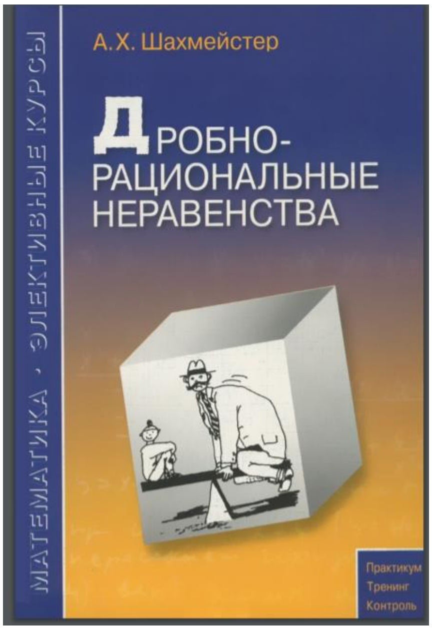
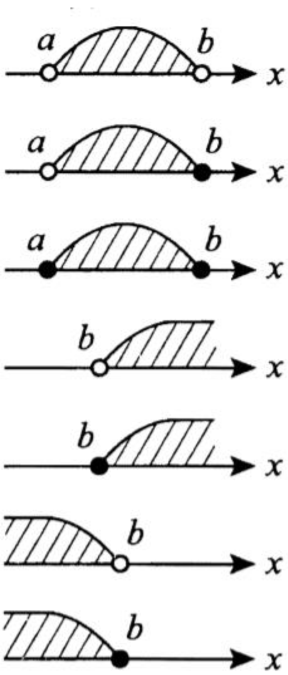
Метод интервалов (решение неравенств)



В математике не надо придумывать ничего, что усложнило бы решение задачи.
Откройте правильный учебник, и вы увидите, как все просто.
Метод интервалов – большинство неравенств решается с помощью этого метода.

Обозначений промежутков



$a < x < b$ — запись $(a; b)$;

$a < x \leqslant b$ — запись $(a; b]$;

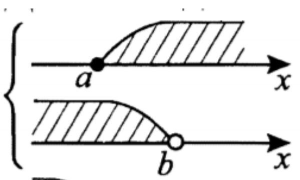
$a \leqslant x \leqslant b$ — запись $[a; b]$;

$x > b$ — запись $(b; +\infty)$;

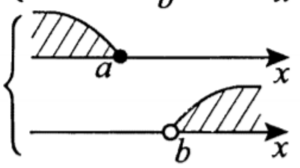
$x \geqslant b$ — запись $[b; +\infty)$;

$x < b$ — запись $(-\infty; b)$;

$x \leqslant b$ — запись $(-\infty; b]$.



$(-\infty; b) \cap [a; +\infty)$;



$(-\infty; a] \cup (b; +\infty)$.

Для решения неравенства необходимо:

а) разложить функцию на множители в каноническом виде (т.е. все коэффициенты при x должны быть положительными);

б) найти все корни функции и отметить их на числовой оси в порядке возрастания;

в) распределение знаков функции начинается всегда справа сверху (в виде змейки) и чередуется при прохождении корней функции;

г) если требуется знать, когда значения функции положительны, т.е. $f(x) > 0$, то записываются интервалы, описываемые змейкой над осью. А если требуется знать, когда значения функции отрицательны, т.е. $f(x) < 0$, то интервалы, описываемые змейкой под осью.

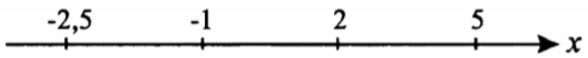
Найдем интервалы, для которых

$(x + 2{,}5)(x - 2)(x - 5)(x + 1) < 0.$

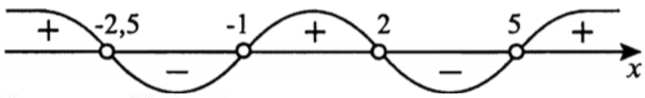
Очевидно, что вид канонический (т.е. все коэффициенты положительны). Найдем корни, т.е.

$$\left[\begin{array}{l} x + 2{,}5 = 0 \\ x - 2 = 0, \\ x - 5 = 0, \\ x + 1 = 0; \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = -2{,}5 \\ x = 2, \\ x = 5, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

Отметим их на числовой оси,



а затем проведем змейку, начиная ее справа, сверху.

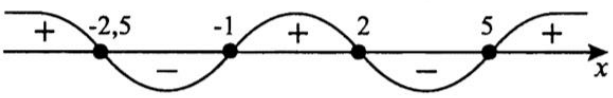


Так как $f(x) < 0$, то рассмотрим интервалы под числовой осью, описываемой змейкой, т.е. $-2{,}5 < x < -1$; $2 < x < 5$.

Примечание. Неравенство строгое, поэтому корни на оси отмечаются кружочками, не заштрихованными внутри. Ответ можно записать в виде интервалов: $(-2{,}5; -1) \cup (2; 5)$.

Выясним, на каких промежутках
$(x + 2{,}5)(x - 2)(x - 5)(x + 1) \geqslant 0.$

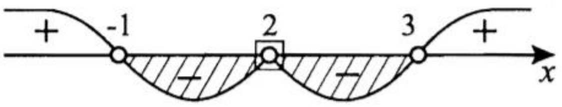
Рассуждая аналогично, получим



Теперь будем рассматривать интервалы над осью, включая сами корни, тогда все значения x из $[-2{,}5; -1] \cup [2; 5]$ есть решение неравенства.

$(x-2)^2(x+1)(x-3) < 0.$

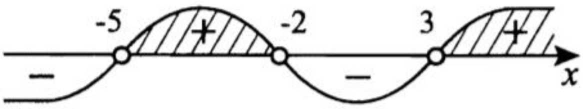
В этом примере корень выражения $x=2$ двойной кратности, а значит, выражение при прохождении этого корня <u>дважды</u> меняет знак на противоположный (такой корень будем обозначать квадратиком).



Ответ: $(-1;2)\cup(2;3)$.

$$\frac{(x+5)(x-3)}{x+2} > 0.$$

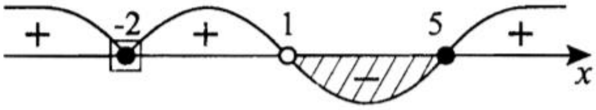
Интересно, что метод годится и для дробно-рациональных неравенств. Действительно, ведь чередование знаков не зависит от того, произведение сомножителей дано или их частное.



Ответ: $(-5;-2)\cup(3;+\infty)$.

$$\frac{(x-5)(x+2)^2}{x-1} \leqslant 0.$$

Очень любопытно, что корень $x=-2$ есть решение неравенства, т.е. в данном случае $x=-2$ как бы приклеенная точка.



Ответ: $(1;5]\cup\{-2\}$.

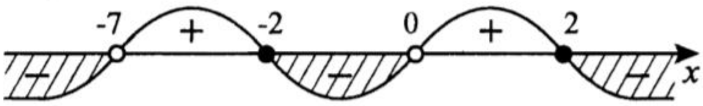
$$\frac{4-x^2}{(x+7)x} \leqslant 0.$$

Этот пример интересен тем, что не все коэффициенты при x положительны, а значит в чистом виде методом пользоваться нельзя. Какой же выход? Можно решать стандартным способом, умножив обе части неравенства на (-1), не забыв при этом поменять смысл[2] неравенства на противоположный. Приведем к каноническому виду:

$$\frac{(2-x)(2+x)}{(x+7)x} \leqslant 0 \quad \times(-1) \Leftrightarrow \frac{(x-2)(2+x)}{(x+7)x} \geqslant 0.$$

Ответ: $(-\infty;-7) \cup [-2;0) \cup [2;+\infty)$.

Но можно иначе, не меняя смысл неравенства. Действительно, $\dfrac{(2-x)(2+x)}{(x+7)x} \leqslant 0$. Подумаем, что значит "неканонический" вид. Это значит на самом правом интервале функция принимает отрицательные значения, а это значит, что распределение знаков нужно начинать справа снизу.

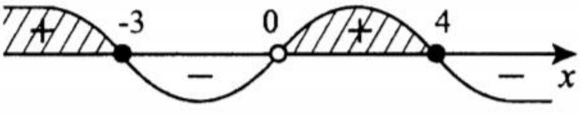


Ответ тот же: $(-\infty;-7) \cup [-2;0) \cup [2;+\infty)$.

$$\frac{12+x-x^2}{x} \geqslant 0.$$

$12+x-x^2 = -(x+3)(x-4)$.

$\dfrac{-(x+3)(x-4)}{x} \geqslant 0$ — неканонический вид.



Ответ: $(-\infty;-3] \cup (0;4]$.

Для того, чтобы использовать метод интервалов для решения неравенств, необходимо:

1. Разложить $f(x)$ на множители;
2. Определить вид разложения функции:
   а) если вид канонический, то распределение знаков функции начинается всегда справа сверху, и знаки чередуются;
   б) если вид неканонический, то распределение знаков функции начинается всегда справа снизу, и знаки чередуются, проходя корни функции;
3. Уточнить кратность корней: если есть корни четной кратности, то, проходя через них, функция дважды меняет свой знак на противоположный; если есть корни нечетной кратности, то, проходя через них, функция меняет свой знак на противоположный;
4. Обратить внимание на то, какое дано неравенство, строгое или нет, так как в зависимости от этого на оси абсцисс нужно отметить или незаштрихованные (полые) точки, или заштрихованные точки;
5. Для дробных неравенств не забыть отметить на оси абсцисс корни знаменателя как полые точки;
6. Для нестрогого дробного неравенства при наличии корней в разложении и в числителе, и в знаменателе на оси абсцисс отметить полые точки.

Материалы учебного пособия
Шахмейстер А.Х.
Ш32 Дробно-рациональные неравенства. — 3-е изд., исправленное и дополненное — М.: Издательство МЦНМО : СПб.: «Петроглиф»: «Виктория плюс», 2008. — 248 с.: илл. — ISBN 978-5-94057-382-1, ISBN 978-5-98712-020-0, ISBN 978-5-91281-044-2.