571. **129.** 15,62. **130.** 603,079. **131.** 410,7. **132.** 255,4. **134.** 8916,48. **135.** 1544,43. **136.** 2681,85. **137.** 33 100. **138.** 113 700. **139.** 424 600. **144.** 0,17. **145.** 0,0087. **146.** 1,3. **147.** 4,8. **148.** 0,816. **149.** 0,235. **151.** -1; $-i$; 1; i. **152.** 2. **153.** $1-i$. **154.** 0. **155.** $1+2i$. **156.** -1. **157.** $4i$. **159.** $x=1/7$; $y=-1/2$. **160.** $x=2$; $y=1$. **161.** $x=2$; $y=7$. **162.** $x=-4/11$; $y=5/11$. **163.** $x=2$; $y=1$. **164.** $x=0$; $y=1$. **166.** $10+3i$. **167.** $11+5i$. **168.** $5-i$. **169.** $11-2i$. **170.** $-2-3i$. **171.** 7. **172.** -10. **173.** $-10-3i$. **174.** Решение: $(2+3i)(5-7i)=10+15i-14i-21i^2=31+i$. **175.** $22+32i$. **176.** $19-17i$. **177.** $-21-i$. **178.** 2. Указание: применить формулу «разность квадратов». **179.** $1+5i$. **180.** $-12+18i$. **181.** $-15-10i$. **183.** $-16+30i$. **184.** $-45-28i$. **185.** $35+12i$. **186.** $-24-10i$. **187.** Решение. $(3+2i)^3=27+3\cdot9\cdot2i+3\cdot3\cdot4i^2+8i^3=27+54i-36-8i=-9+46i$. **188.** Решение. $(3-2i)^3=27-3\cdot9\cdot2i+3\cdot3\cdot4i^2-8i^3=27-54i-36+8i=-9-46i$. **189.** Решение. $(4+2i)^3=64+3\cdot16\cdot2i+3\cdot4\times4i^2+8i^3=64+96i-48-8i=16+88i$. **190.** $110-74i$. **192.** 13. **193.** 26. **194.** 10. **195.** 85. **196.** a^2+b^2. **197.** m^2+n^2. **199.** Решение. $\frac{5i}{3+2i}=\frac{5i(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\frac{15i-10i^2}{9-4i^2}=\frac{10+15i}{13}=\frac{10}{13}+\frac{15}{13}i$. **200.** Решение. $\frac{-2i}{5-i}=\frac{-2i(5+i)}{(5-i)(5+i)}=\frac{-10i-2i^2}{25-i^2}=\frac{2-10i}{26}=\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$. **201.** $\frac{4}{29}-\frac{19}{29}i$. **202.** $\frac{9}{17}+\frac{2}{17}i$. **203.** $-\frac{7}{26}+\frac{17}{26}i$. **204.** $-\frac{5}{13}-\frac{27}{13}i$. **205.** Решение. $\frac{3+2i}{5i}=\frac{(3+2i)i}{5i\cdot i}=\frac{3i+2i^2}{5i^2}=\frac{-2+3i}{-5}=\frac{2}{5}-\frac{3}{5}i$. **206.** $-7-6i$. **207.** $-\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i$. **208.** $-\frac{12}{37}-\frac{35}{37}i$. **209.** $-i$. **210.** i. **211.** $\frac{18}{13}+\frac{1}{13}i$ **212.** $\frac{24}{13}+\frac{8}{13}i$. **213.** $-\frac{17}{29}+\frac{28}{29}i$. **214.** $2+5i$. **215.** Решение. $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{12}+\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{12}=\left(\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1-i)}\right)^{12}+\left(\frac{(1-i)(i-i)}{(1+i)(1+i)}\right)^{12}=i^{12}+(-i)^{12}=2$. **216.** $-320-i$. **218.** $x_1=2-3i$; $x_2=2+3i$. **219.** $x_1=(-3+i\sqrt{7})/2$; $x_2=(-3-i\sqrt{7})/2$. **220.** $x_1=-0,4-0,8i$; $x_2=-0,4+0,8i$. **221.** $x_1=2,5+0,5i$; $x_2=2,5-0,5i$. **226.** $z=2(\cos(\pi/6)+i\sin(\pi/6))$. **227.** $z=3\sqrt{2}(\cos(3\pi/4)+i\sin(3\pi/4))$. **228.** $z=4\sqrt{2}(\cos(5\pi/3)+i\sin(5\pi/3))$. **229.** $z=5(\cos 0+i\sin 0)$. **230.** $z=10(\cos\pi+i\sin\pi)$. **231.** $z=6(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))$. **237.** $5(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))=5e^{\pi i/2}$. **238.** $6(\cos\pi+i\sin\pi)=6e^{\pi i}$. **239.** $2\sqrt{2}(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4))$. **240.** $\sqrt{2}(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4))=\sqrt{2}e^{\pi i/4}$. **241.** $\sqrt{2}(\cos(7\pi/4)+i\sin(7\pi/4))=e^{7\pi i/4}$. **242.** $6(\cos(5\pi/6)+i\sin\times(5\pi/6))=6e^{5\pi i/6}$. **243.** $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}i=e^{\pi i/4}$. **244.** $\frac{5\sqrt{3}}{2}-\frac{5}{2}i=5e^{11\pi i/6}$. **245.** $-2,5i=2,5e^{3\pi i/2}$. **246.** $4\sqrt{2}-4i\sqrt{2}=8e^{15\pi i/4}$. **247.** $6,3=6,3e^{10\pi i}$. **248.** $-1,3\sqrt{2}-1,3i\sqrt{2}=2,6(\cos(5\pi/4)+i\sin(5\pi/4))$. **249.** $2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}=4(\cos(-\pi/4)+i\sin(-\pi/4))$. **250.** $0,9-0,9i\sqrt{3}=1,8(\cos(11\pi/3)+i\sin(11\pi/3))$. **251.** $-2,5\sqrt{3}-2,5i=5(\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6))$. **252.** $2,4=2,4(\cos 24\pi+i\sin 24\pi)$. **253.** $-8,2=8,2(\cos 11\pi+i\sin 11\pi)$. **256.** Решение. $z_1z_2=2\cdot0,4(\cos(5\pi/6+\pi/2)+i\times\sin(5\pi/6+\pi/2))=0,8(\cos(4\pi/3)+i\sin(4\pi/3))=0,8(-\cos(\pi/3)-i\sin(\pi/3))=-0,4-0,4i\sqrt{3}$. **257.** $-1,5\sqrt{2}-1,5i\sqrt{2}$. **258.** $-3i$. **259.** $1,2\sqrt{2}+1,2i\sqrt{2}$. **260.** $-0,1-$

$-0{,}1i\sqrt{3}$. **261.** $-3/5$. **262.** $0{,}25\sqrt{3}+0{,}25i$. **263.** $-1{,}5\sqrt{2}-1{,}5i\sqrt{2}$. **267.** Решение. $z_1z_2=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}(\cos(315^\circ+225^\circ)+i\sin(315^\circ+225^\circ))=4(\cos 540^\circ+i\sin 540^\circ)=4(\cos 180^\circ+i\sin 180^\circ)=-4$; $z_1/z_2=0{,}5(\cos(315^\circ-225^\circ)+i\sin(315^\circ-225^\circ))=0{,}5(\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ)=0{,}5i$. **268.** $z_1z_2=8$; $z_1/z_2=1-i\sqrt{3}$. **269.** $z_1z_2=-i$; $z_1/z_2=0{,}5\sqrt{3}-0{,}5i$. **270.** Решение. $z^5=(3\sqrt{2})^5\times(\cos(315^\circ\cdot 5)+i\sin(315^\circ\cdot 5))=243\cdot 4\sqrt{2}(\cos 1575^\circ+i\sin 1575^\circ)=972\sqrt{2}(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)=-486+486i$. **271.** Решение. $\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{27}\left(\cos\frac{3\pi/2+2\pi k}{3}+i\sin\frac{3\pi/2+2\pi k}{3}\right)$; $z_1=3(\cos(\pi/2)+i\sin(\pi/2))=3i$; $z_2=3(\cos(7\pi/6)+i\sin(7\pi/6))=-1{,}5\sqrt{3}-1{,}5i$; $z_3=3(\cos(11\pi/6)+i\sin(11\pi/6))=1{,}5\sqrt{3}-1{,}5i$. **272.** $z_1=\cos(3\pi/8)+i\sin(3\pi/8)$; $z_2=\cos(7\pi/8)+i\sin(7\pi/8)$; $z_3=\cos(11\pi/8)+i\sin(11\pi/8)$; $z_4=\cos(15\pi/8)+i\sin(15\pi/8)$. **273.** $250+250i$.

Глава III

13. $\vec{m}=3\vec{a}-5\vec{b}$. **14.** $\overrightarrow{AB}=2\vec{e}_1$; $\overrightarrow{BC}=2\vec{e}_2-4\vec{e}_1$; $\overrightarrow{CA}=2\vec{e}_1-2\vec{e}_2$. **15.** $\overrightarrow{AB}=3\vec{e}_1$; $\overrightarrow{BC}=3(\vec{e}_2-\vec{e}_1)/2$; $\overrightarrow{AC}=3(\vec{e}_1+\vec{e}_2)/2$. **16.** $\overrightarrow{AB}=3\vec{e}_2-3\vec{e}_1/2$; $\overrightarrow{BC}=3(\vec{e}_1-\vec{e}_2)$; $\overrightarrow{AC}=3\vec{e}_1/2$. **17.** $\overrightarrow{BC}=(\vec{e}_2+\vec{e}_1)/2$; $\overrightarrow{CD}=(\vec{e}_2-\vec{e}_1)/2$. **19.** $\overrightarrow{AB}=(-3;\ 6)$; $\overrightarrow{CB}=(6;\ -8)$; $CA=(9;\ -2)$. **20.** $\overrightarrow{BA}=(3;\ -1)$; $\overrightarrow{BC}=(3;\ 0)$; $\overrightarrow{AC}=(0;\ 1)$. **22.** $\vec{a}_1+\vec{a}_2=(1;\ 5)$; $\vec{a}_1-\vec{a}_2=(-5;\ 3)$; $3\vec{a}_1=(-6;\ 12)$; $5\vec{a}_2=(15;\ 5)$. **23.** $\overrightarrow{AB}=(-3;\ 4)$; $\overrightarrow{BC}=(-2;\ 4)$; $\overrightarrow{CA}=(5;\ 0)$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-5;\ 0)$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=(-2;\ 4)$; $\vec{m}=(-14{,}5;\ 4)$. **24.** $\overrightarrow{AC}=(1;\ 7)$; $\overrightarrow{AB}=(-5;\ -3)$; $\overrightarrow{BC}=(6;\ 10)$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=(-4;\ 4)$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=(-11;\ -13)$; $\vec{m}=(22;\ 6)$. **26.** $|\vec{a}|=7$; $|\vec{b}|=\sqrt{74}$; $|\vec{c}|=10$; $|\vec{d}|=7\sqrt{2}$. **28.** $|\overrightarrow{AB}|=2\sqrt{10}$; $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{185}$; $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{173}$. **29.** $10+\sqrt{2}$. **31.** $B_1(0;\ 5)$; $B_2(0;\ 19)$. **32.** Таких точек нет. **35.** $C(5;\ 6)$. **36.** $M(-2;\ -0{,}5)$; $N(2;\ 1{,}5)$. **37.** $B(9;\ 1)$. **38.** $|\overrightarrow{AM}|=15{,}35$. **39.** $C(7{,}2;\ -2{,}8)$; $D(8{,}4;\ -3{,}6)$; $E(9{,}6;\ -4{,}4)$; $F(10{,}8;\ -5{,}2)$. **41.** Решение. $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$; $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{AB}|\times\cos 45^\circ=5\cdot 5\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}/2=25$; $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=0$. **43.** Решение. $(3\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b})=3\vec{a}^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+9\vec{a}\vec{b}+3\vec{b}^2=3|\vec{a}|^2+10|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 30^\circ+3|\vec{b}|^2=3\cdot 2^2+10\cdot 2\cdot 7\cdot\sqrt{3}/2+3\cdot 7^2=12+70\sqrt{3}+147=159+70\sqrt{3}$. **44.** 37; -6. **46.** 41. **47.** -43. **48.** -6. **49.** -6. **50.** 0. **51.** 0. **53.** Решение. $\overrightarrow{AB}=(0;\ -6)$; $\overrightarrow{BC}=(-3;\ 3)$; $\cos\varphi=\frac{0\cdot(-3)+(-6)\cdot 3}{\sqrt{36}\cdot\sqrt{9+9}}=\frac{-18}{6\cdot 3\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; $\varphi=135^\circ$. **54.** $\arccos 0{,}8550$; $\arccos(-0{,}1414)$; $\arccos 0{,}3942$. **55.** $\arccos 0{,}8223$. **56.** $\arccos 0{,}7397$. **57.** $\vec{a}=(3;\ 2;\ -5)$; $\vec{b}=(-2;\ 5;\ -0{,}5)$; $\vec{c}=(2;\ 0;\ 5)$. **58.** $\vec{a}+\vec{b}=(4;\ 3;\ -3)$. **59.** $\vec{a}-\vec{b}=(6;\ 3;\ -1)$. **60.** $5\vec{a}=(15;\ -10;\ 35)$; $-3\vec{a}=(-9;\ 6;\ -21)$. **61.** $3\overrightarrow{AB}=(15;\ -6;\ -3)$; $-0{,}5\overrightarrow{AB}=(-2{,}5;\ 1;\ 0{,}5)$. **62.** Решение. $\overrightarrow{AB}=(-4;\ -1;\ -5)$; $\overrightarrow{BC}=(1;\ -7;\ 3)$; $\overrightarrow{AC}=(-3;\ -8;\ -2)$; $\overrightarrow{DC}=(-6;\ 4;\ -3)$; $\overrightarrow{BD}=(7;\ -11;\ 6)$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(-3;\ -8;\ -2)$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}=(3;\ -12;\ 1)$; $2\overrightarrow{AB}=(-8;\ -2;\ -10)$; $-3\overrightarrow{CD}=(-18;\ 12;\ -9)$; $0{,}5\overrightarrow{BD}=(3{,}5;\ -5{,}5;\ 3)$; $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{AD}=(-22;\ -65;\ -5)$. **63.** $|\vec{a}|=6$; $|\vec{b}|=\sqrt{14}$; $|\vec{c}|=13$; $|\vec{d}|=\sqrt{78}$. **64.** а) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{5}$; б) $|\overrightarrow{CD}|=4\sqrt{6}$. **65.** Решение. $x_C=(x_A+x_B)/2=(3-1)/2=1$; $y_C=(y_A+y_B)/2=(-7+3)/2=-2$; $z_C=(z_A+z_B)/2=(11-3)/2=4$; $C(1;\ -2;\ 4)$. **66.** $6\sqrt{6}+\sqrt{94}$. **67.** $|AM|=\sqrt{13}$. **68.** Решение. Точка N, являющаяся серединой стороны BC, имеет координаты $(1;\ 1;\ 1{,}5)$. Так как точка M пересечения медиан делит медиану в отношении $|AM|:|MN|=2:1$, то $x_M=(x_A+\lambda x_N)/(1+\lambda)=(1+2\cdot 1)/(1+2)=$

$= 1$; $y_M = (y_A+\lambda y_N)/(1+\lambda) = (4+2\cdot 1)/(1+2) = 2$; $z_M = (z_A+\lambda z_N)/(1+\lambda) = (-3+2\cdot 1{,}5)/(1+2) = 0$; $M(1;\ 2;\ 0)$. **69.** а) $\varphi = \arccos 0{,}7010$; б) $\varphi = \arccos 0{,}9558$. **70.** а) $\varphi=\arccos 0{,}4587$; б) $\varphi = \arccos 0{,}9003$. **72.** Нет. **73.** Решение. Подставим значения $x=2$ и $y=0$ в уравнение линии: $4\cdot 2^2+3\cdot 0+6\cdot 2\cdot 0-2\cdot 2+1=13\neq 0$, т. е. точка B не принадлежит линии. **78.** $x-8=0$; $x=0$; $y-6=0$; $y=0$. **79.** $y=\sqrt{3}x$; $y=0$; $x=3$. **82.** Решение. $\overrightarrow{BM} = (x-5;\ y-3)$; $5(x-5)+0\cdot(y-3)=0$; $5x=25$; $x=5$ — искомое уравнение. **83.** $x=-3$. **84.** Решение. $\overrightarrow{AC}=(-8;\ 1)$; $\overrightarrow{BD}=(x-3;\ y-6)$; $-8(x-3)+(y-6)=0$; $8x-y-18=0$. **85.** $x-3=0$; $y-2=0$. **86.** $x-3y+2=0(AB)$; $x-3y-8=0(CD)$; $3x+y-14=0(BC)$; $3x+y-4=0(AD)$. **87.** $7x-11y-27=0$. **90.** Решение. $|AN|=|NB|$; $N(2{,}5;\ 3{,}5)$; $MN \parallel BC$; $\overrightarrow{BC}=(2;\ 2)$; $\overrightarrow{NM}=(x-2{,}5;\ y-3{,}5)$; $(x-2{,}5)/2=(y-3{,}5)/2$; $x-2{,}5=y-3{,}5$; $x-y+1=0$. **91.** $10x-2y-15=0$. **93.** $2x+3y-11=0$. **94.** $3x+y-2=0$. **95.** $5x-3y+15=0$. **96.** $5x+3y=0$. **97.** Решение. Так как абсциссы точек A и B равны, то прямая AB параллельна оси Oy; $x-3=0$. **98.** $y+1=0$. **99.** $x-6y+13=0(AB)$; $4x-5y-6=0(AC)$; $5x-y-22=0(BC)$. **100.** $x+2y-3=0(AC)$; $2x-y-6=0(BD)$. **101.** $7x-2y-49=0(AN)$; $x-3=0(BM)$; $x-3y+4=0(CP)$. **105.** а) Да; б) нет; в) нет; г) да. **107.** а) Нет; б) да; в) да; г) нет. **108.** $5x+3y=0$. **109.** $3x-4y+6=0$. **110.** $20x+2y-45=0$. **111.** $3x+5y-12=0$. **113.** Решение. $\vec n_1=(5;\ 4)$; $\vec n_2=(-3;\ 2)$; $\cos\varphi = \left|\frac{\vec n_1\vec n_2}{|\vec n_1|\,|\vec n_2|}\right| = \left|\frac{-15+8}{\sqrt{41}\cdot\sqrt{13}}\right| = \frac{7}{\sqrt{533}} = 0{,}3032$; $\varphi=\arccos 0{,}3032$. **114.** $\varphi=\arccos 0{,}6$. **115.** $\varphi = \arccos 0{,}8685$. **116.** Решение. $\vec n_1=(18;\ 6)$, $\vec n_2=(14;\ -7)$, $\vec n_3=(5;\ 10)$;

$$\cos\varphi_1 = \left|\frac{18\cdot14-7\cdot6}{\sqrt{324+36}\sqrt{196+49}}\right| = \frac{210}{\sqrt{360}\cdot\sqrt{245}} = \frac{210}{6\sqrt{10}\cdot7\sqrt5} = \frac{5}{5\sqrt2} = \frac{\sqrt2}{2};$$

$$\varphi_1=45^\circ;\ \cos\varphi_2 = \left|\frac{14\cdot5-7\cdot10}{\sqrt{196+49}\sqrt{25+100}}\right| = 0;\ \varphi_2=90^\circ;\ \cos\varphi_3=\left|\frac{18\cdot5+6\cdot10}{\sqrt{360}\ \sqrt{125}}\right| =$$

$$= \frac{150}{6\sqrt{10}\cdot5\sqrt5} = \frac{5}{5\sqrt2}=\frac{\sqrt2}{2};\ \varphi_3=45^\circ.$$

117. $\varphi_1=\arccos 0{,}9006$; $\varphi_2=\arccos0{,}9162$; $\varphi_3=\arccos(-0{,}6508)$. **120.** а) $x^2+y^2+4x+10y+26=0$; б) $x^2+y^2+10x+16=0$; в) $x^2+y^2+14y+45=0$. **125.** $F_{1,2}(\pm3;\ 0)$; $2a=10$; $2b=8$, $\varepsilon=3/5$. **126.** $x^2/625+y^2/576=1$. **127.** $x^2/16+y^2/25=1$. **128.** $F_{1,2}(\pm8;\ 0)$; $2c=16$; $\varepsilon=0{,}8$. **129.** $x^2/28+y^2/25=1$. **130.** $2x^2/45+y^2/9=1$. **133.** $2a=6$; $2b=2\sqrt7$; $F_{1,2}(\pm4;\ 0)$; $\varepsilon=4/3$; $y=\pm(\sqrt7/3)x$. **134.** $y^2/20-x^2/5=1$. **135.** $y^2/25-x^2/9=1$. **136.** $y^2/25-x^2/24=1$. **137.** $x^2/32-y^2/18=1$. **139.** $x^2-y^2=36$. **140.** $x^2-y^2=40$. **141.** $y^2-x^2=8$. **145.** $y^2=-8x$; $x-2=0$. **146.** $F(0;\ -8)$; $y-8=0$. **147.** $x^2=12{,}5y$. **149.** $F(6;\ 0)$; $x+6=0$. **149.** $F(0{,}1)$; $y+1=0$. **150.** $y^2=12x$. **151.** $x^2=14y$.

Глава IV

3. $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha-1$ — переменные величины; $\cos2\pi$, $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$ — постоянные величины. **10.** $F(7)=3\cdot7^2=147$, $F(1/2)=3\cdot(1/2)^2=3/4$, $F(a)=3a^2$. **12.** $\varphi(1000)=\lg1000=3$. **13.** $f(1)+2\varphi(0{,}2)=4\cdot1^2-3\cdot1+1+2(5\cdot0{,}2+2)=8$. **16.** $(-\infty,\ 1)$ и $(1,\ \infty)$. **17.** $(-\infty,\ 4)$ и $(4,\ \infty)$. **19.** $(-\infty,\ -1)$ и $(-1,\ \infty)$. **20.** $(-\infty,\ 1/3)$ и $(1/3,\ \infty)$. **22.** $(-\infty,\ -1)$, $(-1,\ 1)$ и $(1,\ \infty)$. **23.** $(-\infty,\ -3)$, $(-3,\ 3)$ и $(3,\ \infty)$. **25.** $(-\infty,\ 3)$, $(3,\ 4)$ и $(4,\ \infty)$. **26.** $(-\infty,\ -4)$, $(-4,\ 3)$ и $(3,\ \infty)$. **28.** Решение. Знаменатель дроби x^3+1 имеет один действительный корень $x=-1$. Область определения — интервалы $(-\infty,\ -1)$ и $(-1,\ \infty)$. **29.** $(-\infty,\ \infty)$. **31.** $[2,\ \infty)$. **32.** $(-\infty;\ 2{,}5]$. **34.** $(3,\ 5]$. **35.** $(-3,\ 1]$. **37.** $[-1,\ 1]$. **38.** $[-3,\ 1]$. **39.** Решение. Корнями трехчлена x^2-2x-8 являются числа $x_1=-2$ и $x_2=4$. Так как $x^2-2x-8\geqslant0$, то область определения функции — полуинтервалы $(-\infty,\ -2]$ и $[4,\ \infty)$. **40.** Решение. Функция определена для всех значений x, удовлетворяющих неравенству $\frac{3x-2}{2x+6}\geqslant0$. Последнее выполняется, если либо $\begin{cases}3x-2\geqslant0,\\2x+6>0,\end{cases}$

либо $\begin{cases}3x-2\leqslant 0,\\ 2x+6<0.\end{cases}$ Из первой системы имеем $\begin{cases}x\geqslant 2/3,\\ x>-3\end{cases}$, откуда $x\geqslant 2/3$, из второй системы имеем $\begin{cases}x\leqslant 2/3,\\ x<-3\end{cases}$, откуда $x<-3$. Следовательно, область определения функции — интервал $(-\infty, -3)$ и полуинтервал $[2/3, \infty)$. **42.** $(3/2, \infty)$. **43.** $(-7, \infty)$. **44.** $(-\infty, 17)$. **45.** $(1/2, \infty)$. **47.** $(-\infty, \infty)$. **48.** $(1/3, \infty)$. **49.** $(1, \infty)$. **50.** $(-\infty, 1/5)$ и $(1/3, \infty)$. **51.** Решение. Функция определена при тех значениях x, для которых $\lg\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 0$. Это неравенство выполнено, если $\frac{5x-x^2}{4}\geqslant 1$, т. е. $x^2-5x+4\leqslant 0$. Решая последнее неравенство, находим $1\leqslant x\leqslant 4$. Таким образом, область определения функции — отрезок $[1, 4]$. **52.** Решение. Функция $y_1 = \sin x$ определена в бесконечном интервале $(-\infty, \infty)$. Функция $y_2=\lg(x^2-4)$ определена в интервалах $(-\infty, -2)$ и $(2, \infty)$. Однако следует иметь в виду, что функция $\lg(x^2-4)$ является знаменателем дроби, а поэтому нужно исключить точки, в которых $\lg(x^2-4)=0$, или $x^2-4=1$, т. е. $x=\pm\sqrt{5}$. Таким образом, функцию $\lg(x^2-4)$ следует рассматривать в интервалах $(-\infty, -\sqrt{5})$, $(-\sqrt{5}, -2)$, $(2, \sqrt{5})$ и $(\sqrt{5}, \infty)$. Эти интервалы и образуют область определения данной функции. **54.** $[3/4, 1]$. **55.** $[5/3, 7/3]$. **56.** $[0, 4]$. **57.** Решение. Функция определена при тех значениях x, для которых $-1\leqslant\frac{3}{4+2\sin x}\leqslant 1$. Так как $4+2\sin x>0$ при любых x, то задача сводится к решению неравенства $\frac{3}{4+2\sin x}\leqslant 1$. Отсюда $3\leqslant 4+2\sin x$, т. е. $\sin x\geqslant -1/2$. Решая последнее неравенство, получим $-\pi/6+2k\pi\leqslant x\leqslant 7\pi/6+2k\pi$ $(k\in Z)$. **63.** Четная. **64.** Нечетная. **65.** Четная. **66.** Четная. **67.** Ни четная, ни нечетная. **68.** Ни четная, ни нечетная. **69.** Четная. **70.** Решение. Покажем, что $f(x)+f(-x)=0$. Действительно, $f(x)+f(-x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+\lg(-x+\sqrt{1+x^2})=\lg(1+x^2-x^2)=0$. Следовательно, $f(x)=-f(-x)$ для всех x, т. е. данная функция нечетная. **71.** Решение. Имеем $f(-x)=\lg\frac{1+x}{1-x}=\lg\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\frac{1-x}{1+x}$, т. е. $f(-x)=-f(x)$ для всех x из области определения $(-1, 1)$. Значит, данная функция нечетная. **72.** Нечетная. **73.** Четная. **74.** Нечетная. **76.** Решение. Имеем $\cos(\pi+x)=-\cos x$, $\cos^2(\pi+x)=\cos^2 x$. **77.** Решение. Предположим противное, т. е. что функция имеет период T; тогда должно выполняться тождество $\cos(x+T)^2=\cos x^2$. В силу условия равенства косинусов при некотором целом k имеем $x^2+2Tx+T^2\pm x^2=2\pi k$. Однако это тождество невозможно, так как в правой части k может принимать только целочисленные значения, а левая часть представляет собой линейную или квадратичную функцию непрерывного аргумента x. **78.** π. **79.** Решение. Имеем $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}$. Так как функция $\sin 2x$ имеет период π, то и период данной функции равен π. **81.** $y=(x-4)/3$. **86.** $y=\sin^2 2x^3$. **87.** $y=\operatorname{arctg}\sqrt{\lg x}$. **89.** $y=\lg u$, $u=\operatorname{tg}v$, $v=x/2$. **90.** $y=3^u$, $u=v^5$, $v=\cos x$. **96.** $3/2$. **97.** $20/3$. **98.** $\sqrt{2}/2$. **101.** 3,25. **102.** $-1/6$. **103.** 0,049. **107—110.** Непрерывны во всей области своего определения. **111.** Разрыв в точке $x=5$. **112.** Разрыв в точках $x=-1$ и $x=1$. **113.** Разрыв в точке $x=1$. **125.** 34. **126.** -1. Указание: разложить числитель на множители и сократить дробь. **127.** 0. **128.** -32. **129.** 0. **130.** -8. Указание: $x^4+2x-3=(x-1)(x+1)(x^2+3)$; $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$. **132.** 0. **133.** $5/2$. **138.** $2/3$. **139.** 5. **140.** 0. **141.** 3. **148.** 2. **149.** $17/8$. **150.** 3. **151.** $3/5$. **152.** $9/2$. Указание: $1-\cos 6x=2\sin^2 3x$. **153.** 2. **157.** e^5. **158.** e^4. **159.** 1. Указание: воспользоваться подстановкой $x=1/y$, учитывая, что $x\to 0$ при $y\to\infty$. **160.** e^2. **162.** $v=0$. **163.** $v=gt$. **165.** Решение. Имеем $k=\operatorname{tg}\alpha=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$. Полагая $x=-1$, получим $k=-2$. **166.** $\operatorname{tg}\alpha=7$. **167.** $y=3x-5$. **169.** $y'=3$. **171.** $y'=3x^2$. **173.** $y'=2x-1$. **178.** $y'=2x-1$; $y'=0$ при $x=0{,}5$. **179.** $y'=2x-3$; $y'=-3$ при $x=0$. **180.** $y'=3/x^2$; $y'=3/4$ при $x=2$. **181.** $y'=-1/x^2$; $y'=1$ при $x=-1$. **182.** $y'=$

$= -2/x^3$; $y' = -1/4$ при $x = 2$. **184.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$; $y' = 1/4$ при $x = 3$. **185.** $y' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$; $y' = 1/9$ при $x = 3\sqrt{3}$. **187.** $y' = -\sin x$; $y' = -\sqrt{2}/2$ при $x = \pi/4$. **188.** $y' = \cos x$; $y' = -1/2$ при $x = 2\pi/3$. **190.** Потому, что в точке $x = 0$ функция $y = \ln x$ не существует. **193.** $y' = 6x$. **195.** $y' = 15x^2$. **200.** $y' = -\dfrac{6}{x^3}$. **201.** $y' = -\dfrac{12}{x^4}$. **202.** $y' = \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$. **203.** $y' = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{x^3}}$. **204.** $y' = -\dfrac{2}{x\sqrt[3]{x^2}}$. **205.** $y' = -\dfrac{3}{x\sqrt[5]{x^3}}$. **206.** $y' = \dfrac{2}{\sqrt[5]{x^3}}$. **207.** $y' = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$. **208.** $y' = -\dfrac{4}{3x\sqrt[3]{x^2}}$. **209.** $y' = -\dfrac{9}{2x^2\sqrt{x}}$. **210.** $y' = \dfrac{5}{3}\sqrt[3]{x^2}$. **211.** $y' = \dfrac{5}{2}\sqrt[3]{x^2}$. **212.** $y' = -\dfrac{3}{x^2\sqrt{x}}$. **213.** $y' = -\dfrac{1}{x^6\sqrt{x}}$. **214.** $y' = -\dfrac{5}{6x\sqrt[6]{x^5}}$. **215.** $f'(x) = -4/x^5$; $f'(1/2) = -128$. **216.** $f'(x) = (4/3)\sqrt[3]{x}$; $f'(27) = 4$. **217.** $f'(x) = 12x^2 - 4x + 1$; $f'(-1) = 17$. **218.** $f'(x) = -3x^2 + 18x - 1$; $f'(0{,}5) = 7{,}25$. **222.** $y' = 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 2$. **223.** $f'(x) = 2x^3 + 6x^2 + 10x - 2$. **224.** $f'(t) = 5t^4 - 1$. **225.** $f'(u) = 10u^4 - 8u^3 + 6u^2 + 2u - 1$. **226.** $y' = 2z^5 + 3z^4 + 3z^2 - 27$. **227.** $y' = 6x^5 + 8x^3 - 6x$. **230.** $y' = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$. **231.** $y' = -\dfrac{10x^9}{(1+x^5)^2}$. **232.** Решение. $y' = \dfrac{(3-x)'x^2 - (x^2)'(3-x)}{(x^2)^2} = \dfrac{-1\cdot x^2 - 2x(3-x)}{x^4} = \dfrac{-x^2 - 6x + 2x^2}{x^4} = \dfrac{x^2 - 6x}{x^4} = \dfrac{x(x-6)}{x^4} = \dfrac{x-6}{x^3}$. **233.** $y' = \dfrac{2}{x^3}$. **234.** $y' = \dfrac{3x^2+1}{3x^2}$. **235.** $y' = \dfrac{x^3-1}{x^2}$. **236.** $y' = \dfrac{x-4}{x^3}$. **237.** $y' = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$. **241.** Решение. $y' = 4(9-x^2)^3(9-x^2)' = 4(9-x^2)^3(-2x) = -8x(9-x^2)^3$. **242.** $y' = 4(x^4 - x - 1)^3(4x^3 - 1)$. **243.** $y' = \dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$. **244.** $y' = -\dfrac{4x}{3\sqrt[3]{1-x^2}}$. **245.** $y' = 5\cos 5x$. **246.** Решение. $y' = 2\sin 3x(\sin 3x)' = 2\sin 3x\cos 3x(3x)' = 2\sin 3x \times \cos 3x\cdot 3 = 3\sin 6x$. **247.** $y' = -10\sin 5x$. **248.** $y' = -6\cos^2 2x\sin 2x$. **251.** $y' = \dfrac{3}{x}$. **252.** $y' = \dfrac{2x}{x^2+3}$. **255.** $y' = 3\operatorname{ctg} 3x$. **256.** $y' = 4\operatorname{ctg} 2x\cdot\ln\sin 2x$. **257.** Решение. $y' = \dfrac{1}{\sin^3 5x}(\sin^3 5x)' = \dfrac{1}{\sin^3 5x}3\sin^2 5x(\sin 5x)' = \dfrac{3}{\sin 5x}\cos 5x(5x)' = 15\operatorname{ctg} 5x$. **258.** Решение. $y' = \dfrac{x-2}{x+2}\cdot\left(\dfrac{x+2}{x-2}\right)' = \dfrac{x-2}{x+2}\cdot\dfrac{(x-2)-(x+2)}{(x-2)^2} = \dfrac{x-2}{x+2}\cdot\dfrac{-4}{(x-2)^2} = -\dfrac{4}{(x+2)(x-2)}$. **259.** $y' = \dfrac{1}{2x-1}$. **260.** $y' = \dfrac{1}{(1-x)(1+x)}$.

262. $y' = \dfrac{1}{x\ln 5}$. **263.** $y' = \dfrac{1}{x\ln 0{,}4}$. **265.** $y' = \dfrac{1}{x\ln 2}$. **266.** $y' = \dfrac{1}{x\ln 0{,}5}$. **268.** $v' = \dfrac{3}{t\ln 5}$. **269.** $s' = \dfrac{4}{t\ln(1/3)}$. **271.** $y' = \dfrac{1}{(x+3)\ln 10}$. **272.** $y' = \dfrac{1}{(x-6)\ln 10}$.

274. $y' = \dfrac{2z-2}{(z^2-2z)\ln 2}$. **275.** $y' = \dfrac{2x+4}{(x^2+4x-3)\ln 0{,}3}$. **277.** $y' = -\dfrac{\operatorname{tg}\sqrt{1+x}}{2\sqrt{1+x}\ln 7}$.

278. $y' = \dfrac{2}{\sin 2x\ln 10}$. **281.** $y' = 2x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 + 6x + 1$. **282.** $y' = -\dfrac{3}{2x^5}$. **283.** $y' = 2x^5 - \dfrac{7}{2x^6} - \dfrac{1}{2}x^2$. **284.** $y' = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{18}{x^4}$. **290.** $y' = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^2}}$. **291.** $y' = \dfrac{10}{3}\sqrt[3]{x^2}$.

292. $u'(t)=3t^2+\frac{2}{t^3}+\frac{5}{3}\sqrt[3]{t^2}$. **293.** $y'=\frac{2x^2+2x-3}{(2x+1)^2}$. **294.** $y'=\frac{-\frac{1}{3}x^6+4x^5-3x^4-x^2+4x-1}{(x^4-1)^2}$.
295. $y'=\frac{3x(6-x^2)}{(3x-1)^2}$. **297.** $f'(x)=3x^2+\frac{5}{2}x\sqrt{x}-2x$. **298.** $y'=\frac{7}{3}\sqrt[6]{x}-\frac{2}{\sqrt[3]{x}}$.
299. $s'=1{,}5\sqrt{t}-5$. **300.** $s'=\frac{7}{3}t^{4/3}-\frac{\sqrt{5}}{3}t^{2/3}$. **306.** $y'=3^x\ln 3$. **307.** $f'(x)=3x^2+2^x\ln 2$. **308.** $f'(x)=3^{\sin x}\ln 3\cdot\cos x-2^{2x+1}\ln 2+2x$. **309.** $y'=5\cdot 2^{\sin 5x}\ln 2\cdot\cos 5x$. **310.** $f'(x)=3^{\sin^2 x}\ln 3\cdot\sin 2x$. **311.** $y'=3a^{3x}\ln a$. **312.** $f'(x)=3^{2x}\ln 3\cdot 2$; $f'(2)=3^4\cdot\ln 3\cdot 2=162\ln 3$. **313.** $y'(x)=2^{x^2}\ln 2\cdot 2x$; $f'(-1)=-4\ln 2$. **318.** $y'=(2x-3)\cos(x^2-3x+5)$. **319.** $f'(x)=2\sin 5x\cos 5x\cdot 5=5\sin 10x$. **320.** $y'=12\sin^3 3x\cos 3x$. **321.** $y'=6\operatorname{ctg}3x$. **322.** $y'=\frac{\operatorname{ctg}\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$. **323.** $y'=2\operatorname{ctg}x\ln\sin x$. **324.** $f'(x)=2\sin x\cos x=\sin 2x$; $f(\pi/12)=1/2$. **325.** $f'(x)=12\sin^2 2x\cos 2x$; $f'(\pi/6)=9/2$. **331.** $y'=-2x\sin x^2$. **332.** $y'=-\sin 2x$. **333.** $y'=(3-2x)\sin(x^2-3x)$. **334.** $y'=-15\times\sin 5x\cos^2 5x$. **335.** $y'=4\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}-x^2-3\right)\sin\left(\frac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+3x\right)\cos^3\left(\frac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+3x\right)$. **336.** $y'=6\sin 6x$. **337.** $f'(x)=3\frac{1}{\cos^2 x}2\cos x(-\sin x)=-6\operatorname{tg}x$; $f'(\pi/4)=-6$. **340.** $y'=\frac{\sin^2 x+3\operatorname{ctg}^2 x}{x\sin^2 x\cos^2\ln x}$. **341.** Решение. $f'(x)=\frac{1}{\operatorname{tg}3x}\times\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3=\frac{3\cos 3x}{\sin 3x\cos^2 3x}=\frac{3}{\sin 3x\cos 3x}=\frac{6}{\sin 6x}$; $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=6$. **342.** $f'(x)=\frac{10\operatorname{tg}^4 2x}{\cos^2 2x}+6\cos^2 2x\sin 2x+\sin 2x$; $f'\left(\frac{\pi}{8}\right)=20+2\sqrt{2}$. **346.** $y'=\frac{5}{\sqrt{1-25x^2}}$.
347. $y'=\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **348.** $f'(1)=3\sqrt{2}/4$. **349.** $y'=-\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$. **350.** $y'=-\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}$. **351.** $y'=-\frac{1}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$. **352.** $y'=-\frac{3}{x\sqrt{1-\ln^2 x^3}}$. **353.** $f'(x)=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{1-5x^2}}$; $f'\left(\frac{1}{3}\right)=-\frac{3\sqrt{5}}{2}$. **359.** $y'=\frac{3}{1+9x^2}$. **360.** $y'=-\frac{5}{1+25x^2}$.
361. $y'=\frac{3x^2}{1+x^6}$. **362.** $y'=-\frac{2x}{1+x^4}$. **363.** Решение. $y'=\frac{1}{1+\frac{4x^2}{(1-x^2)^2}}\times 2\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{2(1-x^2)^2}{(1-x^2)^2+4x^2}\times\frac{1-x^2-x(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{2(1-x^2+2x^2)}{1-2x^2+x^4+4x^2}=\frac{2(1+x^2)}{(1+x^2)^2}=\frac{2}{1+x^2}$. **364.** $y'=-\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}$. **365.** Решение. $y'=\frac{\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}=\frac{\left(\frac{x}{2}\right)'}{\left(1+\frac{x^2}{4}\right)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 4}{(4+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}=\frac{2}{(4+x^2)\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}$.
366. $y'=-\frac{e^x}{1+e^{2x}}$. **367.** $y'=\frac{2}{x(1+\ln^2 x)}$. **368.** $y'=\frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$. **369.** $y'=\frac{1}{(x+1)\sqrt{x(x+2)}}$. **370.** $y'=-\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$. **371.** $y'=\frac{2x}{\operatorname{arctg}x}-\frac{x^2}{(1+x^2)(\operatorname{arctg}x)^2}$.
372. $y'=\frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$. **384.** $\left(\frac{\sqrt{3}}{6};\ \frac{25}{12}\right)$. **385.** $x=1/2$. **386.** Решение. Имеем

$y' = 6x^2-6x$; $y'=0$; $6x^2-6x=0$; $x^2-1=0$; $x=\pm1$. Находим ординаты точек касания: $y(1)=2-3+4=3$; $y(-1)=-1$. Окончательно получим точки $(1; 3)$, $(-1; -1)$. **387.** $(0; -1)$ и $(4; 3)$. **388.** $k=1$. **389.** $k=1$. **390.** $\alpha=45°$. **391.** $\alpha=45°$. **392.** $45°$; 0; $135°$. **393.** Решение. Как известно, $y'=(\sin x)'=\cos x$. Из условия $\sin x=0$ находим абсциссы точек пересечения синусоиды с осью Ox: $x_n=\pi n$, где $n\in\mathbf{Z}$. Пусть α_n — угол пересечения синусоиды с осью Ox в точке с абсциссой x_n. Тогда $\operatorname{tg}\alpha_n=\cos x_n=\cos\pi n=(-1)^n$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha_n=-1$ или $\operatorname{tg}\alpha_n=1$, откуда $\alpha_n=3\pi/4$ или $\alpha_n=\pi/4$. Например, в начале координат синусоида пересекает ось Ox под углом $\pi/4$, а в точке $x=\pi$ — под углом $3\pi/4$. **394.** $\varphi=135°$. **395.** $\varphi=45°$. **396.** Решение. Находим $f'(x)=\left(\frac{ax-x^3}{4}\right)'=\frac{a-3x^2}{4}=\operatorname{tg}45°=1$; $y=\frac{ax-x^3}{4}=0$ в точках $x_1=0$ и $x_2=\sqrt{a}$, а поэтому условие задачи выполняется при $a=4$ в точке x_1. **397.** $(1; 1)$ и $(-1; 1)$. **398.** Решение. Находим $y'=2x-3$; $y'(3)=3$. Подставив в уравнение касательной $y=y_0+f'(x)(x-x_0)$ значения $x_0=3$, $y_0=4$, $f'(x_0)=3$, получим $y=3x+13$. **399.** $y=2-x$. **400.** Решение. Подставив $x=2$ в уравнение кривой, найдем ординату точки касания: $y=2^2-3=1$. Имеем $y'=2x$; $y'_{x=2}=4$. Уравнение касательной: $y-1=4(x-2)$; $4x-y-7=0$. Уравнение нормали: $y-1=-\frac{1}{4}(x-2)$; $x+4y-6=0$. **401.** $4x-y+6=0$; $x+4y-54=0$. **402.** $y=4x+2$. **403.** При $x=0$ и $x=2/3$. **404.** $\alpha_1=\pi/4$, $\alpha_2=\operatorname{arctg}(3/4)$. **406.** $v=104$ м/с. **407.** $v=17$ м/с. **408.** Решение. $v=s'=6-2t$; $6-2t=0$; $t=3$ (с). **409.** Через 3 с. **411.** Решение. Имеем $v(t)=s'(t)=(30t-16t^2)'=30-32t$. В конце тормозного пути $v(t)=0$, поэтому $30-32t=0$, откуда $t=15/16$ (с). Тормозной путь машины составит $s\left(\frac{15}{16}\right)=30\cdot\frac{15}{16}-16\cdot\left(\frac{15}{16}\right)^2\approx14$ (м). **412.** Через $\frac{v_0}{g}$ после начала движения. Указание: $s(t)=v_0t-\frac{st^2}{2}$; $v(t)=s'(t)$. **414.** 7200 Дж. **415.** Решение. $y'=3x^2$; $y''=(3x^2)'=6x$. **416.** $y''=-\sin x$. **417.** $y''=-2\cos2x$. **418.** $y''=2^x\ln^2 2$. **419.** $y''=-\frac{2\cos x}{\sin^3 x}$. **420.** $y''=-\frac{4}{(2x-3)^2}$. **421.** $y''=\frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}$. **422.** $y''=\frac{x}{(4-x^2)\sqrt{4-x^2}}$. **423.** $y'''=24x$. **424.** $y'''=12x^2$. **425.** $y'''=\sin x$. **426.** $y'''=e^x$. **427.** Решение. $y'=2\sin x\cos x=\sin2x$; $y''=2\cos2x$; $y'''=2(-\sin2x)\cdot2=-4\sin2x$. **428.** $y'''=2/x^3$. **429.** $y'''=8e^{2x}$. **430.** $y'''=125\sin5x$. **431.** $y'''=-1/x^2$. **432.** Решение. $y'=e^x\cos x-e^x\sin x$; $y''=e^x\cos x-e^x\sin x-e^x\cos x-e^x\sin x=-2e^x\sin x$; $y'''=-2(e^x\sin x+e^x\cos x)=-2e^x(\sin x+\cos x)$. **436.** $a=22$ м/с^2. **437.** $v=5$ м/с; $a=0$. **438.** Решение. Имеем $v=s'_t=-\frac{1}{2}t^2+6t$; $a=s''_t=-t+6$. Согласно условию, $a=0$, откуда $-t+6=0$, т. е. $t=6$ (с). Вычислим скорость при $t=6$: $v_{t=6}=\left(-\frac{1}{2}t^2+6t\right)_{t=6}=18$ (м/с). **439.** $a_{t=2}=12$ м/с^2. **442.** Решение. $a=s''_t=(3t^2-6t)'=6t-6$; $a_{t=4}=6\cdot4-6=18$ (м/с^2); $F=ma=3\cdot18=54$ (Н). **443.** Указание: найти s'' и убедиться, что полученная величина совпадает с величиной s. **444.** $y'=0{,}6x+0{,}2$. **445.** $y'(6)=110$. **446.** Решение. $y=ax+b$; $v=y'=a$. **449.** $S'(2)=39$ (см/с). **452.** $\sqrt{2}/2$ (ед. скорости). **454.** $t=6{,}25$ с. **456.** $I=2\cos(2t+1)k$. **457.** $I=(50e^{10}-3\sin14)k$ А. **458.** 6,4 А/с. **459.** 35 А/с. **462.** 3 град/с. **464.** 0,03005. **465.** Решение. $\Delta y=(6x^2+10x)\Delta x+(6x+5)\times(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$; $dy=(6x^2+10x)dx$; $\Delta y-dy=(6x+5)(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3$. Очевидно, что $\Delta y-dy\to0$. **466.** $\Delta y=0{,}001002$; $dy=0{,}001$. **468.** $dy=\frac{dx}{\sqrt{2x}}$. **469.** $dy=\frac{(2x-3)dx}{2\sqrt{x^2-3x}}$. **470.** $dy=\frac{5dx}{(x+5)^2}$. **471.** $dy=\frac{3dx}{x^2}$. **472.** $dy=\frac{(x^2+4x+1)dx}{(x+2)^2}$.

473. $dy = dx\left(1-\frac{1}{x^2}\right)$. **474.** $dy=(2x-3)dx$. **475.** $dy=(3x^2+10x)dx$. **476.** $dy = (2x-1)dx$. **477.** $dy=(4x^3-9x^2+6x-3)dx$. **478.** $dy=5\cos 5x\,dx$. **479.** $dy = -\sin 2x\,dx$. **480.** $dy=\frac{12\,\mathrm{tg}^2 4x\,dx}{\cos^2 4x}$. **481.** $dy=\frac{2dx}{1+4x^2}$. **482.** $dy=-\frac{3x^2dx}{\sqrt{1-x^6}}$. **483.** $dy=\mathrm{ctg}\,x\,dx$. **484.** $dy=-3x^2\,\mathrm{tg}\,x^3dx$. **485.** $dy=15\,\mathrm{ctg}\,15x\,dx$. **486.** $dy = \frac{(x-2)dx}{2x^2\sqrt{1-x}}$. **487.** $dy=\frac{-4x\sqrt{1+x^2}dx}{2(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$. **488.** $dy=\frac{dx}{1-\sin x}$. **489.** $dy = \frac{1}{2\sqrt{x}}(2x\sqrt{x}\sin\sqrt{x}+x^2\cos\sqrt{x})$. **491.** $\Delta y\approx 1{,}5$. **492.** $\Delta y\approx 0{,}023$. **493.** $\Delta y\approx 0{,}001$. **494.** $\Delta V\approx 0{,}2\pi$ см^3. **495.** $\Delta V\approx 3$ см^3. **499.** $\Delta y-dy=0{,}000012$; $\delta=0{,}05\%$. **500.** $dV=270$ см^3. **502.** $\Delta y\approx dy=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}\Big|_{x=1,\ \Delta x=0{,}2}\approx 0{,}133$. **504.** $dS=0{,}46$ м^2; $\delta = 2{,}2\ \%$. **505.** Решение. $dV=3a^2da\Big|_{a=12{,}5,\ da=0{,}01}=3\cdot 12{,}5^2\cdot 0{,}01=4{,}6875$; $\delta = \frac{dV}{V}=\frac{3a^2da}{a^3}=\frac{3da}{a}=\frac{3\cdot 0{,}01}{12{,}5}=\frac{0{,}3}{125}=0{,}24\ \%$. **506.** Решение. Пусть $y=\sqrt[n]{x}$. Прологарифмируем эту функцию и найдем дифференциал: $\ln y = \frac{1}{n}\ln x$; $\frac{dy}{y}=\frac{1}{n}\cdot\frac{dx}{x}$. Итак, $\delta=\frac{1}{n}\cdot\frac{dx}{x}$. **508.** $\approx 0{,}1\ \%$. **509.** $\Delta S\approx dS=1{,}63$; $\delta=\frac{dS}{S}\approx 2\ \%$. **517.** 1009. **518.** 79,212. **519.** 4,9. **520.** 1,9. **521.** Решение. Здесь $x_0=2$, $\Delta x=0{,}005$. Воспользуемся формулой $f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$. Так как $f(x_0)=f(2)=2^4=16$, $f'(x_0)\Delta x=4x^3\Delta x=4\cdot 2^3\cdot 0{,}005=0{,}16$, то $2{,}005^4 = 16+0{,}16=16{,}16$. **522.** 1034,24. **523.** 240,925. **524.** 998,4. **525.** 63,616. **526.** 1,035. **527.** 0,92. **528.** 0,983. **529.** 5,04. **530.** 9,04. **531.** 6,06. **532.** 2,99. **533.** Решение. Так как $x_0=60°$; $\Delta x=1°=\pi/180°\approx 0{,}017$, то $\cos 61°\approx\cos 60°-\sin 60°\times 0{,}017=0{,}5-\sqrt{3}/2\cdot 0{,}017\approx 0{,}486$. **534.** 0,8664. **535.** Решение. Здесь $x_0=3$, $\Delta x=-0{,}02$, $f(x_0)=2^3$; $f'(x_0)=2^3\cdot\ln 2\cdot(-0{,}02)$. Значит, $2^{2{,}98}\approx 2^3-2^3\ln 2\cdot 0{,}02 = 8-8\cdot 0{,}69\cdot 0{,}02=8-0{,}11=7{,}89$. **545.** Возрастает в интервалах $(-\infty,\ -1)$ и $(2,\ \infty)$, убывает в интервале $(-1,\ 2)$. **550.** Решение. Так как производная $f'(x)=5x^4+6x^2+1$ положительна в любой точке числовой оси, то функция $f(x)$ монотонно возрастает на $(-\infty,\ \infty)$. **551.** Убывает на $(-\infty;\ \infty)$. **552.** Возрастает на $(-\infty,\ -1)$ и на $(1,\ \infty)$, убывает на $(-1,\ 1)$. **553.** Убывает на $(-\infty,\ -1)$ и на $(1,\ \infty)$, возрастает на $(-1,\ 1)$. **554.** Возрастает на $(-\infty,\ -1)$ и на $(2,\ \infty)$, убывает на $(-1,\ 2)$. **555.** Возрастает на $(-\infty,\ -3)$ и на $(5,\ \infty)$, убывает на $(-3,\ 5)$. **556.** Функция возрастает во всей области определения $(0,\ \infty)$. **557.** Возрастает на $(0,\ 1)$, убывает на $(1,\ 2)$. **558.** Возрастает на интервалах $(-\pi/2+2\pi k,\ \pi/2+2\pi k)$, убывает на интервалах $(\pi/2+2\pi k;\ 3\pi/2+2\pi k)$, где $k\in\mathbf{Z}$. **559.** Возрастает на $(0,\ \infty)$, убывает на $(-\infty,\ 0)$. **560.** Возрастает на $(1,\ \infty)$, убывает на $(-\infty,\ 1)$. **561.** Возрастает на $(-\infty,\ \infty)$. **562.** Возрастает на $(-\infty,\ \infty)$. **563.** Возрастает на $(-\infty,\ -1)$ и на $(1,\ \infty)$, убывает на $(-1,\ 0)$ и на $(0,\ 1)$. **571.** $y_{\min}=f(1/2) = -25/4$. **572.** $y_{\min}=f(1)=-9/2$. **573.** $y_{\max}=f(-3)=10$. **574.** $y_{\max}=f(-\sqrt{2}) = 1+4\sqrt{2}$; $y_{\min}=f(\sqrt{2})=1-4\sqrt{2}$. **575.** $y_{\max}=f(-3)=9$; $y_{\min}=f(1)=-5/3$. **576.** $y_{\max}=f(0)=2$; $y_{\min}=f(-1)=17/12$; $y_{\min}=f(3)=-37/4$. **577.** $y_{\min} = f\left(-\frac{b}{2a}\right)=\frac{4ac-b^2}{4a}$. **578.** $y_{\max}=f(1)=3$; $y_{\min}=f(2)=0$. **579.** $y_{\min} = f(2/\ln 2)$. **580.** $y_{\min}=f(0)=2$. **581.** Решение. Пусть $f(x)$ имеет экстремум в точке x_0; тогда $f'(x_0)=0$. Если в точке x_0 производная также имеет экстремум (например, максимум), то для всех значений $x\neq x_0$, достаточно близких к x_0, получим $f'(x)<f'(x_0)=0$. Следовательно, в окрестности x_0 функция $f(x)$ убывает, а это противоречит допущению. Таким образом, точка экстремума функции не может одновременно быть и точкой экстремума ее производной. **590.** $y_{\min}=y(1) = 110$; $y_{\max}=y(-3)=174$. **591.** $u_{\min}=u(1)=-1$; $u_{\max}=u(0)=0$. **592.** $y_{\min} = y(0)=0$; $y_{\max}=y(-1)=y(1)=1$. **593.** $y_{\max}=y(1)=2$; $y_{\min}=f(-1)=-2$.

594. $y_{max} = y(-1) = (-4)$; $y_{min} = y(1) = 4$. **595.** $y_{min} = y(0) = 0$; $y_{max} = y(-2) = 2$. **596.** $y_{max} = y(-2,\ 4) = -24$. **597.** $y_{min} = y(2) = -8\sqrt{2}/15$. **598.** При $x = \pi/2 + 2\pi k$ максимум, равный 1; при $x = -\pi/2 + 2\pi k$ — минимум, равный -1. **599.** $y_{max} = y(e) = 1/e$. **604.** $m = f(2) = -1$; $M = f(0) = 3$. **605.** $m = f(3) = -1$; $M = f(1) = 3$. **606.** $m = f(2) = 4$; $M = f(5) = 67$. **607.** $m = f(-1) = 0$; $M = f(-2) = 17$. **608.** $m = f(1) = -1$; $M = f(e) = 0$. **609.** $m = f(0) = -1$; $M = f(\pi/2) = 3$. **618.** $a/2$ и $a/2$. **619.** $x = 1/2$. **620.** $x = 1/4$. **621.** Высота прямоугольника должна быть равна радиусу полукруга: $h = r = \dfrac{a}{4+\pi}$. **622.** $v_{max} = v(3) = 45$. **623.** $v_{max} = v(3) = 27$. **624.** 30 м и 60 м. **625.** 8 м, 8 м и 4 м. **626.** Равносторонний. **627.** $1 : \sqrt{2}$. **628.** Решение. Обозначив радиус основания и высоту цилиндра через r и h, имеем $S = 2\pi r^2 + 2\pi rh$, откуда $h = \dfrac{S}{2\pi r} - r$. Тогда объем $V(r) = \dfrac{rS}{2} - \pi r^2$, где $0 \leqslant r \leqslant \sqrt{\dfrac{S}{2\pi}} = b$. Критическим значением на $[0,\ b]$ является $r_0 = \sqrt{\dfrac{S}{6\pi}}$. Так как $V(0) = V(b) = 0$, то наибольший объем получаем при $r = r_0$. **632.** Выпукла на $(-\infty,\ 1)$, вогнута на $(1,\ \infty)$. **633.** Выпукла на $(-\infty,\ 2)$, вогнута на $(2,\ \infty)$. **634.** Выпукла на $(-\infty,\ -1)$, вогнута на $(-1,\ \infty)$. **635.** Выпукла на $(-\infty,\ 0)$, вогнута на $(0,\ \infty)$. **640.** Выпукла на $(-\infty,\ 1)$, вогнута на $(1,\ \infty)$; $(1;\ -1)$ — точка перегиба. **641.** Выпукла на $(-\infty,\ 0)$, вогнута на $(0,\ \infty)$; $(0;\ 0)$ — точка перегиба. **642.** Вогнута на $(-\infty,\ 1)$, выпукла на $(1,\ \infty)$; $(1;\ 2)$ — точка перегиба. **643.** Вогнута на $(-\infty,\ -1)$ и на $(1,\ \infty)$, выпукла на $(-1,\ 1)$; $(-1;\ 0)$ и $(1;\ 0)$ — точки перегиба.

Глава V

2. а) x^3; б) x^8. **4.** $\dfrac{1}{6}x^6$. **8.** а) $6x$; б) $-3x+1$; в) $\sin x$. **9.** Решение. Так как $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -x^{-2} = -1/x^2$, то функция $F(x) = 1/x$ является первообразной при любом $x \in \mathbf{R}$, кроме $x = 0$. **10.** Ошибки допущены в примерах а) и д): $(x^5)' = 5x^4$; $(\operatorname{arctg} 3x)' = \dfrac{3}{1+9x^2}$. **11.** Для $f_3(x) = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}$. **12.** $F_1(x) = -\dfrac{1}{x}$. **14.** а). Решение. $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, так как $(\ln|x|)' = 1/x$; б) $\operatorname{tg} x + C$. **16.** а) Решение. Равенство неверно, так как $(\sqrt{x} + C)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$; очевидно, правильный ответ есть $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$; б) равенство справедливо. **17.** $5\sin x + C$. **18.** Решение. $\left(\displaystyle\int (x^3 + x^2)dx\right)' = x^3 + x^2$; $\left(\displaystyle\int x^3dx + \int x^2dx\right)' = \left(\displaystyle\int x^3dx\right)' + \left(\displaystyle\int x^2dx\right)' = x^3 + x^2$, т. е. данное равенство справедливо. **21.** $2\displaystyle\int e^x dx + 5\int dx$. **25.** $\dfrac{1}{7}x^7 + C$. **26.** $\dfrac{x^{k+1}}{k+1} + C$. **27.** $-\dfrac{1}{x} + C$. Указание: $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}dx$. **28.** $-\dfrac{1}{4x^4} + C$. **30.** $\dfrac{2}{3}x\sqrt{x} + C$. Указание: $\displaystyle\int \sqrt{x}dx = \int x^{1/2}dx$.

31. $\dfrac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C$. **33.** $t^5 + C$. **34.** $\dfrac{1}{2}x^8 + C$. **36.** $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 3x + C$. **37.** $\dfrac{3}{2}x^4 - x^3 + x^2 - 5x + C$. **38.** $ax^4 - 2bx^3 - 2cx^2 + ex + C$. **40.** $2x\sqrt{x} - \dfrac{6}{25}x\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{a^3x} + C$. **41.** Решение. $\displaystyle\int \left(x^{-5} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4x^3} - \frac{2}{a^2}\right)dx = \int \left(x^{-5} + 3x^{-2} - \frac{1}{4}x^{-3} - \frac{2}{a^2}\right) \times$

$\times dx=\int x^{-5}\,dx+3\int x^{-2}\,dx-\frac{1}{4}\int x^{-3}\,dx-\frac{2}{a^2}\int dx=\frac{x^{-4}}{-4}+3\,\frac{x^{-1}}{-1}-\frac{1}{4}\,\frac{x^{-2}}{-2}-$ $-\frac{2x}{a^2}+C=-\frac{1}{4x^4}-\frac{3}{x}+\frac{1}{8x^2}-\frac{2x}{a^2}+C$. **43.** $\frac{1}{4}x^4+x^5+C$. **44.** $\frac{1}{4}x^4-2x^3+$ $+6x^2-8x+C$. **46.** $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+4x+C$. **47.** $\frac{4}{3}x^3-x^2+x+C$. **49.** $5\ln|x|+C$. **50.** $\frac{1}{a}\ln|x|+C$. **52.** $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\ln|x|+C$. **53.** $-\frac{1}{2}x^2-2x+3\ln|x|+\frac{4}{x}+C$. **55.** $-\frac{4}{x}+4\ln|x|+x+C$. **56.** $2x^2-4x+\ln|x|+C$. **58.** $\ln|1+x|+C$. Указание: $d(1+x)=dx$. **59.** $\ln|x+a|+C$. **60.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **61.** $\ln(x^2+5)+C$. **62.** $\frac{1}{3}\ln|x^3+5|+C$. **63.** $\frac{1}{4}\ln(x^4+2)+C$. **65.** $e^x+2{,}5x^2+C$. **66.** $2e^x+x^4+C$. **68.** $x^2-\frac{4^x}{\ln 4}+C$. **69.** $x^7+\frac{5^x}{\ln 5}+4e^x+C$. **70.** $\frac{b^x}{\ln b}+C$. **71.** $2\ln|x|+8e^x+\frac{5^x}{\ln 5}-$ $-2{,}5x^{2/5}+C$. **73.** $-e^{-x}+C$. **74.** Решение. $\int xe^{-x^2}dx=-\frac{1}{2}\int e^{-x^2}d(-x^2)=$ $=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+C$. **76.** $\frac{5}{4}x^4-8\ln|x|+\cos x+C$. **77.** $3e^u+2\cos u+C$. **82.** $2\sin x+$ $+C$. **83.** $\sin x+C$. Указание: $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$. **84.** Решение. Применяя формулу $\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}$, получим $\int\sin^2\frac{x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\int(1-\cos x)\,dx=$ $=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x+C$. **85.** $\sin x-\cos x+e^x+C$. **86.** $3\sin x-2\cos x+C$. **87.** $\frac{1}{4}x^4+$ $+\frac{2^x}{\ln 2}-3\cos x-3\sin x+C$. **90.** $\frac{1}{4}\cos 4x+C$. **91.** $\frac{1}{3}\sin 3x+C$. **92.** Решение. $\int\cos(5-2x)dx=-\frac{1}{2}\int\cos(5-2x)d(5-2x)=-\frac{1}{2}\sin(5-2x)+C$. **93.** $-\frac{1}{2}\times$ $\times\cos x^2+C$. **95.** $\frac{1}{5}\operatorname{tg}x+C$. **96.** $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}u+C$. **97.** Решение. $\int\frac{\cos^2x+3}{\cos^2x}\times$ $\times dx=\int\left(1+\frac{3}{\cos^2x}\right)dx=\int dx+3\int\frac{dx}{\cos^2x}=x+3\operatorname{tg}x+C$. **98.** $4\operatorname{tg}x+\sin x+$ $+C$. **99.** Решение. $\int\operatorname{tg}^2x\,dx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\operatorname{tg}x-x+C$. **100.** $\frac{5^x}{\ln 5}+$ $+\frac{1}{4x^4}+3\operatorname{tg}x+C$. **102.** Решение. $\int\frac{dx}{\sin^2x\cos^2x}=\int\frac{\sin^2x+\cos^2x}{\sin^2x\cos^2x}\,dx=$ $=\int\frac{dx}{\cos^2x}+\int\frac{dx}{\sin^2x}=\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x+C$. **103.** Решение. $\int\frac{1+\cos^2x}{1+\cos 2x}\,dx=$ $=\int\frac{1+\cos^2x}{2\cos^2x}\,dx=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\cos^2x}+1\right)dx=\frac{1}{2}\operatorname{tg}x+\frac{1}{2}x+C$. **105.** $-2\cos x-$ $-3\operatorname{ctg}x+C$. **106.** Решение. $\int\frac{\sin^4x}{\sin^2 2x}dx=\int\frac{\sin^4x}{(2\sin x\cos x)^2}dx=\int\frac{\sin^4x}{4\sin^2x\cos^2x}\,dx=$ $=\int\frac{\sin^2x}{4\cos^2x}\,dx=\frac{1}{4}\int\operatorname{tg}^2x\,dx=\frac{1}{4}\int\left(1-\frac{1}{\cos^2x}\right)dx=\frac{1}{4}x-\frac{1}{4}\operatorname{tg}x+C$. **109.** $-\frac{1}{6}\operatorname{ctg}6x+C$. **110.** $0{,}1\operatorname{tg}5x+C$. **111.** $\frac{1}{3}\operatorname{tg}x^3+C$. **112.** $-\operatorname{tg}(1-x)+C$. **113.** Решение. $\int\frac{x\,dx}{\sin^2(x^2+1)}=\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+1)}{\sin^2(x^2+1)}=-\frac{1}{2}\operatorname{ctg}(x^2+1)+C$.

114. $\frac{1}{5}\operatorname{tg}(x^5+2)+C$. 117. $\frac{2}{3}\arcsin x+C$. 118. $\arcsin x+C$. 120. $2\operatorname{arctg} x-3\arcsin x+C$. 121. Решение. $\int\frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)}=\int\frac{1+x^2+x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{1+x^2}{x^2(1+x^2)}dx+\int\frac{x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\int\frac{dx}{x^2}+\int\frac{dx}{1+x^2}=-\frac{1}{x}+\operatorname{arctg} x+C$. 122. $\operatorname{tg} x+3\operatorname{arctg} x+C$. 123. Указание: представить числитель в виде $(x^4+1)-1$. 125. $F(x)=\frac{2}{3}x\sqrt{x}-2\sqrt{x}+1$. 126. $y=x^3-2x^2+5x$. 127. $y=2{,}5x^2+2x+6$. 128. Решение. Имеем $\int(\cos x-\sin x)dx=\sin x+\cos x+C$. Используя заданные начальные условия, получим $6=\sin\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}+C$, откуда $C=5$. Следовательно, первообразная имеет вид $y=\sin x+\cos x+5$. 130. $y=x^2-4$. 131. $y=x^3+3$. 132. $y=\frac{1}{3}x^3-x+\frac{7}{3}$. 133. $y=x^3-x^2+4$. 134. $F(x)=4-\frac{1}{x}$. 138. $s=t^2-3t+6$. 139. $s=\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+3t+3$. 140. $s=\frac{1}{3}t^3-3t^2+7t+4$. 141. $s=\frac{1}{3}t^3+9$. Указание: согласно условию, $v=kt^2$. 144. $s=2t^4+4t^2-6t+12$. 145. $v=4t^3+3t^2+1$; $s=t^4+t^3+t+3$. 147. $-\frac{1}{8}(7-2t)^4+C$. 148. $\frac{1}{25}(5u-1)^5+C$. 149. $\frac{1}{40}(1+x^5)^8+C$. Указание: $u=1+x^5$; $x^4dx=\frac{1}{5}du$. 150. $-\frac{1}{30}(9-2x^3)^5+C$. 152. $\frac{1}{5}(3x+1)\sqrt[3]{(3x+1)^2}+C$. 153. $\frac{1}{4}(5u+6)\sqrt[4]{5u+6+C}$. 154. $\frac{1}{4}(3x+5)\sqrt[3]{(3x+5)}+C$. 155. $-\frac{2}{3\sqrt{3t-1}}+C$. 157. $\frac{1}{30}(2x^3+1)^5+C$. 158. $\frac{1}{3}\left(t^4+5\right)^3+C$. 159. $\frac{1}{6}(2x^2+1)\sqrt{2x^2+1}+C$. 160. $-\frac{1}{3}(1-x^2)\sqrt{1-x^2}+C$. 162. $\frac{2}{3}\times(u^3-1)^{3/2}+C$. 163. $\frac{1}{3}(t^4-3)\sqrt[4]{t^4-3}+C$. 164. $\sqrt{t^2+1}+C$. 165. $-\frac{2}{3\sqrt{x^3-1}}+C$. 167. Решение. $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}=\left|\begin{matrix}x-1=t^2,\\ x=t^2+1,\\ dx=2t\,dt\end{matrix}\right|=\int\frac{(t^2+1)^3 2t\,dt}{t}=2\int(t^6+3t^4+3t^2+1)dt=2\cdot\frac{t^7}{7}+6\cdot\frac{t^5}{5}+6\cdot\frac{t^3}{3}+2t+C=\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+\frac{6}{5}\sqrt{(x-1)^5}+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$. Можно было ввести подстановку $x-1=t$; тогда $dx=dt$, $x=t+1$ и, значит, $\int\frac{x^3dx}{\sqrt{x-1}}=\int\frac{(t+1)^3dt}{\sqrt{t}}=\int\frac{t^3+3t^2+3t+1}{\sqrt{t}}dt=\int(t^{5/2}+3t^{3/2}+3t^{1/2}+t^{-1/2})\,dt=\frac{t^{7/2}}{7/2}+3\frac{t^{5/2}}{5/2}+3\frac{t^{3/2}}{3/2}+\frac{t^{1/2}}{1/2}+C=\frac{2}{7}\sqrt{(x-1)^7}+\frac{5}{6}\sqrt{(x-1)^5}+2\sqrt{(x-1)^3}+2\sqrt{x-1}+C$. 168. $-\frac{2}{3}\sqrt{1-x^3}+C$. 169. $\frac{1}{3}\sin^3x+C$. Указание: положить $t=\sin x$. 170. Решение. $\int e^{\sin^2x}\sin 2x\,dx=\left|\begin{matrix}\sin^2x=t;\\ 2\sin x\cos x=dt.\end{matrix}\right|=\int e^t dt=e^t+C=e^{\sin^2x}+C$. 172. $-\frac{1}{7}\cos^7x-\frac{1}{2}\cos^4x-\cos x+C$. 173. $\frac{4}{3}\cos x(\cos^2x-3)+C$. 174. $-\frac{1}{3}\sin(4-x^3)+C$. 175. $-\frac{1}{12}\times\cos 3x^4+C$. 180. Решение. $\int\sin^2x\,dx=\int\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\int dx-\int\cos 2x\,dx\right)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$. 181. $\frac{2}{3}\ln x\sqrt{\ln x}+C$. 183. Решение.

$\int \frac{dx}{2x-1} = \left| \begin{array}{l} 2x-1=u, \\ 2dx=du, \\ dx=\frac{1}{2}du \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u|+C = \frac{1}{2}\ln|2x-1|+C$. **184.** $\frac{1}{2}\times$ $\times\ln|4t-6|+C$. **185.** $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$. **186.** $\frac{1}{3}\ln|1+x^3|+C$. **187.** $\frac{1}{a}\ln|ax+b|+$ $+C$. **188.** $\ln|\sin x|+C$. **189.** $\ln(x^2+x+1)+C$. **190.** $-\frac{1}{3}\ln(2+\cos 3x)+C$. **193.** $\frac{2}{5}\operatorname{arctg}^2 x\sqrt{\operatorname{arctg} x}+C$. **194.** $\frac{1}{3}\arcsin^3 x+C$. **195.** Решение. $\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}} =$ $= \left| \begin{array}{l} e^x=t, \\ e^x dx=dt \end{array} \right| = \int\frac{dt}{1+t^2} = \operatorname{arctg} t+C = \operatorname{arctg} e^x+C$. **196.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3+C$. **197.** Решение. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \left| \begin{array}{l} \ln x=t, \\ \frac{1}{x}dx=dt \end{array} \right| = \int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t+C =$ $=\arcsin\ln x+C$. **198.** $\frac{1}{4}(\arcsin x)^4+C$. **201.** $\arcsin\frac{x}{3}+C$. **202.** $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{t}{3}+C$. **203.** $\arcsin\frac{x}{\sqrt{3}}+C$. **204.** $\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$. **205.** $\frac{1}{30}\operatorname{arctg}\frac{6x}{5}+C$. **206.** $\frac{1}{5}\times$ $\times\arcsin\frac{5x}{4}+C$. **209.** Решение. $\int x^5\ln x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x, & dv=x^5dx; \\ du=\frac{dx}{x}, & v=\frac{x^6}{6} \end{array} \right| = \frac{x^6}{6}\times$ $\times\ln x-\int\frac{x^6}{6}\frac{dx}{x} = \frac{x^6}{6}\ln x-\frac{x^6}{36}+C$. **210.** $\frac{x}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$. **213.** $-x\cos x+$ $+\sin x+C$. **214.** $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. **215.** $(x^4+3x^2-7x)\ln x-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3}{2}x^2-7x\right)+$ $+C$. **216.** Решение. $\int x\sin 2x\,dx = \left| \begin{array}{ll} u=x, & dv=\sin 2x\,dx; \\ du=dx, & v=-\frac{1}{2}\cos 2x \end{array} \right| = -\frac{x}{2}\cos 2x+$ $+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx = -\frac{x}{2}\cos 2x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$. **217.** $\frac{x}{3}\sin 3x+\frac{1}{9}\cos 3x+C$. **218.** $x\times$ $\times\ln x-x+C$. **219.** Решение. $\int\frac{\ln x\,dx}{x^2} = \left| \begin{array}{ll} u=\ln x, & dv=\frac{dx}{x^2}; \\ du=\frac{dx}{x}, & v=-\frac{1}{x} \end{array} \right| = -\frac{\ln x}{x}+$ $+\int\frac{dx}{x^2} = -\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}+C$. **220.** $-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C$. **224.** $S=3$ (кв. ед.). **225.** $S=$ $=8\frac{2}{3}$ (кв. ед.). **226.** Решение. $S=(-\cos\pi)-(-\cos 0)=1+1=2$ (кв. ед.). **227.** $S=4$ (кв. ед.). **230.** 1/2. **231.** 8. **234.** 2. **235.** 1. **236.** Решение. $\int\limits_1^2\frac{dx}{x}=$ $=\ln x\Big|_1^2=\ln 2-\ln 1=\ln 2$. **237.** 15/4. **239.** 7/3 (кв. ед.). **240.** 15/4 (кв. ед.). **241.** Решение. $S=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0=1$ (кв. ед.). **247.** 19,2. **248.** 8. **250.** 14/3. **251.** 18,6. **253.** 27. **254.** −32/3. **255.** 13,5. **256.** 23/3. **258.** $\frac{e^2-1}{e}$. **259.** e^6-1. **261.** 1. **262.** Решение. $\int\limits_0^1\frac{dx}{x+2}=\ln(x+2)\Big|_0^1=$

$= \ln 3 - \ln 2 = \ln \frac{3}{2} \approx 0,4$. **264.** 1/2. **265.** Решение. $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x \Big|_{\pi/6}^{\pi/2} =$ $= \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. **267.** 2. **268.** 1/2. **269.** 0. **270.** 3. **272.** 4. **273.** 0. **275.** $5\pi/6$. **276.** Решение. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-(2x)^2}} = \frac{1}{2} \arcsin 2x \Big|_0^{0,5} =$ $= \frac{\pi}{4}$. **278.** $\pi/4$. **279.** $\operatorname{arctg} 4$. Указание: $F(x) = \int \frac{2x\, dx}{1+x^4} = \int \frac{2x\, dx}{1+(x^2)^2} =$ $= \operatorname{arctg} x^2 + C$. **281.** 68. **282.** 2. **283.** 48,4. **284.** $6\sqrt{4}$. **286.** $8\frac{1}{15}$. **287.** 4,5. **289.** Решение. $\int\limits_0^{1/2} \frac{(x+1)dx}{1+4x^2} = \int\limits_0^{1/2} \frac{x\,dx}{1+4x^2} + \int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1+4x^2}$. Далее каждый интеграл вычислим отдельно:

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{x\,dx}{1+4x^2} = \left| \begin{array}{ll} t = 1+4x^2, & t_1 = 1, \\ dt = 8x\,dx, & t_2 = 2 \\ x\,dx = \frac{1}{8}\,dt; & \end{array} \right| = \frac{1}{8} \int\limits_1^2 \frac{dt}{t} =$$

$$= \frac{1}{8} \ln t \Big|_1^2 = \frac{1}{8}(\ln 2 - \ln 1) = \frac{\ln 2}{8};$$

$$\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{1+4x^2} = \left| \begin{array}{ll} z = 2x, & z_1 = 0, \\ dz = 2dx, & z_2 = 1 \\ dx = \frac{1}{2}\,dz; & \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int\limits_0^1 \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} z \Big|_0^1 =$$

$$= \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} 0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}.$$

Окончательный ответ: $\frac{\pi + \ln 2}{8}$. **290.** 26. Указание: $t = x^2 - 7$, $x\,dx = \frac{1}{2}dt$; $t_1 = (2\sqrt{2})^2 - 7 = 1$, $t_2 = 4^2 - 7 = 9$. **291.** $2(\sqrt{8} - 1)/3$. **292.** 32/3. **295.** 1/4. **296.** -3. **297.** 2. **298.** Решение. $\int\limits_1^{\pi} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \left| \begin{array}{ll} \ln x = t, & t_1 = 0, \\ \frac{dx}{x} = dt; & t_2 = 1/2 \end{array} \right| = \int\limits_0^{1/2} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} =$ $= \arcsin t \Big|_0^{1/2} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \frac{\pi}{6}$. **300.** Решение. $\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin\varphi d\varphi}{1-2\cos\varphi} =$

$$= \left| \begin{array}{ll} 1 - 2\cos\varphi = t, & t_1 = 1, \\ 2\sin\varphi d\varphi = dt, & t_2 = 3 \\ \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2}\,dt; & \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int\limits_1^3 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t \Big|_1^3 = \frac{1}{2} \ln 3 \approx \frac{1}{2} \cdot 1,1 = 0,55.$$

301. 1/3. **302.** $\ln 2 \approx 0,6931$. **303.** $\ln(5/4)$. **305.** Решение. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}} = \left| \begin{array}{l} x = t^2, \\ dx = 2t\,dt; \\ t_1 = 0, \\ t_2 = 2 \end{array} \right| = \int\limits_0^2 \frac{2t\,dt}{1+t} = 2 \int\limits_0^2 \frac{t+1-1}{1+t}\,dt = 2 \int\limits_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt = 2(t - \ln(1+t)) \Big|_0^2 =$

$= 2(2-\ln 3+0+\ln 1)=4-2\ln 3$. **306.** $\sqrt{e-1}$. **308.** 6 кв. ед. **309.** Решение. Искомая площадь заключена между параболой $y=-x^2+4$ и осью Ox. Найдем точки пересечения параболы с осью Ox. Полагая $y=0$, получим $x_1=2$, $x_2=2$.

Следовательно, $S=\int\limits_{-2}^{2}(-x^2+4)dx=-\frac{x^3}{3}+4x\Big|_{-2}^{2}=10\frac{2}{3}$ (кв. ед.). **310.** Решение. Здесь дана ветвь равносторонней гиперболы, расположенная в I четверти. По формуле (1) находим $S=\int\limits_{1}^{3}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_1^3=\ln 3-\ln 1=\ln 3=$

$=1{,}1$ (кв. ед.). **311.** 2 кв. ед. **314.** Решение. $S=\int\limits_{1}^{e}\left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\right.$

$\left.-\ln x\right)\Big|_1^e=\frac{e^3}{3}-\frac{1}{3}-\ln e=\frac{e^3}{3}-\frac{4}{3}\approx 5{,}6$ (кв. ед.). **315.** 1/3 кв. ед. **316.** $(e-$

$-1)^2/e$ кв. ед. **317.** 12 кв. ед. Указание: найти абсциссу точки пересечения прямых $x-2y+4=0$ и $3x+2y-12=0$, разбить треугольник ABC на два треугольника ABD и ADC (см. рис. 162), а затем найти пределы интегрирования для каждого из них. **318.** 2π кв. ед. **321.** 8 кв. ед. **322.** 24 кв. ед. **325.** Решение. График функции $y=\cos x$ на отрезке $[0;\ \pi/2]$ лежит выше оси Ox, а на отрезке

$[\pi/2,\ 3\pi/2]$ — ниже оси Ox (см. рис. 172). Следовательно, $S=\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx+$

$+\left|\int\limits_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx\right|=\sin x\Big|_0^{\pi/2}+|\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}=1+|-2|=3$ (кв. ед.). **327.** 4/3 кв. ед.

328. 1 кв. ед. **329.** 4,5 кв. ед. **330.** Решение. Найдем абсциссы точек пересечения данных парабол. Уравнение $x^2=2x^2-1$ имеет корни $x_1=-1$, $x_2=1$.

Следовательно, $S=\int\limits_{-1}^{1}(x^2-(2x^2-1))dx=\int\limits_{-1}^{1}(-x^2+1)dx=\frac{4}{3}$ (кв. ед.). **333.** 12 кв. ед. **335.** Решение. Пределы интегрирования находим как ординаты точек пересечения данной кривой с осью Oy: $2-y-y^2=0$; $y_1=1$, $y_2=-2$.

Согласно формуле (3), получим $S=\int\limits_{-2}^{1}(2-y-y^2)dy=\left(2y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-2}^{1}=$

$=2-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\left(-4-2+\frac{8}{3}\right)=4{,}5$ (кв. ед.). **336.** 8/3 кв. ед. **338.** 4 кв. ед.

339. 36 кв. ед. **340.** $16\sqrt{2}/3$ кв. ед. **341.** Решение. Имеем $y=\pm\sqrt{x^3}$; $x\geqslant 0$.

Следовательно, $S=2\int\limits_{0}^{2}\sqrt{x^3}\,dx=2\int\limits_{0}^{2}x^{3/2}\,dx=\frac{4}{5}x^{5/2}\Big|_0^2=\frac{4}{5}\sqrt{2^5}\approx 4{,}5$ (кв. ед.).

343. Решение. Здесь $\Delta x=1$, $x_0=1$, $x_1=2$, $f(x_0)=2$, $f(x_1)=5$. Поэтому

$S=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x=2\cdot 1+5\cdot 1=7$. **344.** Решение. Находим $\int\limits_{1}^{3}(x^2+1)dx=$

$=\left(\frac{1}{3}x^3+x\right)\Big|_1^3=12-\frac{4}{3}=10\frac{2}{3}$. Таким образом, значения интегральной суммы для функции $y=x^2+1$ при делении отрезка $[1,3]$ на две и на четыре части равны соответственно 7 и 8,75. При увеличении числа делений значение интегральной суммы приближается к площади криволинейной трапеции, равной

$10\frac{2}{3}$. **346.** Решение. Имеем $\int\limits_{0}^{1}x\,dx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}$. Предел интегральной суммы для функции $f(x)=x$ на отрезке $[0, 1]$ равен значению определенного интеграла от той же функции на этом отрезке. **349.** Решение. Разобьем отрезок $[2, 5]$ на несколько (например, на 6) равных частей. Тогда $\Delta x=\frac{b-a}{n}=$ $=\frac{5-2}{6}=\frac{1}{2}$. Найдем соответствующие значения ординат:

x	2	2,5	3	3,5	4	4,5
y	4	6,25	9	12,25	16	20,25

Согласно формуле (10), приближенное значение определенного интеграла есть $\int_2^5 x\,dx\approx\frac{1}{2}(4+6{,}25+9+12{,}25+16+20{,}25)=34$. С другой стороны, по формуле Ньютона — Лейбница находим $\int_2^5 x^2\,dx=\frac{x^3}{3}\Big|_2^5=\frac{125}{3}-\frac{8}{3}=39$. Относительная погрешность вычисления составляет $\delta=\frac{\Delta}{a}\cdot 100\%=\frac{|34-39|}{39}\times$ $\times 100\%=\frac{5}{39}\cdot 100\%\approx 12{,}82\%$. **350.** Решение. Здесь $n=10$, а $\Delta x=$ $=\frac{b-a}{n}=\frac{\pi/2-0}{10}=\frac{\pi}{20}=0{,}1571$ ($\approx 9°$) (вычисления будем проводить с точностью до четырех знаков). Имеем

x	0	9°	18°	27°	36°	45°	54°	63°	72°	81°	90°
$\sin x$	0	0,1564	0,3090	0,4540	0,5878	0,7071	0,8090	0,8910	0,9511	0,9877	1

Следовательно, $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx\approx 0{,}1571(0{,}1564+0{,}3090+0{,}4540+0{,}5878+0{,}7071+$ $+0{,}8090+0{,}8910+0{,}9511+0{,}9877+1)\approx 1{,}077$. Найдем точное значение интеграла: $\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi/2}=1$. Относительная погрешность $\delta=\frac{|1-1{,}077|}{1}\times$ $\times 100\%=7{,}7\%$. **351.** $\approx 1{,}61312$. **353.** $S\approx 53{,}95$ кв. ед. **354.** $S\approx 39{,}5$, т. е. формула трапеций дает более точное значение, чем формула прямоугольников.

355. Решение. $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx\approx 0{,}1571(0{,}1564+0{,}3090+0{,}4540+0{,}5878+0{,}7071+$ $+0{,}8090+0{,}8910+0{,}9511+0{,}9877+0{,}5000)\approx 0{,}9981$; $\delta=\frac{1-0{,}9981}{1}\cdot 100\%=$ $=0{,}19\%$. По сравнению с методом прямоугольников точность повысилась в $7{,}7:0{,}19\approx 40$ раз. **359.** Точное значение интеграла равно $\ln 2\approx 0{,}693174\ldots$. Значения интеграла, найденные по формулам прямоугольников (10) и (11), таковы: 0,7187 и 0,6687. Значение интеграла, найденное по формуле трапеций, есть 0,69377. **360.** Точное значение: $I=0{,}6931$. Значения, найденные по формуле прямоугольников (10) и по формуле трапеций, составляют 0,719 и 0,694. **361.** $\pi/4\approx 0{,}7854$; 0,81 и 0,76; 0,785. **364.** 140 м. **365.** 76 м. **367.** 126,3 м. **368.** 27 м. **369.** 15,5 м. **372.** Решение. $v(t)=18t-3t^2$; $18t-3t^2=0$; $t(6-t)=0$; $t_1=$ $=0$, $t_2=6$; $s=\int_0^6(18t-3t^2)\,dt=(9t^2-t^3)\Big|_0^6=324-216=108$ (м). **373.** 22,5 м.

374. 122,5 м. **375.** $s=78{,}4$ м. **376.** Решение. Имеем $\int\limits_0^2 (2t+a)=40$; $(t^2+at)\Big|_0^2=40$; $4+2a=40$, $a=18$. **377.** $a=20$. **379.** 200 м. **383.** 24 Дж. **384.** 0,2 Дж. **386.** 0,09 м. **387.** 49,05 Дж. **388.** 35 Дж. **390.** $1{,}47\cdot 10^6$ Н. **391.** $\approx 58{,}8$ Н. **393.** 84,5 Н. **394.** 5,49 Н. **396.** 1,46 Н. Указание: $y/0{,}1=x/0{,}08$, откуда $y=5x/4$. **397.** 0,5 Н. Указание: $10/y=4/x$, откуда $y=5x/2$. **398.** 104,6 Н. Указание: $y/0{,}2=x/0{,}4$, откуда $y=0{,}5x$. **399.** 2,12 Н. Указание: $a=0{,}04$, $b=0{,}1$, $y/0{,}09=(x-0{,}04)/0{,}06$, откуда $y=3(x-0{,}04)/2$. **401.** 183 580 800 Н. Указание: в силу симметрии фигуры относительно оси абсцисс рассмотреть ее половину. **402.** 68 649 Н. **405.** 220 000 Н. **406.** Решение. В треугольнике OCD (см. рис. 205) имеем $|CD|=\sqrt{R^2-x^2}$, т. е. $y/2=\sqrt{4-x^2}$, откуда $y=2\sqrt{4-x^2}$. Для нахождения искомой силы давления воспользуемся формулой $P=9{,}81\gamma\int\limits_{x_0}^{x_1} xy\,dx$, где $x_0=0$, $x_1=R=2$ м, $\gamma=800$ кг/м^3, $y=2\sqrt{4-x^2}$. Следовательно, $P=15\,696\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$. Полагая $\sqrt{4-x^2}=t$, находим $4-x^2=t^2$, $-2x\,dx=2t\,dt$, $x\,dx=-t\,dt$; при $x_0=0$ получим $t_0=2$, а при $x_1=2$ получим $t_1=0$. Значит, $\int\limits_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx=-\int\limits_2^0 t^2\,dt=-\frac{t^3}{3}\Big|_2^0=\frac{8}{3}$. Итак, $P=15\,696\cdot\frac{8}{3}=41\,856$ (Н). **407.** 52 200 Н.

Глава VI

2. Уравнения а), б), г), д) — дифференциальные. **4.** Решениями уравнения являются функции в) и г). **5.** Решением является функция $s=\frac{t^3}{3}+5$. **8.** Нет, так как $(9t^2-2)dt\neq(3t^2-2)dt$. **9.** Решение. $y=\sqrt{x}$; $y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$; $2yy'=1$. **10.** Нет, так как $(y^2+c)^2 2y\,dy\neq y\,dy$. **12.** $a=-2$. Указание: найти y' и подставить в данное уравнение. **14.** Функция $y=Ce^{2x}$ является решением уравнения б). **16.** $y=x^2+C$, $y=x^2+1$. **26.** а) Первый; б) второй; в) третий; г) пятый **29.** $y=\sqrt[3]{\frac{9}{4}(x^2+C^2)}$. **30.** $y^2=x-x^3+C$. **32.** $s=t^3-2t+1$. **34.** $y=C(x-1)$. **35.** $y^2=2(e^x+C)$. **36.** $y\sqrt{y}=3x\sqrt{x}+C$. **37.** $s=C\cos t$. **38.** $\operatorname{arctg} y=2\sqrt{x}+C$. **39.** $\ln x=2\sqrt{y}+C$. **44.** $y=C/x^2$. **45.** $y=x(1-Cx)$. **46.** $\ln y=-x^2+C$ или $y=e^{C-x^2}$. **47.** $y=0{,}5x^2+C$. **48.** Решение. $\frac{dy}{dx}=y^2\cos x$; $\frac{dy}{y^2}=\cos x\,dx$; $-\frac{1}{y}=\sin x+C$; $y=-\frac{1}{\sin x}+C$. **49.** $y=e^{x+C}-1$. **50.** $x=C/(t-1)$. **51.** $(1-y)\sqrt{1+2x^2}=C$. **54.** $y=\sqrt{0{,}5x^2-1}$. **55.** $y=2(1+x^3)$. **56.** $y=2(1+x^2)$. **58.** Решение. 1^0) $\frac{dy}{dx}+\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} y}=0$; 2^0) $\operatorname{ctg} y\,dy=-\operatorname{tg} x\,dx$; 3^0) $\int\operatorname{ctg} y\,dy=-\int\operatorname{tg} x\,dx$; $\ln|\sin y|=\ln|\cos x|+\ln|C|$; $\sin y=C\cos x$; 4^0) $\sin\frac{\pi}{6}=C\cos\frac{\pi}{3}$; $\frac{1}{2}=C\cdot\frac{1}{2}$; $C=1$; 5^0) $\sin y=\cos x$; $y=\arcsin\cos x$. **59.** $y=-2\cos x$. **61.** $y=-x^2+4$. **62.** $y=\frac{1}{4}x^2+C$. **63.** $y=\frac{1}{3}x^3$. **64.** $y=-x+4$. **66.** $s=t^3+t^2+4$. **68.** Решение. Имеем $\frac{ds}{dt}=kt$; $ds=kt\,dt$; $s=k\frac{t^2}{2}+C$.

Частное решение определяется из системы уравнений $20=50k+C$, $35=$ $=200k+C$. Решив эту систему, получим $C=15$, $k=0{,}1$. Следовательно, уравнение движения имеет вид $s=0{,}05t^2+15$, а путь, пройденный телом за 1 мин 40 с, есть $s=0{,}05\cdot 100^2+15=515$ (м). **69.** $s=5\cdot 2^{t-1}$; 160 м. **71.** Решение. Пусть x — количество бактерий в момент t. Тогда дифференциальное уравнение задачи имеет вид $\frac{dx}{dt}=kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Отсюда после интегрирования находим $x=Ce^{kt}$. Для определения C используем начальное условие $x=100$ при $t=0$. Значит, $C=100$, т. е. $x=100e^{kt}$. Коэффициент пропорциональности k определяем из дополнительного условия $x=200$ при $t=3$. Имеем $200=100e^{3k}$ или $2=e^{3k}$, и, следовательно, $e^k=2^{1/3}$. Поэтому искомая функция есть $x=100\cdot 2^{t/3}$, откуда при $t=9$ получаем $x=800$. Следовательно, в течение 9 ч количество бактерий увеличится в 8 раз. **73.** $m_0/\sqrt{2}$. **75.** Решение. Пусть T — температура тела в момент t. Тогда получим дифференциальное уравнение $\frac{dT}{dt}=k(T-15)$. Общее решение этого уравнения имеет вид $\ln(T-15)=kt+C$. Заменив kt на $\ln e^{kt}$, а C на $\ln C$, получим $\ln(T-15)=\ln e^{kt}+\ln C$, т. е. $T-15=Ce^{kt}$. Из условия следует, что $T=90°$ при $t=0$, откуда $C=75$. Поэтому соответствующее частное решение есть $T-$ $-15=75e^{kt}$. Теперь нужно определить k, но удобнее найти e^k. Для этого используем условие $T=40°$ при $t=30$ мин; тогда $40-15=75e^{30k}$; $e^{30k}=\frac{25}{75}=\frac{1}{3}$, откуда $e^k=\left(\frac{1}{3}\right)^{1/30}$. Подставляя это значение в полученное частное решение, имеем $T-15=75\left(\frac{1}{3}\right)^{t/30}$. Наконец, определим T при $t=60$ мин: $T=75\times$ $\times\left(\frac{1}{3}\right)^2+15=23\frac{1}{3}$ °С. **76.** 35,6 °С. **77.** а) 56 °С; б) 4 ч 11 мин. **79.** а) Нет, так как уравнение содержит y^2; б) да; в) да. **83.** $y=\frac{x^3}{5}+\frac{C}{x^2}$. **84.** $y=1+Ce^{-x^2}$. **85.** $y=Ce^{2x}-\frac{3}{2}$. **86.** $y=x\left(C-\frac{1}{x^2}\right)$. **87.** $y=\sin x+C\cos x$. Указание: разделить все члены уравнения на $\cos x\,dx$. **88.** Решение. Умножив все члены данного уравнения на $\sin x$, получим линейное уравнение $y'-y=2e^x\sin x$. Пусть $y=uv$; тогда $y'=u'v+v'u$ и уравнение примет вид $u'v+v'u-uv=$ $=2e^x\sin x$ или $v(u'-u)+v'u=2e^x\sin x$ (*). Выбрав функцию u так, чтобы выражение $u'-u$ обратилось в нуль, получим уравнение $u'-u=0$ или $\frac{du}{dx}=u$, т. е. $\frac{du}{u}=dx$. Отсюда находим $\int\frac{du}{u}=\int dx$; $\ln u=x$; $u=e^x$. Теперь уравнение (*) приводится к виду $v'e^x=2e^x\sin x$ или $v'=2\sin x$, т. е. $dv=2\sin x\,dx$. Интегрируем: $\int dv=2\int\sin x\,dx$; $v=-2\cos x+C$. Так как $y=uv$, то после замены u на v их выражениями окончательно получим $y=e^x(C-2\cos x)$. **89.** $y=\frac{1}{2}(x+1)^4+$ $+C(x+1)^2$ **90.** $y=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{4}+C\right)e^{x^2}$. **91.** $y=C\sqrt{1+x^2}-2$. **92.** $y=\frac{x^3}{5}+$ $+\frac{C}{x^2}$. **94.** Решение. Пусть $y=uv$; тогда $y'=uv'+vu'$ или $y'=u\frac{dv}{dx}+$ $+v\frac{du}{dx}$ и данное уравнение примет вид $u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}-uv\operatorname{tg}x=\frac{1}{\cos^3 x}$ или $u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}-u\operatorname{tg}x\right)=\frac{1}{\cos^3 x}$ (*). Приравниваем выражение в скобках нулю: $\frac{du}{dx}-u\operatorname{tg}x=0$. Отсюда $\frac{du}{u}=\operatorname{tg}x\,dx$ и, значит, $\int\frac{du}{u}=\int\operatorname{tg}x\,dx$; $\ln u=$

$= -\ln\cos x$; $u = \dfrac{1}{\cos x}$. Подставив u в уравнение (*), получим $\dfrac{1}{\cos x}\cdot\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{\cos^3 x}$; $\dfrac{dv}{dx} = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; $dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x}$. Интегрируя, находим $\int dv = \int\dfrac{dx}{\cos^2 x}$; $v = \operatorname{tg} x + C$. Так как $y = uv$, то общее решение имеет вид $y = \dfrac{1}{\cos x}(\operatorname{tg} x + C)$. Чтобы найти частное решение, подставим значения $y = 0$, $x = 0$ в общее решение: $0 = \dfrac{1}{\cos 0}(\operatorname{tg} 0 + C)$; $0 = 0 + C$; $C = 0$. Итак, искомое частное решение имеет вид $y = \dfrac{1}{\cos x}\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$. **95.** $y = \dfrac{x^3+5}{3x}$. **96.** $y = e^{2x}(-3x+1)$. **97.** $y = \dfrac{x}{\cos x}$. **98.** $y = \dfrac{1}{2}x^3$. **99.** $y = \cos^2 x\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{4}\sin 2x - 1\right)$. **100.** $y = -\dfrac{1+\cos x}{x^2}$. **101.** $x\times\times(x-y) = 3$. **103.** $y = (1-e)^{-3x}/3$. **104.** $y = (3-e^{2x})/2$. **108.** $x = \dfrac{y^2}{3} + \dfrac{C}{y}$. Указание: уравнение $y'(y^2 - x) = y$ становится линейным, если независимой переменной считать y, т. е. записать это уравнение в виде $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{y^2 - x}$ или $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{y^2-x}{y}$, откуда $x' + \dfrac{1}{y}x = y$. **109.** $x = \dfrac{y^4+4C}{4y}$. **112.** $y = C_1x + C_2$. **113.** $y = \dfrac{5}{2}x^2 + C_1x + C_2$. **114.** $y = \dfrac{1}{6}x^3 + C_1x + C_2$. **115.** $y = \dfrac{1}{2}x^3 + C_1x + C_2$. **116.** $y = \dfrac{1}{20}x^5 + C_1x + C_2$. **117.** $y = -\cos x + C_1x + C_2$. **118.** $s = \dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 + C_1t + C_2$. **119.** $y = 3x^3 + x^2 + C_1x + C_2$. **122.** $y = 2x^2 - x$. **123.** Решение. Имеем $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{t^2}{2} + t + C_1$; $s = \dfrac{t^3}{6} + \dfrac{t^2}{2} + C_1t + C_2$ — общее решение. Полагая в этих равенствах $t = 0$, находим $C_1 = -\dfrac{11}{6}$; $C_2 = 2$. Следовательно, $s = \dfrac{1}{6}t^3 + \dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{11}{6}t + 2$. **124.** Решение. Имеем $y' = x - x^2 + C_1$, $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$. Подставив в последнее уравнение поочередно координаты данных точек и решив полученную систему уравнений, найдем $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Тогда получим $y = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - x + 1$. **125.** $y = \dfrac{1}{12}x^4 + 2x$. **126.** $y = -\sin x + 3x$. **127.** $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \ln|x| - x - \dfrac{1}{2}$. **130.** $s = v_0 - \dfrac{st^2}{2}$. **131.** $s = \dfrac{t^4}{12} + \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{2t'}{3} + \dfrac{37}{12}$. **132.** $s = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{3t^2}{2}$. **133.** Решение. $a = s'' = t^2 + t$; $v = s' = \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^2}{2} + c_1$; $s = \dfrac{t^4}{12} + \dfrac{t^3}{6} + C_1t + C_2$. Так как $v(0) = 0$, а $s(0) = 0$, то $C_1 = 1$; $C_2 = 0$. Следовательно, закон движения тела имеет вид $s = \dfrac{1}{12}t^4 + \dfrac{1}{6}t^3 + t$. При $t = 2$ получим $s = \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{3} + 2 = \dfrac{14}{3}$, $v = \dfrac{8}{3} + 2 + 1 = \dfrac{17}{3}$. **135.** Решение. Полагая $y = e^{kx}$, получим $e^{kx}(k^2 - 4k + 3) = 0$ или $k^2 - 4k + 3 = 0$. Решив это уравнение, находим $k_1 = 1$, $k_2 = 3$. Частными решениями являются функции $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{3x}$. Следовательно, общее решение имеет вид $y = C_1e^x + C_2e^{3x}$. **137.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-3x}$. **138.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{-x}$. **139.** Решение. Так как $y = C_1e^{-2x} + C_2e^x$, то $y' = -2C_1e^{-2x} + C_2e^x$, $y'' = 4C_1e^{-2x} + C_2e^x$. Подставив эти выражения в данное уравнение, получим $4C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2C_1e^{-2x} + C_2e^x - 2(C_1e^{-2x} + C_2e^x) = e^{-2x}(4C_1 - 2C_1 - 2C_1) + e^x(C_2 + C_2 - 2C_2) = 0$. **141.** $y = 2e^{3x}$. **144.** $y = (C_1 + C_2x)e^{-3x}$. **145.** $y = (C_1 + C_2x)e^{5x}$. **147.** $y = e^{2x}(-7x+3)$. **148.** $y = e^{-3x}(2 + 7x)$. **150.** Решение. Находим корни характеристического уравнения $k^2 + 2k + 5 = 0$: $k_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-5} = -1 \pm \sqrt{4(-1)} = -1 \pm 2\sqrt{-1} = -1 \pm 2i$.

Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **151.** $y = e^{-x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$. **153.** Решение. Составляем характеристическое уравнение $k^2 + 2k + 5 = 0$ и находим его корни: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$. Следовательно, общее решение имеет вид $y = e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. Дифференцируя общее решение, получим $y' = -e^{-x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x) + e^{-x}(-2C_1\sin 2x + 2C_2\cos 2x)$ или $y' = e^{-x}((2C_2 - C_1)\cos 2x - (2C_1 + C_2)\sin 2x)$. Постоянные C_1 и C_2 находим из начальных условий: $0 = e^{-0}(C_1\cos 0 + C_2\sin 0)$; $1 = e^{-0}((2C_2 - C_1)\cos 0 - (2C_1 + C_2)\sin 0)$. Отсюда $C_1 = 0$ и $C_2 = 1/2$. Итак, искомым частным решением является функция $y = \frac{1}{2}e^{-x}\sin 2x$. **154.** $y = e^{-x}(\cos x + 2\sin x)$. **155.** $y = e^{-2x}(\cos\sqrt{3}x + \sqrt{3}\sin\sqrt{3}x)$. **156.** Решение. Заменив y'' и y' величинами k^2 и k, получаем характеристическое уравнение $k^2 + 3k = 0$. Решив это уравнение, находим $k_1 = 0$, $k_2 = -3$, откуда $y_1 = e^0$, $y_2 = e^{-3x}$. Следовательно, общим решением является функция $y = C_1e^0 + C_2e^{-3x} = C_1 + C_2e^{-3x}$. **157.** $y = e^{-12x}(C_1 + C_2x)$. **158.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$. **159.** $y = e^x(C_1\cos x\sqrt{2} + C_2\sin x\sqrt{2})$. **160.** $y = e^{-x/2}\left(C_1\sin x\frac{\sqrt{3}}{2} + C_2\cos x\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. **161.** $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$. **162.** $y = e^{-3x}\times(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **163.** $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$. **164.** $y = e^x(C_1 + C_2x)$. **165.** $y = e^{-6x}(C_1 + C_2x)$. **166.** $y = e^{ax}(C_1 + C_2x)$. **167.** $y = C_1 + C_2e^{8x}$. **168.** $y = C_1e^x + C_2e^{-11x}$. **169.** $y = e^{-7x}(C_1 + C_2x)$. **170.** $y = C_1e^{4x} + C_2e^{-3x}$. **171.** $y = e^{2x}(C_1\times\cos x\sqrt{6} + C_2\sin x\sqrt{6})$. **172.** $y = C_1\cos 7x + C_2\sin 7x$. **173.** $y = C_1e^{-x} + C_2e^{-19x}$. **174.** $y = C_1e^{\sqrt{a}x} + C_2e^{-\sqrt{a}x}$. **175.** $y = e^{2x}(C_1\cos 4x + C_2\sin 4x)$. **176.** $y = e^{11x}(C_1 + C_2x)$. **177.** $y = C_1e^{2x} + C_2e^{5x}$. **178.** $y = e^{2x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **179.** $y = e^{-3x}(C_1\cos 2x + C_2\sin 2x)$. **180.** $y = e^{-x} - 2e^{-2x}$. **181.** $y = e^{-x}(\cos 2x + \sin 2x)$. **182.** $y = e^{x\sqrt{2}}\times(2e^{2x\sqrt{2}} - 5)$. **183.** $y = \cos 2x + \sin 2x$. **184.** Решение. Характеристическое уравнение $k^2 + 4k + 4 = 0$ имеет равные корни: $k_1 = k_2 = -2$. Общим решением уравнения является функция $y = e^{-2x}(C_1 + C_2x)$. Полагая в общем решении $x = 0$, $y = 1$, находим $1 = (C_1 + C_2\cdot 0)e^{-2\cdot 0}$, т. е. $C_1 = 1$. Продифференцировав общее решение и подставив начальные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$ и значение $C_1 = 1$, получим $y' = e^{-2x}(C_2 - 2C_1 - 2C_2x)$; $-1 = (C_2 - 2\cdot 1 - 2C_2\cdot 0)e^0$; $C_2 = 1$. Итак, искомое частное решение имеет вид $y = (1 + x)e^{-2x}$. **185.** $y = 2e^{5x}(1 - 2x)$. **186.** $y = 0{,}5(e^x - e^{-x})$. **187.** $y = 2(e^{2x} + e^{-4x})$. **188.** $y = 2e^x(2 - x)$.

Глава VII

3. 116. **4.** 4. **5.** 1. **6.** $(n+1)(n-1)!$. **7.** $(n-2)!$. **8.** $1/(n(n+1)(n+2))$. **9.** $n(n-1)$. **10.** $n/(n+1)!$. **11.** $(k-1)/k!$ **12.** 120. **13.** 24. **14.** 5. **15.** 4845. **16.** $x(x+1)/2$. **20.** 720. **21.** 95 040. **22.** 360. **23.** 600. **24.** 154 400. **25.** 15. **26.** 210. **27.** 5040. **28.** 336. **29.** 60. **31.** 4060. **32.** 3003. **33.** 9. **34.** 18. **35.** 376 992. **36.** Решение. Солдат в дозор можно выбрать $C_{80}^3 = 80!/(77!3!) = 82\,160$ способами, а офицеров $C_3^1 = 3$ способами. Так как с каждой командой из солдат может пойти любой офицер, то всего имеется 216 480 способов. **37.** Да. **38.** A — достоверное событие; D — невозможное событие; B и C — противоположные события. Полную группу событий составляют A и D, B и C. **39.** Выпадение 7 очков — невозможное событие, от 1 до 6 очков — достоверные события, **41.** 0,95. **42.** 0,8. **43.** 1/60. **45.** а) 136/465; б) 91/465. **46.** 1/10. **47.** $1/n!$. **48.** 1/120. **50.** 31/66. **52.** Событие $A_1 + A_2$ означает появление либо белого, либо черного шара. **53.** Событие $A + B$ означает выход всей цепи из строя. **54.** Событие $\bar{A}$ означает сумму событий «появление любой другой цифры». **55.** Событие $\bar{A}$ означает, что все лампочки стандартны. **56.** 0,4. **57.** 23/38. **58.** 11/15. **59.** 11/12. **60.** Да. **64.** 7/16. **68.** 0,72. **69.** 1/216. **70.** 125/216. **71.** Решение. Пусть A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 — события, состоящие в выходе из строя соответственно первого, второго, третьего, четвертого и пятого блоков. Тогда надежность всей системы составит $P(A) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) = 0{,}0024$. **72.** 0,1785. **73.** 21/64. **76.** 0,028. **77.** 0,51. **78.** 0,89. **82.** 0,1715. **83.** 0,2753. **84.** 0,9298. **85.** 0,488. **86.** 0,2.

88.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

89.

x_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
p_i	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

90.

x_i	0	1	2	3
p_i	$\frac{1}{35}$	$\frac{2}{35}$	$\frac{8}{35}$	$\frac{4}{35}$

92.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,343	0,441	0,189	0,027

93.

x_i	0	1	2	3
p_i	0,729	0,243	0,027	0,001

94.

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,96059601	0,03881196	0,00058806	0,00000396	0,00000001

97. 45/32.

Оглавление