Вводная глава

§ 1. Формулы сокращенного умножения и их применение

1. Формулы сокращенного умножения

Запишем все формулы сокращенного умножения:

I. $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.
II. $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$.
III. $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
IV. $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$.
V. $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$.
VI. $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$.
VII. $(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$.

В следующих пунктах мы рассмотрим применение этих формул.

2. Квадрат суммы и разности двух чисел

Сначала рассмотрим формулы I и II, которые можно объединить следующим образом:

$$(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2,$$

т. е. *квадрат суммы* (соответственно *разности*) *двух чисел равен квадрату первого числа, плюс (минус) удвоенное произведение первого числа на второе, плюс квадрат второго числа.*

1—10. Выполнить действия:

1. а) $(x+3y)^2$; б) $(2x+3y)^2$; в) $(m^3+n^5)^2$; г) $(5x+3y)^2$; д) $(3m^5-4n^2)^2$.

Решение. а) $(x+3y)^2=x^2+2(x\cdot 3y)+(3y)^2=x^2+6xy+9y^2$;

б) $(2x+3y)^2=(2x)^2+2(2x\cdot 3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$;

в) $(m^3+n^5)^2=(m^3)^2+2(m^3n^5)+(n^5)^2=m^6+2m^3n^5+n^{10}$.

Напомним, что при возведении степени числа в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются: $(m^3)^2=m^6$, $(n^5)^2=n^{10}$;

г) $(5x-3y)^2=(5x)^2-2\cdot 5x\cdot 3y+(3y)^2=25x^2-30xy+9y^2$;

д) $(3m^5-4n^2)^2=(3m^5)^2-2\cdot 3m^5\cdot 4n^2+(4n^2)^2=9m^{10}-24m^5n^2+16n^4$.

2. $(x+3)^2$. **3.** $(5x-2y)^2$. **4.** $(a^2-b^2)^2$.

5. $(a^2+1)^2$. **6.** $(c^3-1)^2$. **7.** $(a-0{,}5)^2$.

8. $(m^2n^3-mn)^2$. **9.** $\left(\frac{1}{2}xy^2+x\right)^2$. **10.** $(2x^m-3y^n)^2$.

11—15. Представить в виде квадрата двучлена следующие трехчлены:

11. а) x^2+2x+1; б) $m^2-4mn+4n^2$.

Решение. а) $x^2+2x+1=(x)^2+2\cdot x\cdot 1+1^2=(x+1)^2$;

б) $m^2-4mn+4n^2=(m)^2-2(m\cdot 2n)+(2n)^2=(m-2n)^2$.

12. $m^2-6mn+9n^2$. **13.** $4a^2+4ab+b^2$.

14. $m^6+2m^3n^4+n^8$. **15.** $25x^2+20xy+4y^2$.

16—21. Дополнить до полного квадрата двучлена следующие выражения:

16. $m^2-2mn+?$. **17.** $25x^2+?+49b^2$.

18. $4a^2+12ab+?$. **19.** $1-2a+?$

20. $?-10b+25b^2$. **21.** $a^6-?+b^4$.

22—26. Выделить квадрат суммы или разности:

22. $a^2+6a+13$.

Решение. $a^2+6a+13=a^2+6a+9+4=(a+3)^2+4$.

23. x^2+8x. **24.** x^2-2x+3.

25. $x^2-10x+27$. **26.** x^2+6x-3.

27—33. Используя формулы $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$, вычислить:

27. а) 51^2; б) 39^2.

Решение. а) $51^2=(50+1)^2=50^2+2\cdot 50\cdot 1+1=2500+100+1=2601$;

б) $39^2=(40-1)^2=40^2-2\cdot 40\cdot 1+1^2=1600-80+1=1521$.

28. 103^2. **29.** 99^2. **30.** 78^2. **31.** 33^2.

32. $10{,}5^2$. **33.** $5{,}1^2$. **34.** $6{,}9^2$. **35.** $10{,}2^2$.

3. Куб суммы и разности двух чисел

Рассмотрим теперь формулы III и IV:

$$(a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3,$$

т. е. *куб суммы* (соответственно *разности*) *двух чисел равен кубу первого числа, плюс (минус) утроенное произведение квадрата первого числа на второе, плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго, плюс (минус) куб второго числа.*

36—45. Выполнить действия:

36. а) $(a+2b)^3$; б) $(5a-b)^3$; в) $(2a+3b)^3$; г) $(m^3-n^2)^3$.

Решение.

а) $(a+2b)^3=a^3+3a^2(2b)+3a(2b)^2+(2b)^3=a^3+6a^2b+12ab^2+8b^3$;

б) $(5a-b)^3=(5a)^3+3(5a)^2(-b)+3\cdot 5a(-b)^2+(-b)^3=125a^3-$ $-75a^2b+15ab^2-b^3$;

в) $(2a+3b)^3=(2a)^3+3(2a)^2\cdot 3b+3\cdot 2a(3b)^2+(3b)^3=8a^3+36a^2b+$ $+54ab^2+27b^3$;

г) $(m^3-n^2)^3=(m^3)^3+3(m^3)^2(-n^2)+3m^3(-n^2)^2+(-n^2)^3=m^9-$ $-3m^6n^2+3m^3n^4-n^6$.

37. $(2+a)^3$. **38.** $(x-2)^3$. **39.** $(x+3)^3$.

40. $(c-3d)^3$. **41.** $(3x+5y)^3$. **42.** $(a^2+b^2)^3$.

43. $(a^3-b^3)^3$. **44.** $(2m^2-3n^4)^3$. **45.** $(x^n-1)^3$.

46. Доказать, что:

$a^3+3ab(a+b)+b^3=(a+b)^3$; $a^3-3ab(a-b)-b^3=(a-b)^3$.

4. Разность квадратов двух чисел

Рассмотрим формулу V:

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2,$$

т. е. *произведение суммы двух чисел на их разность равно разности квадратов этих чисел.*

47—55. Выполнить действия:

47. а) $(a+1)(a-1)$; б) $(2a+3)(2a-3)$; в) $(m^3-n^5)(n^5+m^3)$; г) $(3m^2-5n^2)(3m^2+5n^2)$.

Решение. а) $(a+1)(a-1)=a^2-1^2=a^2-1$;

б) $(2a+3)(2a-3)=(2a)^2-3^2=4a^2-9$;

в) $(m^3-n^5)(n^5+m^3)=(m^3)^2-(n^5)^2=m^6-n^{10}$;

г) $(3m^2-5n^2)(3m^2+5n^2)=(3m^2)^2-(5n^2)^2=9m^4-25n^4$.

48. $(5x-y)(5x+y)$. **49.** $(2a+3b)(2a-3b)$.

50. $(3y+5x)(5x-3y)$. **51.** $(c^3+d^3)(c^3-d^3)$.

52. $(2xy-1)(2xy+1)$. **53.** $(1+3ab)(1-3ab)$.

54. $(5a^2-3b)(5a^2+3b)$. **55.** $(a^n+b^n)(a^n-b^n)$.

56—65. Используя формулу $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$, вычислить:

56. а) $29\cdot 31$; б) 86^2-14^2.

Решение. а) $29\cdot 31=(30-1)(30+1)=30^2-1^2=900-1=899$; б) $86^2-14^2=(86+14)(86-14)=100\cdot 72=7200$.

57. $61\cdot 59$. **58.** $19{,}9\cdot 20{,}1$. **59.** $15{,}2\cdot 14{,}8$.

60. $7{,}2\cdot 6{,}8$ **61.** $4{,}01\cdot 3{,}99$. **62.** $33\cdot 27$.

63. 35^2-25^2. **64.** 64^2-36^2. **65.** 37^2-23^2.

5. Сумма и разность кубов двух чисел

Рассмотрим, наконец, формулы VI и VII:

$$(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)=a^3\pm b^3,$$

т. е. *произведение суммы* (соответственно *разности*) *двух чисел на неполный квадрат разности* (*суммы*) *этих чисел равно сумме* (*разности*) *кубов этих чисел.*

66—72. Применяя формулы суммы и разности кубов, вычислить:

66. а) $(x+y)(x^2-xy+y^2)$; б) $(x+3)(x^2-3x+9)$; в) $(x-1)(x^2+x+1)$; г) $(2x-3)(4x^2+6x+9)$.

Решение. а) $(x+y)(x^2-xy+y^2)=x^3+y^3$;

б) $(x+3)(x^2-3x+9)=x^3+27$;

в) $(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$;

г) $(2x-3)(4x^2+6x+9)=(2x)^3-3^3=8x^3-27$.

67. $(a+1)(a^2-a+1)$. **68.** $(2a+3)(4a^2-6a+9)$.

69. $(x-2)(x^2+2x+4)$. **70.** $(1+m^2)(1-m^2+m^4)$.

71. $\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(n^2-\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$. **72.** $\left(\frac{1}{2}a-2b\right)\left(\frac{1}{4}a^2+ab+4b^2\right)$.

73—76. Упростить выражения:

73. $2x^3+9-(x+1)(x^2-x+1)$.

74. $a(a+2)(a-2)-(a-3)(a^2+3a+9)$.

75. $3(m-1)^2+(m-2)(m^2-2m+4)-(m+1)^3$.

76. $3(x+2)^2+(2x-1)^2-7(x+3)(x-3)$.

6. Решение примеров на все формулы сокращенного умножения

77. Упростить выражение

$$\frac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\frac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}.$$

Решение. В числителе и знаменателе каждой дроби вынесем за скобки общий множитель:

$$\frac{3a^2+3ab+3b^2}{4a+4b}\cdot\frac{2a^2-2b^2}{9a^3-9b^3}=\frac{3(a^2+ab+b^2)}{4(a+b)}\cdot\frac{2(a^2-b^2)}{9(a^3-b^3)}.$$

Используя формулы разности квадратов и разности кубов, получим

$$\frac{3(a^2+ab+b^2)\cdot 2(a-b)(a+b)}{4(a+b)\cdot 9(a-b)(a^2+ab+b^2)}=\frac{3\cdot 2}{4\cdot 9}=\frac{1}{6}$$

78. Выполнить действия:

$$2n-\left(\frac{2n-3}{n+1}-\frac{n+1}{2-2n}-\frac{n^2+3}{2n^2-2}\right)\frac{n^3+1}{n^2-n}.$$

Решение. Сначала выполним действия в скобках:

$$\frac{2n-3}{n+1}-\frac{n+1}{2-2n}-\frac{n^2+3}{2n^2-2}=\frac{2n-3}{n+1}-\frac{n+1}{2(1-n)}-\frac{n^2+3}{2(n^2-1)}=$$

$$=\frac{2n-3}{n+1}+\frac{n+1}{2(n-1)}-\frac{n^2+3}{2(n^2-1)}=\frac{(2n-3)(n-1)\cdot 2+(n+1)(n+1)-(n^2+3)}{2(n^2-1)}=$$

$$=\frac{4n^2-6n-4n+6+n^2+2n+1-n^2-3}{2(n^2-1)}=\frac{4n^2-8n+4}{2(n^2-1)}=\frac{4(n-1)^2}{2(n-1)(n+1)}=\frac{2(n-1)}{n+1}.$$

Затем произведем умножение:

$$\frac{2(n-1)}{n+1}\cdot\frac{n^3+1}{n^2-n}=\frac{2(n-1)(n+1)(n^2-n+1)}{(n+1)n(n-1)}=\frac{2(n^2-n+1)}{n}.$$

Наконец, выполним вычитание:

$$2n-\frac{2(n^2-n+1)}{n}=\frac{2(n^2-(n^2-n+1))}{n}=\frac{2(n^2-n^2+n-1)}{n}=\frac{2(n-1)}{n}.$$

79—85. Выполнить указанные действия:

79. $\left[\left(\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{x^3-y^3}\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right):\frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right]\frac{3}{x+y}.$

80. $\frac{a-c}{a^2+ac+c^2}\cdot\frac{a^3-c^3}{a^2b-bc^2}\left(1+\frac{c}{a-c}-\frac{1+c}{c}\right):\frac{c(1-c)-a}{bc}.$

81. $\left[\frac{a^2}{a^2-b^2}-(a^2-ab+b^2):\frac{a^3+b^3}{a}\right]\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}.$

82. $\frac{1-ax+(a+x)x}{2ax-a^2x^2-1}:\left[1-\frac{a^2+2ax+x^2}{(1-ax)^2}\right].$

83. $\left(\frac{a}{a+2n}-\frac{a+2n}{2n}\right)\left(\frac{a}{a-2n}-1+\frac{8n^3}{8n^3-a^3}\right).$

84. $1+\left(a-\frac{1}{1-a}\right):\frac{a^2-a+1}{a^2-2a+1}.$

85. $-\frac{x^2}{x+y}-\left(\frac{x^2}{x+y}-\frac{x^3}{x^2+2xy+y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x^2-y^2}+\frac{x}{y-x}\right).$

§ 2. Степень числа

Возведение в степень. Правило знаков
Действия со степенями
Нулевой показатель степени
Отрицательный показатель степени
Дробный показатель степени
Решение примеров на все действия со степенями
Показательные уравнения

1. Возведение в степень. Правило знаков

Степень действительного числа a с натуральным показателем n есть произведение n сомножителей, каждый из которых равен a:

$$a^1=a;\quad a^2=a\cdot a;\quad a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot a\ldots a.}_{n\text{ раз}}$$

Например,

$$2^5=\underbrace{2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2}_{5\text{ раз}}=32;\qquad (-3)^4=\underbrace{(-3)(-3)(-3)(-3)}_{4\text{ раза}}=81.$$

Действительное число a называют *основанием степени*, а натуральное число n — *показателем степени*.

Справедливы следующие правила:

Чтобы возвести в степень произведение, нужно возвести в эту степень каждый сомножитель отдельно, а результаты перемножить:

$$(abc)^n = a^n b^n c^n.$$

Чтобы возвести в степень дробь, нужно возвести в эту степень числитель и знаменатель отдельно и первый результат разделить на второй, т. е.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}.$$

86—97. Возвести в степень следующие одночлены:

86. $(-3)^5$. **87.** $(0{,}1)^4$. **88.** 5^3. **89.** $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.

90. $(3ab)^2$. **91.** $(0{,}2x)^3$. **92.** $(3a^2b^4)^3$. **93.** $\left(-\frac{x^2y}{z^3}\right)^4$.

94. $(5a^4b^2c)^4$. **95.** $\left(-\frac{0{,}2a^3bc}{d^2}\right)^3$. **96.** $\left(1\frac{1}{4}a^2b\right)^3$. **97.** $\left(-\frac{2}{3}a^2b^3c\right)^6$.

Имеют место следующие свойства степеней, которые мы в дальнейшем будем называть *правилом знаков.*

1. *Любая степень положительного числа есть число положительное.* Например,

$$2^4 = 16;\ 5^3 = 125;\ \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27};\ (0{,}1)^5 = 0{,}00001.$$

2. *Четная степень отрицательного числа есть число положительное.* Так,

$$(-2)^2 = (-2)(-2) = 4;\ \left(-\frac{1}{3}\right)^4 = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{81}.$$

3. *Нечетная степень отрицательного числа есть число отрицательное.* Например,

$$(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27;\ \left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)\times$$
$$\times\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}.$$

2. Действия со степенями

Сформулируем следующие правила действий со степенями, имеющими одинаковые основания:

I. *При умножении степеней основание остается прежним, а показатели степеней складываются:*

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

Например,

$$2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7;\ a^3 \cdot a = a^{3+1} = a^4;\ b^5 \cdot b^{-3} = b^{5-3} = b^2;\ x \cdot x^{-3} =$$
$$= x^{1-3} = x^{-2}.$$

II. *При делении степеней основание остается прежним, а показатели степеней вычитаются:*

$$a^m : a^n = a^{m-n}.$$

Например,

$$a^8 : a^3 = a^{8-3} = a^5;\quad a^3 : a = a^{3-1} = a^2;\quad a^3 : a^5 = a^{3-5} = a^{-2};$$
$$a : a^4 = a^{1-4} = a^{-3}.$$

III. *При возведении степени в степень основание остается прежним, а показатели степеней перемножаются:*

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Например,

$$(2^3)^2 = 2^6;\quad (a^2)^3 = a^6;\quad (b^{-3})^6 = b^{-18};\quad (b^{-1/3})^6 = b^{-2};\quad (x^{-1/2})^{-8} = x^4;$$
$$(x^{2\sqrt{2}})^3 = x^{6\sqrt{2}}.$$

IV. *При извлечении корня из степени основание остается прежним, а показатель степени делится на показатель корня:*

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}.$$

Например,

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{6/3} = a^2;\quad \sqrt{x^6} = x^{6/2} = x^3;\quad \sqrt[5]{x^{15}} = x^{15/5} = x^3;$$
$$\sqrt[5]{x^2} = x^{2/5};\quad \sqrt[3]{x^7} = x^{7/3};\quad \sqrt{x} = x^{1/2}.$$

98—104. Произвести указанные действия:

98. $7a^3b^{-1}\cdot 2ab^3$.

99. $4\frac{1}{2}a^4x^{-3}y^{-2}\cdot 2a^{-4}x^3y^5$.

100. $a^8 : a^{-1}$; $x^{-2} : x$; $x^2 : x^2$; $x^{-2} : x^2$.

101. $10a^3b^{-2} : 5ab^{-5}$; $25a^{-3}b^{-2}x^2 : 5a^{-4}b^{-2}x^3$.

102. $(a^{-2})^4$; $(a^2)^{-4}$; $(a^{-2})^{-4}$.

103. $(2a^2b^{-3})^3$; $\left(\frac{1}{2}x^{-3}y^{-2}\right)^{-2}$

104. $\sqrt[3]{25a^2c^3}$; $\sqrt{\sqrt{\sqrt{a^5}}}$.

3. Нулевой показатель степени

При делении степеней одного и того же числа в случае равенства показателей степеней делимого и делителя получается нулевой показатель степени: $a^m : a^m = a^{m-m} = a^0$.

Однако нуль в качестве показателя степени не имеет того значения, которое мы придаем нулю в обычном понимании, так как нельзя повторить число сомножителем нуль раз. Поэтому условились считать, что $a^0 = 1$, т. е. по определению всякое число в нулевой степени равно единице (при $a \neq 0$).

Перечисленные выше правила I—IV применимы к нулевому показателю: $a^m \cdot a^0 = a^m$; $a^m : a^0 = a^m$; $(a^m)^0 = a^{m\cdot 0} = a^0 = 1$.

105—107. Возвести в нулевую степень:

105. $(-1)^0$; 1227^0; $(3{,}75)^0$; $\left(-\frac{3}{4}\right)^0$.

106. $\left(\frac{6{,}5a^2b^3}{x^3y^5}\right)^0$; $(-1{,}2a^3b^4c^{-3})^0$.

107. $(1-3{,}6)^0$; $\left[\frac{(7{,}2)^{3/4}-1}{6{,}28^3}\right]^0$; $\left[\left[(6{,}2-a^3)^{-2}\right]^0\right]^{-3/4}$.

4. Отрицательный показатель степени

При делении степеней одного и того же числа в случае, когда показатель делимого меньше показателя делителя, получается отрицательный показатель степени; например, $a^5:a^8=a^{5-8}=a^{-3}$.

За степень с отрицательным показателем принимается дробь, числитель которой равен единице, а знаменатель — тому же числу, но с положительным показателем, равным абсолютной величине отрицательного показателя. Следовательно,

$$a^{-n}=\frac{1}{a^n} \qquad (a\neq 0).$$

108—110. Возвести в отрицательную степень:

108. а) 2^{-3}; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$; в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}$; г) $(-0{,}2)^{-3}$.

Решение. а) $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8}$; б) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2}=9$;

в) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\frac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$;

г) $(-0{,}2)^{-3}=\frac{1}{(-0{,}2)^3}=\frac{1}{-0{,}008}=-125$.

109. 5^{-3}; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$; $(0{,}3)^{-3}$. **110.** 8^{-1}; $\left(1\frac{1}{3}\right)^{-3}$; $(0{,}5)^{-3}$.

Заметим, что всякое дробное алгебраическое выражение можно представить в виде целого алгебраического выражения с отрицательным показателем. Для этого нужно все сомножители знаменателя записать в числителе, взяв их с отрицательными показателями.

111—113. Записать без знаменателя выражения:

111. а) $\frac{1}{a^3}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{2}{a^2b}$.

Решение. а) $\frac{1}{a^3}=a^{-3}$; б) $\frac{1}{3}=3^{-1}$; в) $\frac{2}{a^2b}=2a^{-2}b^{-1}$.

112. $\frac{1}{x^4}$; $\frac{1}{x^7}$; $\frac{3}{x}$; $\frac{5}{x^3}$; $-\frac{7}{x^2}$.

113. $\frac{1}{a^3b^2c}$; $\frac{3}{a(a-b)^2}$; $\frac{1}{2^6}$; $\frac{1}{3a^2(b-c)^3}$; $\frac{1}{5a^3(b+c)}$.

5. Дробный показатель степени

Из правила IV действий со степенями следует, что при извлечении корня из степени может получиться дробный показатель степени: $\sqrt[n]{a^m}=a^{m/n}$ $(a>0)$.

Степень положительного числа с дробным показателем означает корень, показатель степени которого равен знаменателю, а показатель степени подкоренного числа равен числителю дробного показателя, т. е. $a^{m/n}=\sqrt[n]{a^m}$.

Например,

$$a^{3/4}=\sqrt[4]{a^3};\ a^{1/3}=\sqrt[3]{a};\ a^{7/5}=\sqrt[5]{a^7};\ a^{-3/2}=\frac{1}{a^{3/2}}=\frac{1}{\sqrt{a^3}}.$$

114—119. Произвести указанные действия:

114. $\sqrt[4]{a}:a^{3/4}$. **115.** $\sqrt[3]{3a^2b}:4ab^3$.

116. $\sqrt[12]{x^3}:x^{1/4}$. **117.** $\sqrt{a^{1/2}}:\sqrt{a^{-1/3}}$.

118. $2a^{1/2}x^{1/2}\cdot 5a^{1/3}x^{1/2}$.

119. $20a^{-2}b^{1/2}c^{2/3}:4a^{-3}b^{1/2}c^{3/4}$.

6. Решение примеров на все действия со степенями

120. Вычислить $\left(\frac{9}{16}\right)^{-1/10}:\left(\frac{25}{36}\right)^{-3/2}-\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-1/2}\right]^{-2/5}\left(\frac{6}{5}\right)^{-3}$.

Решение. Выполним последовательно действия:

1) $\left(\frac{9}{16}\right)^{-1/10}=\left[\left(\frac{3}{4}\right)^2\right]^{-1/10}=\left(\frac{3}{4}\right)^{-1/5}=\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}$;

2) $\left(\frac{25}{36}\right)^{-3/2}=\left[\left(\frac{5}{6}\right)^2\right]^{-3/2}=\left(\frac{5}{6}\right)^{-3}=\left(\frac{6}{5}\right)^3=\frac{216}{125}$;

3) $\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{-1/2}\right]^{-2/5}=\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}$; 4) $\left(\frac{6}{5}\right)^{-3}=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$.

Используя полученные результаты, находим

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}\cdot\frac{125}{216}-\left(\frac{4}{3}\right)^{1/5}\cdot\frac{125}{216}=0.$$

121. Вычислить $0{,}5^0\cdot\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0{,}25}\cdot 0{,}36^{-0{,}5}\cdot 0{,}1^{-2}$.

Решение. Имеем:

1) $0{,}5^0=1$; 2) $\left[\left(\frac{6}{5}\right)^{-4}\right]^{-0{,}25}=\left(\frac{6}{5}\right)^1=\frac{6}{5}$;

3) $(0{,}36)^{-0{,}5}=[(0{,}6)^2]^{-0{,}5}=(0{,}6)^{-1}=\frac{10}{6}=\frac{5}{3}$; 4) $(0{,}1)^{-2}=10^2=100$.

Подставив найденные значения, получим

$$1\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{5}{3}\cdot 100=200.$$

122—128. Выполнить действия:

122. $\left[4^{-1/4}+\left(\frac{1}{2^{-3/2}}\right)^{-4/3}\right]\left[4^{-0{,}25}-(2\sqrt{2})^{-4/3}\right]$.

123. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-3/4}+343^{1/3}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-2/3}\cdot 0{,}81^{-0,5}$.

124. $(0{,}04)^{-1,5}\cdot(0{,}125)^{-1/3}+125^{2/3}\cdot 3{,}8^{0}$.

125. $32^{2/5}\cdot 0{,}5-(\sqrt{25^3})^0-\left(-\frac{1}{5}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$.

126. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{8}\right)^{-3/4}\cdot\left[-(3,6)^0+\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}\right]$.

127. $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^4\right]^{-0,5}\cdot\left(\frac{7}{12}\right)^0\cdot 0{,}1^{-2}:(0{,}81)^{-0,5}$.

128. $4^{-0,5}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-4/3}+(0{,}25)^{-1,5}-\left[\left(-\frac{5}{7}\right)^{-6}\right]^0$.

129. Сократить дробь $\frac{x^{3/4}-25x^{1/4}}{x^{1/2}+5x^{1/4}}$.

Решение. Разложив числитель и знаменатель дроби на множители и сократив ее, получим

$$\frac{x^{3/4}-25x^{1/4}}{x^{1/2}+5x^{1/4}}=\frac{x^{1/4}(x^{1/2}-25)}{x^{1/4}(x^{1/4}+5)}=\frac{(x^{1/4}-5)(x^{1/4}+5)}{(x^{1/4}+5)}=x^{1/4}-5.$$

130—136. Упростить выражения:

130. $\frac{a}{a^{1/2}b^{1/2}+b}+\frac{b}{a^{1/2}b^{1/2}+a}-\frac{a+b}{a^{1/2}b^{1/2}}$.

131. $\frac{x^{1/2}}{x^{1/2}-6}-\frac{3}{x^{1/2}+6}+\frac{x}{36-x}$.

132. $\left(\frac{1-y^{1,5}}{1-y^{0,5}}+y^{0,5}\right)\left(\frac{1+y^{1,5}}{1+y^{0,5}}-y^{0,5}\right)$.

133. $\frac{2}{p^{1/2}-q^{1/2}}-\frac{2p^{1/2}}{p^{3/2}+q^{3/2}}\cdot\frac{p-p^{1/2}q^{1/2}+q}{p^{1/2}-q^{1/2}}$

134. $\left[(a^{1/3}-x^{1/3})^{-1}(a-x)-\frac{a+x}{a^{1/3}+x^{1/3}}\right]\cdot 2(ax)^{-1/3}$.

135. $\left[\frac{(a^{3/4}-b^{3/4})(a^{3/4}+b^{3/4})}{a^{1/2}-b^{1/2}}-\sqrt{ab}\right]\cdot\frac{2\sqrt{2{,}5}(a+b)^{-1}}{\sqrt{10}}$.

136. $\left[x(1-x)^{-2/3}+\frac{x}{(1-x)^{5/3}}\right]:[(1-x)^{1/3}(1-2x+x^2)^{-1}]$.

7. Показательные уравнения

Показательными уравнениями называются такие уравнения, в которых неизвестное входит в показатель степени.

Показательные уравнения решаются после преобразований по правилам I—IV с использованием дробных, нулевых и отрицательных показателей степеней.

Сначала рассмотрим простейшие показательные уравнения, т. е. такие, левую и правую части которых сразу можно привести к одному основанию.

137—178. Решить показательные уравнения:

137. $5^x=625$.

Решение. Записав 625 в виде 5^4, получим $5^x=5^4$, откуда $x=4$.

138. $8^x=32$.

Решение. Имеем $32=2^5$; $8^x=(2^3)^x=2^{3x}$. Следовательно, $2^{3x}=2^5$, откуда $3x=5$, т. е. $x=5/3$.

139. $16^x=1/4$.

Решение. Так как $16=2^4$, $1/4=2^{-2}$, то уравнение примет вид $2^{4x}=2^{-2}$, откуда $4x=-2$, т. е. $x=-1/2$.

140. $\sqrt{5^x}=\sqrt[3]{25}$.

Решение. Имеем $\sqrt{5^x}=5^{x/2}$; $\sqrt[3]{25}=\sqrt[3]{5^2}=5^{2/3}$; следовательно, $5^{x/2}=5^{2/3}$; $x/2=2/3$; $x=4/3$.

141. $5{,}2^{(x+2)(x+3)}=1$.

Решение. Любое отличное от нуля число в нулевой степени равно единице; поэтому можно записать $1=5{,}2^0$. Таким образом, $5{,}2^{(x-2)(x+3)}=5{,}2^0$, откуда $(x-2)(x+3)=0$. Согласно свойству произведения, $x-2=0$ или $x+3=0$, т. е. $x=2$, $x=-3$.

142. $3^x=243$. **143.** $2^{-x}=16$. **144.** $9^{-x}=27$.

145. $25^x=\frac{1}{5}$. **146.** $7^x=\frac{1}{49}$. **147.** $2^{x+1}=32$.

148. $\sqrt{7^x}=\sqrt[3]{343}$. **149.** $\left(\frac{4}{9}\right)^x=\left(\frac{3}{2}\right)^8$. **150.** $\left(\frac{3}{4}\right)^x=\left(\frac{4}{3}\right)^5$.

151. $2^{x-1}=1$. **152.** $8^{x^2-9x+20}=1$. **153.** $a^{(x+5)(x-3)}=1$.

В более сложных случаях применяют правила I—IV.

154. $(0{,}25)^{2-x}=\frac{256}{2^{x+3}}$.

Решение. Приведем все степени к основанию 2: $0{,}25=1/4=2^{-2}$; $256=2^8$. Значит, $(2^{-2})^{2-x}=\frac{2^8}{2^{x+3}}$. Применяя правило деления степеней, имеем

$$2^{-4+2x}=2^{8-x-3};\ 2^{-4+2x}=2^{5-x};\ -4+2x=5-x;\ 2x+x=5+4;$$
$$3x=9;\ x=3.$$

155. $0{,}25^{2-\sqrt{5x+1}}=4\cdot 2^{\sqrt{5x+1}}$. **156.** $\frac{0{,}2^{x+0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot 0{,}04^x$.

157. $2^{5x^2-14x+1}=16^{x^2-x-5}$. **158.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{2-x}=\frac{243}{32}$.

159. $8^{\frac{5}{3}x-4}-4^{6-\frac{3}{2}x}=0$. **160.** $27^{x-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{-8}\cdot 9^{-x}=\frac{81^x}{9\sqrt{3}}$.

Следующий тип показательных уравнений решается вынесением множителя с наименьшим показателем степени за скобки.

161. $2^x+2^{x-1}-2^{x-3}=44$.

Решение. Так как наименьшим показателем степени является $x-3$, то вынесем 2^{x-3} за скобки:

$$2^{x-3}\cdot(2^3+2^2-1)=44;\ 2^{x-3}(8+4-1)=44;\ 2^{x-3}\cdot 11=44.$$

Разделив обе части уравнения на 11, получим

$$2^{x-3}=4;\ 2^{x-3}=2^2;\ x-3=2;\ x=5.$$

162. $7^x-3\cdot7^{x-1}+7^{x+1}=371.$

Решение. Наименьшим показателем степени является $x-1$; поэтому вынесем за скобки 7^{x-1}:

$$7^{x-1}\cdot(7^1-3\cdot1+7^2)=371;\ 7^{x-1}(7-3+49)=371;$$

$$7^{x-1}\cdot53=371;\ 7^{x-1}=7;\ x-1=1;\ x=2.$$

163. $9\cdot5^{x+1}-5^x=5500.$ **164.** $3^x-3^{x-2}=72.$

165. $3^{3x+1}-2\cdot3^{3x}=27.$ **166.** $3\cdot2^x-2^{x-1}+5\cdot2^{x-2}=120.$

167. $5^{2x}+5^{2x+1}=150.$ **168.** $3^{x+1}+3^x=108.$

169. $7^x-7^{x-1}=6.$ **170.** $3^{2z-1}+3^{2z-2}-3^{2z-4}=315.$

Рассмотрим еще один тип показательных уравнений. Это — уравнение, которое с помощью подстановки $a^x=y$ сводится к квадратному уравнению.

171. $7^{2x}-48\cdot7^x=49.$

Решение. Полагая $7^x=y$, получим квадратное уравнение $y^2-48y-49=0$. Решим его. Здесь $a=1$, $b=-48$, $c=-49$; $D=b^2-4ac=(-48)^2-4\cdot1(-49)=2304+196=2500$; $\sqrt{D}=50$. Используя формулу $y_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$, находим

$$y_1=\frac{48-50}{2}=\frac{-2}{2}=-1;\ y_2=\frac{48+50}{2}=\frac{98}{2}=49.$$

Так как $7^x=y$, то $7^x=-1$ (это равенство невозможно, поскольку показательная функция может принимать только положительные значения); $7^x=49$; $7^x=7^2$, т. е. $x=2$. Итак, получаем ответ: $x=2$.

172. $5\cdot5^{2x}-6\cdot5^x+1=0.$

Решение. Положим $5^x=y$; тогда получим $5y^2-6y+1=0$. Здесь $a=5$, $b=-6$, $c=1$; $D=b^2-4ac=36-4\cdot5\cdot1=36-20=16$, $\sqrt{D}=4$. Следовательно, $y_1=\frac{6-4}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$, $y_2=\frac{6+4}{10}=\frac{10}{10}=1$.

Поскольку $y_1=1/5$, $y_2=1$, имеем $5^x=1/5$, $5^x=1$; тогда $5^x=1/5$, $5^x=5^{-1}$, т. е. $x=-1$; $5^x=1$, $5^x=5^0$, т. е. $x=0$. Итак, получаем ответ: $x=-1$, $x=0$.

173. $4\cdot2^{2x}-33\cdot2^x+8=0.$ **174.** $5\cdot5^{2x}+43\cdot5^x+24=0.$

175. $8^{2x}+6\cdot8^x-7=0.$ **176.** $3^{2x}-4\cdot3^x=45.$

177. $7^{2x}-8\cdot7^x+7=0.$ **178.** $3^{2x+1}-18=25\cdot3^x.$

§ 3. Логарифмы

Определение логарифма

Свойства логарифмов

Теоремы о логарифмах произведения, частного, степени и корня

Логарифмические уравнения

1. Определение логарифма

Определение. *Логарифмом* числа по данному основанию называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить заданное (логарифмируемое) число.

Логарифм обозначается так: $\log_a N = x$, где a — основание логарифма, N — заданное (логарифмируемое) число.

Из определения логарифма можно записать показательное уравнение

$$a^x = N.$$

179—183. Записать с помощью знака логарифма следующие равенства:

179. $5^2=25$.

Решение. Так как основание степени есть 5, показатель степени (логарифм) равен 2, а степень равна 25, то $\log_5 25=2$.

180. $7^3=343$. **181.** $8^{-3}=\frac{1}{512}$. **182.** $10^{-2}=0{,}01$. **183.** $10^0=1$.

184—188. Записать без знака логарифма следующие равенства:

184. $\log_{10} 1000=3$.

Решение. Здесь основание степени равно 10, показатель степени равен 3, а логарифмируемое число есть 1000. Поэтому $10^3=1000$.

185. $\log_{10} 0{,}001=-3$. **186.** $\log_{16} 4=\frac{1}{2}$.

187. $\log_5 \frac{1}{25}=-2$. **188.** $\log_b p=y$.

189—198. Найти логарифмы данных чисел по известным основаниям:

189. а) $\log_2 16$; б) $\log_6 36$; в) $\log_8 1$.

Решение. а) Здесь нужно найти такой показатель степени x, что $2^x=16$. Решая это уравнение, получаем $2^x=2^4$, откуда $x=4$. Итак, $\log_2 16=4$.

б) Из уравнения $6^x=36$ находим $6^x=6^2$, т. е. $x=2$. Значит, $\log_6 36=2$.

в) В данном случае имеем уравнение $8^x=1$. Это возможно только при условии, что $x=0$, откуда $\log_8 1=0$.

190. $\log_5 125$. **191.** $\log_{1/3} 27$. **192.** $\log_3 \frac{1}{81}$.

193. $\log_3 1$. **194.** $\log_5 5\sqrt[3]{5}$. **195.** $\log_{1/2} 16$.

196. $\log_{\sqrt{2}} 4$. **197.** $\log_3 \frac{1}{\sqrt{3}}$. **198.** $\log_{0,04} 5$.

Определение логарифма позволяет найти не только сам логарифм, но и логарифмируемое число и основание степени.

199—205. Определить x по заданным условиям:

199. а) $\log_4 x=-3$; б) $\log_x \frac{1}{8}=\frac{3}{2}$.

Решение. а) По определению логарифма, запишем $4^{-3}=x$, откуда $x=\frac{1}{64}$.

б) Согласно определению логарифма получаем уравнение $x^{3/2}=\frac{1}{8}$. Так как $\frac{1}{8}=2^{-3}$ и $x^{3/2}=\sqrt{x^3}$, то оно примет вид $\sqrt{x^3}=2^{-3}$. Возведем обе части в квадрат:

$$(\sqrt{x^3})^2=(2^{-3})^2;\quad x^3=2^{-6};\quad x=2^{-2};\quad x=\frac{1}{4}.$$

200. $\log_x 0{,}125=2$. **201.** $\log_x\frac{1}{27}=-2$.

202. $\log_{3\sqrt{3}}x=-\frac{2}{3}$. **203.** $\log_{3,5}x=0$.

204. $\log_{2\sqrt{2}}x=4$. **205.** $\log_x 9=-4$.

206—209. Используя определение логарифма, вычислить:

206. $2\log_5 25+3\log_2 64$. **207.** $\log_4(\log_2 16)^2$.

208. $5\cdot 3^{\log_3 4}$. **209.** $\log_3(\log_2(\log_{10}100))$.

2. Свойства логарифмов

Отметим основные свойства логарифмов.

1. *Отрицательные числа и нуль не имеют логарифмов.*
2. *При любом основании a ($a>0$, $a\neq 1$) логарифм единицы равен нулю.*
3. *Логарифм числа, равного основанию, всегда есть единица.*

Логарифмы чисел по основанию 10 принято обозначать $\lg x$, а логарифмы чисел по основанию e, где $e=2{,}7182...$, принято обозначать $\ln x$. Таким образом, $\log_{10}x=\lg x$, $\log_e x=\ln x$.

3. Теоремы о логарифмах произведения, частного, степени и корня

▲ **Теорема 1.** *Логарифм произведения двух чисел равен сумме логарифмов сомножителей по тому же основанию:*

$$\log_a(N_1N_2)=\log_a N_1+\log_a N_2.$$

▲ **Теорема 2.** *Логарифм частного двух чисел равен разности логарифмов делимого и делителя по тому же основанию:*

$$\log_a\frac{N_1}{N_2}=\log_a N_1-\log_a N_2.$$

▲ **Теорема 3.** *Логарифм степени равен произведению показателя степени на логарифм основания:*

$$\log_a(N^m)=m\log_a N.$$

▲ **Теорема 4** (следствие из теоремы 3). *Логарифм корня равен* *логарифму подкоренного выражения, деленному на показатель степени корня:*

$$\log_a \sqrt[m]{N} = \frac{\log_a N}{m} = \frac{1}{m}\log_a N.$$

Прологарифмировать некоторое выражение, заданное в виде произведения, частного, степени или корня, — значит выразить логарифм этого выражения через логарифмы составляющих его чисел. Это позволяют сделать теоремы 1—4.

Так как в приведенных теоремах не рассматриваются логарифмы суммы или разности, то логарифмировать сумму или разность будем как единое целое (не рассматривая логарифмы отдельных чисел).

210—220. Прологарифмировать следующие выражения:

210. $x = \frac{ab}{c^3}$.

Решение. Применив сначала теорему 2, а затем теоремы 1 и 3, получим

$$\log x = \log(ab) - \log(c^3) = \log a + \log b - 3\log c.$$

Здесь и в следующих примерах основание логарифма мы не пишем, так как полученные равенства справедливы при любом основании.

211. $x = \sqrt{\frac{3a^2b}{c^5}}$.

Решение. Применим последовательно теоремы 2, 1 и 3. Находим

$$\log x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{3a^2b}{c^5}\right) = \frac{1}{2}[\log(3a^2b) - \log(c^5)] = \frac{1}{2}\log(3a^2b) - \\ - \frac{1}{2}\log(c^5) = \frac{1}{2}(\log 3 + 2\log a + \log b) - \frac{5}{2}\log c = \frac{1}{2}\log 3 + \log a + \\ + \frac{1}{2}\log b - \frac{5}{2}\log c.$$

212. $x = \frac{a^2(a+b)^3}{(a-b)^2c^3}$.

Решение. Применив теоремы 2, 1 и 3, получим

$$\log x = \log[a^2(a+b)^3] - \log[(a-b)^2c^3] = \log a^2 + \log(a+b)^3 - \log(a-b)^2 - \\ - \log c^3 = 2\log a + 3\log(a+b) - 2\log(a-b) - 3\log c.$$

213. $x = a^3b^3$.

214. $x = \frac{5a^3c^2}{b^4}$.

215. $x = \frac{2a^2(a+b)}{3b^3}$.

216. $x = 7a^3b\sqrt[4]{c}$.

217. $x = \sqrt[3]{7a^3b}$.

218. $x = \frac{a^3\sqrt{2b}}{8c^3y^2}$.

219. $x = \sqrt[5]{\frac{a^2b}{(a-b)^3}}$.

220. $x = \frac{a^5\sin^2\alpha}{\cos\alpha}$.

По данному результату логарифмирования мы можем найти исходное выражение. Это действие называется *потенцированием.*

221—228. По известному логарифму числа x найти это число:

221. $\log x = \log a + \log b - \log c.$

Решение. В силу утверждений, обратных теоремам 1 и 2, запишем $\log x = \log \frac{ab}{c}$, откуда $x = \frac{ab}{c}$.

222. $\log x = 3\log a + 2\log(a+b) - \frac{1}{2}\log c.$

Решение. Согласно утверждениям, обратным теоремам 3, 4, 1 и 2, получим

$$\log x = \log a^3 + \log(a+b)^2 - \log\sqrt{c} = \log\frac{a^3(a+b)^2}{\sqrt{c}};\quad \log x = \log\frac{a^3(a+b)}{\sqrt{c}};$$

$$x = \frac{a^3(a+b)}{\sqrt{c}}.$$

223. $\log x = \frac{1}{3}(\log a + \log b) - \frac{1}{2}\log(a+c).$

Решение. Используя утверждения, обратные теоремам 1, 3, 4 и 2, имеем

$$\log x = \frac{1}{3}\log(ab) - \frac{1}{2}\log(a+c) = \log\sqrt[3]{ab} - \log\sqrt{a+c} = \log\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}};$$

$$\log x = \log\frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}};\quad x = \frac{\sqrt[3]{ab}}{\sqrt{a+c}}.$$

224. $\log x = 3\log a - 2\log b + \log(a+c).$

225. $\log x = 2\log 2 + \log(a+b) + \log(a-b).$

226. $\log x = \frac{\log m + \log n}{5}.$

227. $\log x = \frac{1}{2}\left[\log a + \frac{1}{3}(\log b - \log(b-c))\right].$

228. $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{3}{2}\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(a-b) - \frac{5}{3}\log c.$

4. Логарифмические уравнения

Логарифмическим уравнением называется уравнение, в котором неизвестное находится под знаком логарифма.

Такие уравнения решаются с помощью определения логарифма, теорем о логарифмах и утверждения, что если положительные числа равны, то равны и их логарифмы при данном основании и, обратно, если равны логарифмы чисел при данном основании, то равны и соответствующие им числа.

При этом необходимо учитывать, что при любом a ($a>0$, $a\neq 1$) логарифмы отрицательных чисел и нуля не существуют.

229—240. Решить логарифмические уравнения:

229. $\log_3(12x+4) - \log_3(x-7) = \log_3 9.$

Решение. Запишем данное уравнение в виде

$$\log_3 \frac{12x+4}{x-7} = \log_3 9.$$

Так как равны логарифмы и их основания, то равны и логарифмируемые числа:

$$\frac{12x+4}{x-7} = 9.$$

Полагая $x-7 \neq 0$, приведем дробь к общему знаменателю и решим полученное уравнение:

$$12x+4=9x-63;\quad 3x=-67;\quad x=-22\frac{1}{3}.$$

Подставив значение $x=-22\frac{1}{3}$ в уравнение, видим, что при этом значении x выражения $12x+4$ и $x-7$ отрицательны. Так как логарифмы отрицательных чисел не существуют, то $x=-22\frac{1}{3}$ — посторонний корень, а само уравнение не имеет решений.

230. $\lg(x-1)+\lg(x+1)=\lg 2.$

Решение. Имеем

$$\lg((x-1)(x+1))=\lg 2,$$

откуда

$$(x-1)(x+1)=2;\quad x^2-1=2;\quad x^2=3;\quad x_1=\sqrt{3};\quad x_2=-\sqrt{3}.$$

Корень x_2 является посторонним, поскольку при $x_2=-\sqrt{3}$ имеем $-\sqrt{3}-1<0$ и $-\sqrt{3}+1<0$ и, следовательно, логарифмы этих выражений не существуют. Итак, получаем ответ: $x=\sqrt{3}$.

231. $\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=2-3\log_4 2.$

Решение. Представив число 2 как логарифм числа 16 по основанию 4, перепишем данное уравнение в виде

$$\log_4(x+3)-\log_4(x-1)=\log_4 16-3\log_4 2.$$

Отсюда получаем

$$\log_4\frac{x+3}{x-1}=\log_4\frac{16}{8},\quad \text{или}\quad \frac{x+3}{x-1}=2.$$

Решаем это уравнение:

$$x+3=2(x-1);\quad x+3=2x-2;\quad x=5.$$

Для проверки подставим значение $x=5$ в данное уравнение:

$\log_4(5+3)-\log_4(5-1)=2-3\log_4 2;$

$\log_4 8-\log_4 4=\log_4 16-\log_4 8;\quad \log_4\frac{8}{4}=\log\frac{16}{8};\quad \log_4 2=\log_4 2.$

Итак, $x=5$.

Рассмотрим еще один тип логарифмических уравнений.

232. $\frac{1}{12}\lg^2 x=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\lg x.$

Решение. Это — логарифмическое уравнение, приводимое к квадратному. Полагая $\lg x = z$, получим уравнение

$$\frac{1}{12}z^2 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}z \quad \text{или} \quad z^2 + 3z - 4 = 0.$$

Здесь $a = 1$, $b = 3$, $c = -4$, $D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot 1(-4) = 9 + 16 = 25$; $\sqrt{D} = 5$. Используя формулу $z = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$, находим $z_1 = \frac{-3-5}{2} = -4$, $z_2 = \frac{-3+5}{2} = 1$.

Так как $\lg x = z$, то $\lg x = -4$ или $\lg x = 1$. Следовательно, $x_1 = 10^{-4} = 0{,}0001$, $x_2 = 10$.

233. $\lg x = 3 - \lg(2x + 10)$.

234. $\lg(x - \sqrt{3}) + \lg(x + \sqrt{3}) = 0$.

235. $\lg(127 + x^3) - 3\lg(x + 1) = 0$.

236. $\frac{1}{2}\lg(x - 3) + \lg\sqrt{2x + 2} = \lg(x + 1)$.

237. $\log_2(2^x + 3) + \log_2(2^x - 3) = \log_2 7$.

238. $\log_3(5^x - 1) + \log_3(5^x + 1) = 1 + 3\log_3 2$.

239. $1 + \log_3(8^{\sqrt{x}} + 1) = \log_3 15$.

240. $\frac{1}{2}\lg(3x - 2) + \lg\sqrt{11 - x} = \frac{1}{2}\lg(35x - 4x^2 + 3)$.

§ 4. Иррациональные выражения

Основное свойство корня
Извлечение корня из произведения, дроби, степени
Преобразование корней
Действия с корнями
Освобождение знаменателя дроби от корня
Иррациональные уравнения

1. Основное свойство корня

Корнем n-й степени (n — натуральное число) из действительного числа a называется такое действительное число x, при возведении которого в степень n получается число a, т. е. $x = \sqrt[n]{a}$, если $x^n = a$.

Например, $\sqrt[5]{32} = 2$, так как $2^5 = 32$; $\sqrt[n]{b} = b^{1/n}$, так как $(b^{1/n})^n = b$.

Неотрицательное значение корня n-й степени из неотрицательного числа называется *арифметическим корнем*.

Например, $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt[3]{64} = 4$; $\sqrt{(a+1)^2} = a + 1$ при условии $a + 1 \geqslant 0$.

Следует помнить, что при решении иррациональных уравнений их корни всегда рассматриваются как арифметические.

Иррациональным выражением относительно какой-либо переменной называется выражение, в котором эта переменная находится под знаком корня (радикала).

В этом параграфе мы будем рассматривать только арифметические значения корня (т. е. неотрицательные значения).

Основное свойство корня заключается в следующем: *величина корня не изменится, если показатель корня и показатель степени подкоренного выражения умножить (или разделить) одновременно на одно и то же отличное от нуля число,* т. е.

$$\sqrt[m]{x^n}=\sqrt[am]{x^{an}}.$$

Это свойство позволяет производить преобразования иррациональных выражений.

Корни разных степеней можно привести к одинаковым показателям.

241. Привести к одному показателю: а) $\sqrt[5]{a^2}$ и $\sqrt[3]{a}$; б) $\sqrt[5]{2a^3}$ и $\sqrt[10]{a^4b}$.

Решение. а) Наименьшим общим кратным показателей корней 5 и 3 является число 15. Дополнительный множитель к первому числу равен 3, а ко второму равен 5. Умножив показатель степени и показатель корня на дополнительный множитель, находим

$$\sqrt[5]{a^2}=\sqrt[5\cdot 3]{a^{2\cdot 3}}=\sqrt[15]{a^6};\quad \sqrt[3]{a}=\sqrt[3\cdot 5]{a^{1\cdot 5}}=\sqrt[15]{a^5}.$$

б) Наименьшее общее кратное показателей корней 5 и 10 равно 10, а дополнительные множители равны соответственно 2 и 1. Тогда получим $\sqrt[5]{2a^3}=\sqrt[5\cdot 2]{(2a^3)^2}=\sqrt[10]{4a^6}$.

Если подкоренное выражение есть степень, показатель которой имеет общий множитель с показателем степени корня, то оба показателя можно разделить на этот множитель.

242. Преобразовать: а) $\sqrt[6]{a^2}$; б) $\sqrt[8]{(a+1)^6}$; в) $\sqrt[6]{8a^6x^3}$.

Решение. а) $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$; б) $\sqrt[8]{(a+1)^6}=\sqrt[4]{(a+1)^3}$; в) $\sqrt[6]{8a^6x^3}=$ $=\sqrt[6]{2^3a^6x^3}=\sqrt{2a^2x}$.

243—247. Привести к общему показателю корни:

243. $\sqrt{2}$ и $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{2}$; $\sqrt[4]{3}$ и $\sqrt[3]{4}$.

244. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{2}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\sqrt[6]{\frac{1}{2}}$.

245. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ и $\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$; $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ и $\sqrt[6]{\frac{3}{4}}$.

246. $\sqrt[3]{a^2}$ и $\sqrt[4]{a^3}$; $\sqrt{3m}$ и $\sqrt[3]{3m}$.

247. $\sqrt{2ab}$ и $\sqrt[3]{4ab^2}$.

248—252. Сократить показатели корней и показатели подкоренных выражений:

248. $\sqrt[4]{a^2}$; $\sqrt[8]{x^4}$; $\sqrt[6]{m^3}$; $\sqrt[10]{x^5}$.

249. $\sqrt[6]{b^4}$; $\sqrt[12]{n^4}$; $\sqrt[16]{a^{12}}$; $\sqrt[20]{x^{15}}$.

250. $\sqrt[4]{25x^2y^2}$; $\sqrt[6]{27m^3n^3}$; $\sqrt[6]{9a^4b^2}$.

251. $\sqrt[6]{64x^9y^3z^{12}}$; $\sqrt[16]{a^{4n}b^{8n}}$; $\sqrt[3n]{x^{2n}y^{4n}}$.

252. $\sqrt[8]{16x^{12}y^4}$; $\sqrt[4]{\frac{4m^6}{9n^2}}$; $\sqrt[9]{\frac{8a^3b^{12}}{27c^3d^9}}$.

2. Извлечение корня из произведения, дроби, степени

I. *Чтобы извлечь корень из произведения, нужно извлечь его из каждого сомножителя отдельно и результаты перемножить:*

$$\sqrt[n]{abc}=\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}.$$

II. *Чтобы извлечь корень из дроби, нужно извлечь корень из числителя и знаменателя отдельно и первый результат разделить на второй:*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$$

III. *Чтобы извлечь корень из степени, показатель которой делится на показатель корня, нужно разделить показатель степени на показатель корня:*

$$\sqrt[n]{a^{mn}}=a^m.$$

253. Извлечь корень: а) $\sqrt{4\cdot 9}$; б) $\sqrt{\frac{49}{36}}$; в) $\sqrt[3]{a^6}$; г) $\sqrt{9a^2}$.

Решение. а) Согласно правилу I, $\sqrt{4\cdot 9}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{9}=2\cdot 3=6$.

б) Используя правило II, находим $\sqrt{\frac{49}{36}}=\frac{\sqrt{49}}{\sqrt{36}}=\frac{7}{6}$.

в) В силу правила III, $\sqrt[3]{a^6}=a^2$.

г) Согласно правилам I, III, $\sqrt{9a^2}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{a^2}=3a$.

254—257. Извлечь корень из произведения:

254. $\sqrt{25\cdot 64}$; $\sqrt{100\cdot 4}$; $\sqrt{81\cdot 36}$.

255. $\sqrt{16\cdot 25\cdot 9}$; $\sqrt{49\cdot 36\cdot 100}$.

256. $\sqrt[3]{8\cdot 27}$; $\sqrt[3]{64\cdot 125}$; $\sqrt[3]{27\cdot 125\cdot 8}$.

257. $\sqrt[4]{16\cdot 81}$; $\sqrt[5]{32\cdot 243}$.

258—259. Извлечь корень из дроби:

258. $\sqrt{\frac{49}{25}}$; $\sqrt[3]{\frac{8}{125}}$; $\sqrt[3]{\frac{64}{729}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$.

259. $\sqrt{3\frac{1}{16}}$; $\sqrt[3]{2\frac{10}{27}}$; $\sqrt[4]{\frac{16}{81}}$.

260—261. Извлечь корень из степени:

260. $\sqrt[3]{2^6}$; $\sqrt[3]{5^3}$; $\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^6}$; $\sqrt[4]{3^8}$.

261. $\sqrt{x^4}$; $\sqrt[3]{a^9}$; $\sqrt[5]{m^{10}}$; $\sqrt[6]{y^{18}}$.

262—265. Извлечь корень:

262. $\sqrt[3]{8x^6}$; $\sqrt{\frac{1}{4}x^2y^4}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{27}a^3b^9}$.

263. $\sqrt[4]{a^4b^8c^{12}}$; $\sqrt[3]{64a^3y^6z^3}$; $\sqrt[5]{32m^5n^{20}}$.

264. $\sqrt{\frac{4a^2b^2}{25c^4d^6}}$; $\sqrt[3]{\frac{8a^6b^3c^9}{27x^{12}}}$; $\sqrt[3]{\frac{64a^3b^9}{27x^3y^6}}$.

265. $\sqrt{\frac{25(a+b)^2}{(c-d)^4}}$; $\sqrt[3]{\frac{(a+b)^{3n}}{(x+y)^{6n}}}$; $\sqrt[n]{\frac{(a+b)^{2n}}{a^{3n}(a-b)^n}}$.

3. Преобразование корней

Используя перечисленные выше правила, можно преобразовать (упростить) корни.

Если подкоренное выражение разлагается на такие множители, что из некоторых извлекается корень, то можно вынести множитель за знак корня.

266—273. Вынести множитель за знак корня:

266. а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{a^8}$; в) $\sqrt[3]{16x^4}$.

Решение. а) $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[3]{a^8}=\sqrt[3]{a^6\cdot a^2}=\sqrt[3]{a^6}\cdot\sqrt[3]{a^2}=a^2\sqrt[3]{a^2}$;

в) $\sqrt[3]{16x^4}=\sqrt[3]{8x^3\cdot 2x}=\sqrt[3]{8x^3}\cdot\sqrt[3]{2x}=2x\sqrt[3]{2x}$.

267. $\sqrt{27}$; $\sqrt{32}$; $\sqrt{48}$; $\sqrt{60}$.

268. $\sqrt[3]{16}$; $\sqrt[3]{54}$; $\sqrt[3]{250}$; $\sqrt[3]{72}$.

269. $\sqrt{9a}$; $\sqrt{2a^2}$; $\sqrt{5a^4}$.

270. $\sqrt[3]{8m^2}$; $\sqrt[3]{5n^3}$; $\sqrt[3]{2x^6}$; $\sqrt[3]{16y^3}$.

271. $\sqrt{9a^2bc^3}$; $\sqrt[3]{27x^4y^2z^3}$; $\sqrt[4]{81c^6d^5}$.

272. $\sqrt[n]{a^{2n}b^5}$; $\sqrt[n]{x^{n+1}}$.

273. $\sqrt{\frac{3(x+y)^2}{4}}$; $\sqrt{\frac{5(a+b)^2}{9(a-b)}}$; $\sqrt{\frac{a+b}{4(a-b)^2}}$.

Иногда бывает полезно ввести под знак корня множители, стоящие перед ним. Для этого необходимо возвести множитель в степень корня, а затем умножить на него подкоренное выражение.

274—277. Ввести множитель под знак корня:

274. а) $2\sqrt{3}$; б) $a^2\sqrt[3]{a}$.

Решение. а) $2\sqrt{3}=\sqrt{4\cdot 3}=\sqrt{12}$; б) $a^2\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{a^6\cdot a}=\sqrt[3]{a^7}$.

275. $2\sqrt{2}$; $7\sqrt{10}$; $3\sqrt{\frac{1}{3}}$; $a\sqrt{a}$.

276. $2ab\sqrt{\frac{1}{2}a}$; $\frac{1}{2}\sqrt{4x}$; $\frac{1}{3}\sqrt[3]{54a}$.

277. $(a+b)\sqrt{a+b}$; $2a^2\sqrt[3]{3ab^2}$.

Следует уметь освобождаться от знаменателя в подкоренном выражении. Для этого числитель и знаменатель подкоренного выражения нужно умножить на такой множитель, чтобы в знаменателе получилось выражение, из которого можно извлечь корень.

278—283. Освободиться от дроби в подкоренном выражении:

278. а) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; б) $\sqrt{\frac{5}{a}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{b}{a^2}}$.

Решение. а) $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sqrt{\frac{5}{a}}=\sqrt{\frac{5a}{a\cdot a}}=\sqrt{\frac{5a}{a^2}}=\frac{\sqrt{5a}}{\sqrt{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{5a}$;

в) $\sqrt[5]{\frac{b}{a^2}}=\sqrt[5]{\frac{ba^3}{a^2\cdot a^3}}=\sqrt[5]{\frac{a^3b}{a^5}}=\frac{\sqrt[5]{a^3b}}{\sqrt[5]{a^5}}=\frac{1}{a}\sqrt[5]{a^3b}$.

279. $\sqrt{\frac{1}{5}}$; $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{3}}$; $\sqrt[5]{\frac{1}{16}}$.

280. $\sqrt{\frac{5}{12}}$; $\sqrt[3]{\frac{2}{9}}$; $\sqrt[4]{\frac{3}{8}}$; $\sqrt[3]{\frac{5}{3}}$.

281. $\sqrt{\frac{m}{2n}}$; $\sqrt{\frac{3m}{2a}}$; $\sqrt[3]{\frac{m}{n^2}}$.

282. $\sqrt[5]{\frac{b}{a^3}}$; $\sqrt[3]{\frac{c}{a^2}}$; $\sqrt[5]{\frac{3}{8}}$.

283. $\sqrt[6]{\frac{a}{(a+b)^2}}$; $\sqrt{\frac{2}{a-b}}$; $\sqrt[5]{\frac{5c}{(a-b)^2}}$.

284—287. Привести корни к простейшему виду:

284. $\sqrt{\frac{12}{xy}}$; $\sqrt{\frac{49b^3}{5a}}$; $\sqrt{\frac{4c^3}{9a^5b}}$; $\sqrt{\frac{9a^3b^4}{8xy^3}}$.

285. $\sqrt[3]{\frac{b^2}{8a}}$; $\sqrt[3]{\frac{3y}{2x^2}}$; $\sqrt{25m^2-50n^2}$.

286. $\sqrt{4x^6y^2+12x^4y^3}$; $\sqrt[4]{\frac{1}{m^3}+\frac{1}{m^4}}$.

287. $\sqrt[3]{\frac{a^3}{b}-\frac{b^8}{a^6}}$; $\sqrt[5]{\frac{x^3}{a^3}+\frac{y}{a}}$.

4. Действия с корнями

Чтобы сложить или вычесть иррациональные выражения, нужно записать их соответственно со знаком плюс или минус и привести подобные корни (подобными корнями называются корни одной степени, имеющие одинаковые подкоренные выражения).

Чтобы умножить корни одинаковой степени, нужно перемножить подкоренные выражения и из произведения извлечь корень той же степени:

$$\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}=\sqrt[n]{abc}.$$

Чтобы разделить корни одинаковой степени, нужно разделить подкоренные выражения и из частного извлечь корень той же степени:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Чтобы возвести корень в степень, нужно возвести в эту степень подкоренное выражение, оставив корень той же степени:

$$(\sqrt[n]{a})^m=\sqrt[n]{a^m}.$$

Чтобы извлечь корень из корня, нужно перемножить показатели степеней корней, оставив прежним подкоренное выражение:

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\sqrt[nm]{a}.$$

288—307. Выполнить действия:

288. $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}$.

Решение. Преобразуем корни: $2\sqrt{8}=2\sqrt{4\cdot 2}=4\sqrt{2}$; $7\sqrt{18}=7\sqrt{9\cdot 2}=7\cdot 3\sqrt{2}=21\sqrt{2}$; $5\sqrt{72}=5\sqrt{36\cdot 2}=5\cdot 6\sqrt{2}=30\sqrt{2}$; $\sqrt{50}=\sqrt{25\cdot 2}=5\sqrt{2}$.

Подставим полученные выражения и приведем подобные члены:

$$2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50}=4\sqrt{2}-21\sqrt{2}+30\sqrt{2}-5\sqrt{2}=8\sqrt{2}.$$

289. а) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$; б) $(\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt{x})^{10}$; в) $(\sqrt[3]{a^2b})^4$.

Решение. а) Имеем $\sqrt{a}=\sqrt[6]{a^3}$; $\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^2}$; следовательно, $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}=\sqrt[6]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[6]{a^5}$.

б) Возведем подкоренные выражения в степень:

$$(\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt{x})^{10}=\sqrt[5]{x^{20}}\cdot\sqrt{x^{10}}=x^4\cdot x^5=x^9.$$

в) $(\sqrt[3]{a^2b})^4=\sqrt[3]{a^8b^4}=\sqrt[3]{a^6a^2b^3b}=a^2b\sqrt[3]{a^2b}$.

290. $(2\sqrt{18}+3\sqrt{8})+(3\sqrt{32}-\sqrt{50})$.

291. $(0{,}5\sqrt{24}-3\sqrt{40})-(\sqrt{150}+\sqrt{54}-\sqrt{1000})$.

292. $(\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{16a})+(\sqrt[4]{81a}-\sqrt[4]{625a})$.

293. $(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y})-(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x})$.

294. $\sqrt[3]{48}\cdot\sqrt[3]{4}$; $\sqrt{ab}\cdot\sqrt{a}$; $\sqrt[4]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}$.

295. $\sqrt{5}\cdot\sqrt[3]{4}$; $\sqrt[6]{y}\cdot\sqrt[3]{y}$.

296. $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$; $\sqrt[3]{\frac{x}{a}}\cdot\sqrt{\frac{a}{x}}$.

297. $\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[4]{a^3}\cdot\sqrt[6]{a^5}$; $\sqrt{3m}\cdot\sqrt[4]{3m}\cdot\sqrt[8]{3m^3}$.

298. $\sqrt{90}:\sqrt{18}$; $\sqrt{360}:\sqrt{60}$; $\sqrt{60}:\sqrt{15}$.

299. $\sqrt[3]{6a^4}:\sqrt[3]{2a}$; $\sqrt[4]{9a^3}:\sqrt[4]{\frac{a}{9}}$; $\sqrt[5]{m^4}:\sqrt[15]{m^2}$.

300. $\sqrt[4]{8}:\sqrt{2}$; $\sqrt[6]{81}:\sqrt[3]{3}$; $\sqrt{2}:\sqrt[3]{2}$.

301. $(\sqrt{3})^4$; $(\sqrt[5]{7})^{10}$; $(\sqrt[4]{5})^8$.

302. $(\sqrt[4]{x^3})^3$; $(\sqrt[5]{y^2})^3$; $(\sqrt[6]{n^5})^7$.

303. $(\sqrt[3]{a^2b^2})^2$; $(\sqrt[3]{xy^2})^4$; $(\sqrt[5]{a^4b^2})^2$.

304. $\sqrt{\sqrt{2}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{x^2}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{5}}$.

305. $\sqrt[5]{\sqrt[3]{a^{10}b^5}}$; $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^4y^8}}$; $\sqrt[6]{\sqrt[3]{m^2n^6}}$.

306. $\sqrt[3]{\sqrt[5]{a^6b^3c}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{(a+b)^3a^6}}$; $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^{4m}b^{6n}}}$.

307. $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$; $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}$; $\sqrt[3]{m\sqrt[3]{m\sqrt{m}}}$.

5. Освобождение знаменателя дроби от корня

При вычислении дробных выражений, знаменатели которых содержат корни, в некоторых случаях полезно предварительно преобразовать дробь так, чтобы ее знаменатель не содержал корней. Это достигается умножением числителя и знаменателя дроби на одно и то же специально подобранное выражение.

308—317. Освободиться от корня в знаменателе:

308. а) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; б) $\frac{3}{\sqrt{40}}$; в) $\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}$; г) $\frac{2}{3+\sqrt{5}}$.

Решение. а) Чтобы освободиться от корня, умножим числитель и знаменатель на $\sqrt{2}$:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

б) Умножив числитель и знаменатель на $\sqrt{10}$ и учитывая, что $\sqrt{40}=\sqrt{4\cdot 10}=2\sqrt{10}$, получаем

$$\frac{3}{\sqrt{40}}=\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{3\sqrt{10}}{20}.$$

в) Умножим числитель и знаменатель на $\sqrt[5]{3^3}$:

$$\frac{2}{\sqrt[5]{3^2}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^2}\cdot\sqrt[5]{3^3}}=\frac{2\sqrt[5]{3^3}}{\sqrt[5]{3^5}}=\frac{2}{3}\sqrt[5]{27}.$$

г) Умножив числитель и знаменатель на сопряженный двучлен $3-\sqrt{5}$, получим

$$\frac{2}{3+\sqrt{5}}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{9-5}=\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

309. $\frac{1}{\sqrt{3}}$; $\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\frac{18}{\sqrt{6}}$; $\frac{5}{\sqrt{10}}$.

310. $\frac{a}{\sqrt{a}}$; $\frac{m}{\sqrt{m}}$; $\frac{2x^2}{\sqrt{x}}$; $\frac{5n}{3\sqrt{n}}$.

311. $\frac{2}{\sqrt[3]{4}}$; $\frac{5}{2\sqrt[3]{25}}$; $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$; $\frac{5}{\sqrt[5]{125}}$.

312. $\frac{a}{\sqrt[7]{x^4}}$; $\frac{a}{\sqrt[5]{a}}$; $\frac{a}{\sqrt[n]{x^{n-2}}}$.

313. $\frac{1}{\sqrt{a+b}}$; $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2}}$; $\frac{a+b}{2\sqrt{a-b}}$; $\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$.

314. $\frac{2}{2+\sqrt{2}}$; $\frac{18}{\sqrt{7}-1}$; $\frac{8}{\sqrt{5}+1}$.

315. $\frac{1}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\frac{2+\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}}$; $\frac{a+b\sqrt{x}}{a-b\sqrt{x}}$; $\frac{1}{\sqrt{x+2}-2}$

316. $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$; $\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$; $\frac{x}{\sqrt{x^2-1}+1}$.

317. $\frac{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b}}$; $\frac{b}{\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b}}$.

6. Иррациональные уравнения

Иррациональными уравнениями называются уравнения, в которых неизвестная величина находится под знаком корня.

Чтобы решить иррациональное уравнение, нужно предварительно освободиться от корней, подкоренные выражения которых содержат неизвестное. Чаще всего этого добиваются возведением обеих частей уравнения в квадрат. Однако при этом могут появиться так называемые «посторонние» решения, т. е. такие, которые не удовлетворяют данному уравнению. Поэтому необходимо выполнять проверку полученных результатов с помощью их подстановки в первоначальное уравнение.

318—335. Решить уравнения:

318. $\sqrt{x^2-1}=\sqrt{3}$.

Решение. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{x^2-1})^2=(\sqrt{3})^2;\ x^2-1=3;\ x^2=4;\ x_1=2,\ x_2=-2.$$

Получили два решения. Проверим каждое из них: если $x=2$, то $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, т. е. $\sqrt{3}=\sqrt{3}$; если $x=-2$, то $\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$, т. е. $\sqrt{3}=\sqrt{3}$. Таким образом, значения $x=2$ и $x_2=-2$ являются корнями данного уравнения.

319. $\sqrt{5-x}+2=7$.

Решение. Обособим радикал и возведем обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{5-x}=7-2;\ (\sqrt{5-x})^2=5^2;\ 5-x=25;\ -x=20;\ x=-20.$$

Производим проверку: $\sqrt{5-(-20)}+2=7$; $\sqrt{25}+2=7$; $5+2=7$. Следовательно, $x=-20$ — решение уравнения.

320. $\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{2x+6}=x+3$.

Решение. Выполним сначала умножение корней:

$$\sqrt{(x-1)(2x+6)}=x+3;\ \sqrt{2x^2-2x+6x-6}=x+3;\ \sqrt{2x^2+4x-6}=x+3.$$

Возведем теперь обе части уравнения в квадрат:

$$(\sqrt{2x^2+4x-6})^2=(x+3)^2;\ 2x^2+4x-6=x^2+6x+9;\ x^2-2x-15=0.$$

Решаем квадратное уравнение. Здесь $a=1$, $b=-2$, $c=-15$, $D=b^2-4ac=4-4\cdot1\cdot(-15)=64$, $\sqrt{D}=8$; поэтому

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a};\ x_1=\frac{2-8}{2}=-3;\ x_2=\frac{2+8}{2}=5;\ x_1=-3,\ x_2=5.$$

Проверим оба корня.

При $x=-3$ имеем $\sqrt{(-3)-1}\cdot\sqrt{2(-3)+6}=-3+3$. Мы видим, что первый радикал не имеет смысла в области действительных чисел; поэтому $x=-3$ — посторонний корень.

При $x=5$ имеем $\sqrt{5-1}\cdot\sqrt{5\cdot2+6}=5+3$; $\sqrt{4}\cdot\sqrt{16}=8$; $2\cdot4=8$. Итак, корнем данного уравнения является $x=5$.

321. $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8$.

Решение. Обособим один из радикалов и возведем в квадрат обе части уравнения:

$$(\sqrt{2x+5})^2=(8-\sqrt{x-1})^2;\ 2x+5=64-16\sqrt{x-1}+(x-1).$$

Перенесем $16\sqrt{x-1}$ в левую часть, а все остальные члены — в правую часть:

$$16\sqrt{x-1}=64+x-1-2x-5;\ 16\sqrt{x-1}=58-x.$$

Снова возведем обе части уравнения в квадрат:

$$(16\sqrt{x-1})^2=(58-x)^2;\ 256x-256=3364-116x+x^2;\ x^2-372x+3620=0.$$

Решаем полученное квадратное уравнение. Так как $a=1$, $b=-372$, $c=3620$, $D=b^2-4ac=(-372)^2-4\cdot1\cdot3620=138\,384-14\,480=123\,904$; $\sqrt{D}=352$, то

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{372-352}{2}=10;\quad x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{372+352}{2}=362.$$

Проверим оба значения $x_1=10$; $x_2=362$.

Если $x=10$, то $\sqrt{2\cdot10+5}+\sqrt{10-1}=8$; $\sqrt{25}+\sqrt{9}=8$; $5+3=8$; $8=8$.

Если $x=362$, то $\sqrt{2\cdot362+5}+\sqrt{362-1}=8$; $\sqrt{729}+\sqrt{361}=8$; $27+19\neq8$; следовательно, $x=362$ — посторонний корень.

Корнем данного уравнения служит $x=10$.

322. $x-5=\sqrt{x}+1$.

323. $\sqrt{3x-5}-4=5$.

324. $\sqrt{x^2-3x-1}+7=2x$.

325. $x-\sqrt{25-x^2}=7$.

326. $\sqrt{x-9}=\dfrac{36}{\sqrt{x-9}}-\sqrt{x}$.

327. $5\sqrt{x}-7=3\sqrt{x}-1$.

328. $\dfrac{15}{\sqrt{10-x}}-\sqrt{3x+5}=\sqrt{10-x}$.

329. $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}=-2$.

330. $\sqrt{4x-3}\cdot\sqrt{3x-5}=3x-1$.

331. $7x-2=3\sqrt{2x+3}\cdot\sqrt{3x-8}$.

332. $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$.

333. $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$.

334. $\sqrt{x+7}+\sqrt{3x-2}-9=0$.

335. $\sqrt{x+8}-\sqrt{5x+20}+2=0$.

§ 5. Тригонометрия

Обобщение понятия угла. Определение и основные свойства тригонометрических функций

Основные тригонометрические тождества

Формулы сложения аргументов

1. Обобщение понятия угла. Определение и основные свойства тригонометрических функций

Из геометрии мы знаем, что *углом* называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами, исходящими из одной точки, называемой вершиной угла.

Рассмотрим новое определение угла. Пусть одна из сторон угла на плоскости совпадает с положительным направлением оси Ox (луч l_1), а вершина угла — с началом координат. На луче l_2 на расстоянии $R=1$ от начала возьмем точку A. Тогда при вращении луча l_2 точка A опишет окружность с радиусом $R=1$, которую мы будем называть *единичной окружностью* (рис. 1).

Угол, полученный при повороте отрезка OA, можно охарактеризовать двумя способами — радианной и градусной мерой.

При градусном измерении за $1°$ принимается $1/360$ полного угла. Тогда полный угол равен $360°$, развернутый $180°$, прямой угол $90°$. В радианной мере величина угла измеряется длиной соответствующей ему дуги. Например, величина полного угла равна длине окружности, т. е. в данном случае* 2π, величина развернутого угла есть π, величина прямого угла равна $\pi/2$. Часто вместо записи величины угла в виде бесконечной десятичной дроби ее записывают в долях π. Так, величину прямого угла записывают $\pi/2$ вместо 1,57.

Градусный и радианный способы измерения углов равноправны и используются достаточно широко.

В некоторых случаях используют доли градуса — минуты и секунды. Минута — это $1/60$ доля градуса и записывается так: $1'=(1/60)°$; секунда — это $1/60$ доля минуты и записывается так: $1''=(1/60)'$.

Отметим, что при градусном измерении обозначения нужно обязательно записывать (знаки $°$, $'$, $''$), а радианное обозначение всегда пропускают, записывая просто число радианов: 1; 0,75; 4,5; π.

Часто приходится переходить от градусного измерения к радианному и обратно. При этом используют следующие формулы:

$$\alpha° = \frac{180° \cdot \alpha_{\text{рад}}}{\pi}; \tag{1}$$

$$\alpha_{\text{рад}} = \frac{\pi \cdot \alpha°}{180°}. \tag{2}$$

* Здесь $\pi = 3{,}141596$ — отношение длины окружности к диаметру. При вычислениях будем пользоваться значением $\pi \approx 3{,}14$.

336. Записать в градусной мере углы: а) $\pi/6$; б) $\pi/8$; в) $3\pi/4$.

Решение. Применяя формулу (1), получим:

а) $\alpha=\frac{180°(\pi/6)}{\pi}=\frac{180°}{6}=30°$;

б) $\alpha=\frac{180°(\pi/8)}{\pi}=\frac{180°}{8}=22°30'$;

в) $\alpha=\frac{180°(3\pi/4)}{\pi}=\frac{180°\cdot 3\pi}{\pi\cdot 4}=135°$.

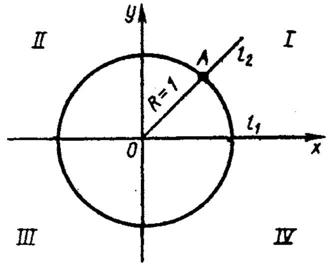

Рис. 1

337. Записать в радианной мере углы: а) 30°; б) 45°; в) 315°; г) 540°.

Решение. Используя формулу (2), находим:

а) $\alpha=\frac{\pi\cdot 30°}{180°}=\frac{\pi}{6}$; б) $\alpha=\frac{\pi\cdot 45°}{180°}=\frac{\pi}{4}$;

в) $\alpha=\frac{\pi\cdot 315°}{180°}=\frac{\pi\cdot 7}{4}=\frac{7\pi}{4}$; г) $\alpha=\frac{\pi\cdot 540°}{180°}=3\pi$.

338. Перевести из градусной меры в радианную: 60°, 120°, 150°, 225°, 240°, 300°, 345°.

339. Перевести из радианной меры в градусную: $\pi/3$; $5\pi/6$; $7\pi/3$; $11\pi/4$; $5\pi/2$.

Луч l_2 единичной окружности можно вращать в двух направлениях: по часовой стрелке и против часовой стрелки. При движении луча l_2 против часовой стрелки будем считать полученный угол положительным, а при движении этого луча по часовой стрелке — отрицательным (рис. 2).

340. Построить на единичной окружности углы: $\alpha=45°$; $\alpha=-60°$; $\alpha=150°$; $\alpha=-210°$, $\alpha=-315°$.

341. Отметить на единичной окружности углы: $\beta=3{,}14$; $\beta=3$; $\beta=4$; $\beta=-4$; $\beta=-6$.

При построении угла на единичной окружности луч l_1 всегда совпадает с положительным направлением оси Ox, а луч l_2 вращается в соответствии с заданным условием. При этом луч l_2

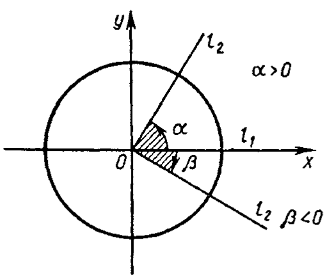

Рис. 2

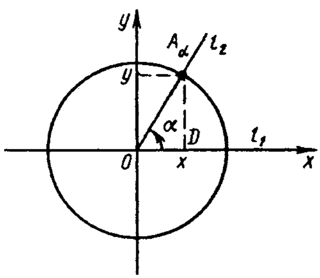

Рис. 3

пересечется с единичной окружностью в точке A_α (рис. 3). Точка A_α, как всякая точка плоскости, имеет свои координаты $(x; y)$.

Определение 1. *Синусом* угла α называется ордината точки A_α пересечения подвижного луча и единичной окружности;

косинусом угла α называется абсцисса точки A_α;

тангенсом угла α называется отношение ординаты точки A_α к ее абсциссе;

котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки A_α к ее ординате.

Если угол α оканчивается в I четверти, то абсцисса и ордината точки $A_\alpha(x; y)$ являются длинами катетов прямоугольного треугольника с гипотенузой, равной 1. В этом случае определения тригонометрических функций угла α совпадают с определениями тригонометрических функций острого угла треугольника.

Если угол α оканчивается в любой другой четверти, то при нахождении значений тригонометрических функций необходимо учитывать знаки координат точки $A_\alpha(x; y)$.

342. Найти значения всех тригонометрических функций угла, если точка A_α единичной окружности имеет координаты (5/13; 12/13).

Решение. Имеем $\sin\alpha = 12/13$; $\cos\alpha = 5/12$; $\operatorname{tg}\alpha = 2/5$; $\operatorname{ctg}\alpha = 5/12$.

343. Найти значения всех тригонометрических функций угла, если точка A_β единичной окружности имеет координаты (0,6; —0,8).

Решение. Находим $\sin\beta = -0{,}8$; $\cos\beta = 0{,}6$; $\operatorname{tg}\beta = -1{,}33$; $\operatorname{ctg}\beta = -0{,}75$.

344. Найти значения тригонометрических функций углов для следующих точек единичной окружности: а) $A(-4/5; -3/5)$; б) $B(-9/41; 40/41)$.

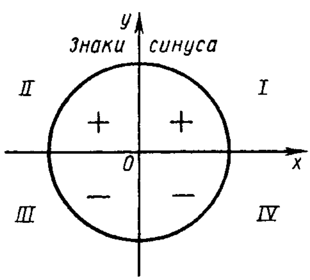

Рис. 4

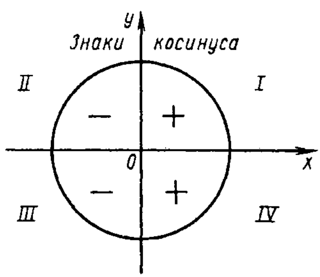

Рис. 5

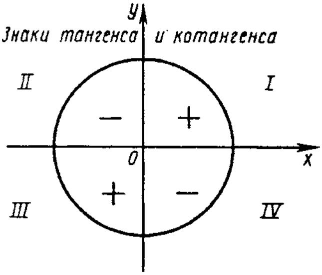

Рис. 6

Знаки тригонометрических функций зависят от того, в какой четверти оканчивается заданный угол.

Так как синусом угла называется ордината точки A_α, то синус положителен в I и II четвертях и отрицателен в III и IV четвертях (рис. 4).

Поскольку косинусом угла называется абсцисса точки A_α, косинус положителен в I и IV четвертях и отрицателен во II и III четвертях (рис. 5).

Так как тангенс угла есть отношение ординаты точки A_α к ее абсциссе, то тангенс положителен, когда знаки координат совпадают, и отрицателен, когда знаки координат различны (рис. 6). Такие же знаки имеет и котангенс. Следовательно, тангенс и котангенс положительны в I и III четвертях и отрицательны во II и IV четвертях.

345—357. Определить знаки следующих выражений:

345. $\sin 35°$; $\cos 167°$; $\operatorname{tg} 3$; $\operatorname{ctg}(-1{,}5)$.

Решение. Так как $35°$ — угол I четверти, то $\sin 35° > 0$; далее, $167°$ — угол, оканчивающийся во II четверти, и, значит, $\cos 167° < 0$; 3 радиана — угол, лежащий во II четверти, поэтому $\operatorname{tg} 3 < 0$; наконец, $-1{,}5$ радиана — угол, оканчивающийся в IV четверти (отсчитываем его по оси Ox по часовой стрелке), т. е. $\operatorname{ctg}(-1{,}5) < 0$.

346. $\sin 167°$; $\cos 215°$, $\operatorname{tg} 135°$; $\operatorname{ctg} 240°$.

347. $\sin\frac{5\pi}{4}$; $\cos\frac{11\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}$; $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$.

348. $\sin 1$; $\cos 2$; $\operatorname{tg} 3{,}5$; $\operatorname{ctg} 6$.

349. $\sin(-115°)$; $\cos(-265°)$; $\operatorname{tg}(-179°)$; $\operatorname{ctg}(-272°)$.

350. $\sin(-1{,}5)$; $\cos(-1)$; $\operatorname{tg}(-0{,}5)$; $\operatorname{ctg}(-5{,}5)$.

351. $\sin 5° \cos 115° \operatorname{tg} 225° \operatorname{ctg} 235°$.

352. $\cos 68° \sin 246° \operatorname{tg} 135° \operatorname{ctg} 72°$.

353. $\operatorname{tg} 35° \operatorname{tg} 135° \operatorname{tg} 235° \operatorname{tg} 335°$.

354. $\sin 179° \cos 271° \operatorname{tg} 365° \operatorname{ctg}(-5°)$.

355. $\operatorname{tg} 3 \operatorname{ctg} 2 \sin 1 \cos 0{,}5$.

356. $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{6}$.

357. $\cos(-3{,}5) \operatorname{tg} 7 \sin(-4) \cos(-6)$.

Значения тригонометрических функций некоторых углов приведены в следующей таблице:

Углы α / Функции	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
	0	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$	$180°$	$270°$	$360°$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	Не сущ.	0	Не сущ.	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	Не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	Не сущ.	0	Не сущ.

358—370. Вычислить значения следующих выражений:

358. $3\sin\frac{\pi}{3}-2\cos\frac{\pi}{6}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

Решение. Из таблицы берем значения $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}=0$ и подставляем в данное выражение:

$$3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}-4\cdot 0=\frac{\sqrt{3}}{2}+3\sqrt{3}=\frac{7\sqrt{3}}{2}.$$

359. $4a^2\sin^4\frac{\pi}{6}-6ab\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+\left(b\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^2$.

Решение. Поскольку $\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}=1$, получаем

$$4a^2\sin^4\frac{\pi}{6}-6ab\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6}+\left(b\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^2=4a^2\left(\frac{1}{2}\right)^4-6ab\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2+(b\cdot 1)^2=$$
$$=4a^2\cdot\frac{1}{16}-6ab\cdot\frac{1}{3}+b^2=\frac{a^2}{4}-2ab+b^2.$$

360. $\sin 0+\cos 60°+3\operatorname{tg}45°$.

361. $2\sin 30°-\operatorname{tg}45°+2\operatorname{ctg}45°+\cos 90°$.

362. $3-\sin^2\pi-2\cos\frac{\pi}{6}+3\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}-4\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$.

363. $3\sin^2\frac{\pi}{2}-2\cos^2\frac{\pi}{3}-3\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$.

364. $\dfrac{4-2\operatorname{tg}^2 45°+\operatorname{ctg}^4 60°}{3\sin^3 90°-4\cos^2 60°+4\operatorname{ctg}45°}$.

365. $\left(2\sin\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(3\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\right)^2+\left(2\cos\frac{\pi}{6}\right)^4-\left(2\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right)^4$.

366. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$ при $\alpha=\pi/6$.

367. $\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha$ при $\alpha=\pi/6$.

368. $\sin 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha-4\cos\alpha-2\operatorname{ctg}2\alpha$ при $\alpha=\pi/4$.

369. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$ при $\alpha=60°$, $\beta=120°$.

370. $2\sin(45°+\alpha)+3\cos(180°-2\alpha)-4\operatorname{ctg}(90°-\alpha)$ при $\alpha=45°$.

Напомним понятия периодичности, четности и нечетности функций.

Определение 2. Функция $y=f(x)$ называется *периодической,* если существует такое число T (называемое *периодом*), что для всех x выполняются равенства $f(x)=f(x+T)$ и $f(x)=f(x-T)$.

Все тригонометрические функции являются периодическими.

Так как при вращении точки A она, сделав полный оборот или несколько полных оборотов, займет первоначальное положение, ее координаты не изменятся. Следовательно, функции $y=\sin x$ и $y=\cos x$ являются периодическими и их наименьший период равен 2π (или 360°), а функции $y=\operatorname{tg}x$ и $y=\operatorname{ctg}x$ являются периодическими и их наименьший период равен π (или 180°). Итак,

$$\sin(x+2\pi k)=\sin x,\quad \cos(x+2\pi k)=\cos x$$

(k — целое число);

$$\operatorname{tg}(x+\pi k)=\operatorname{tg}x,\quad \operatorname{ctg}(x+\pi k)=\operatorname{ctg}x$$

(k — целое число).

Вследствие того, что значение периодических функций не меняется от прибавления к аргументу целого числа периодов, для удобства вычислений можно добавлять или отбрасывать любое целое число периодов.

371. Вычислить: а) $\sin 1110°$; б) $\operatorname{tg}945°$; в) $\cos\frac{25\pi}{4}$.

Решение. а) Период функции $y=\sin x$ равен 360°; поэтому можем опустить целое число периодов:

$$\sin 1110°=\sin(360°\cdot 3+30°)=\sin 30°=\frac{1}{2}.$$

б) Так как период функции $y=\operatorname{tg}x$ равен 180°, то

$$\operatorname{tg}945°=\operatorname{tg}(180°\cdot 5+45°)=\operatorname{tg}45°=1.$$

в) Находим

$$\cos\frac{25\pi}{4}=\cos 6\frac{1}{4}\pi=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

372—374. Вычислить значения функций следующих углов:

372. $\sin 750°$; $\cos 1125°$; $\operatorname{tg}570°$; $\operatorname{ctg}3660°$.

373. $\sin 4\frac{1}{3}\pi$; $\cos\frac{7\pi}{3}$; $\operatorname{tg}\frac{7\pi}{3}$; $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{4}$.

374. $\sin 18\pi$; $\cos 6\pi$; $\operatorname{tg}11\pi$; $\operatorname{ctg}28\pi$.

375—377. Вычислить:

375. $\sin 1560° + \cos 2730° - \operatorname{tg} 1740°$.

376. $\dfrac{\operatorname{tg} 585° \cos 1500°}{\sin 2940°}$. **377.** $\dfrac{\sin 2190° + \cos 1860°}{\operatorname{tg} 2385°}$.

Определение 3. *Четной* функцией называется функция, для которой при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство $f(-x) = f(x)$.

Нечетной функцией называется функция, для которой при всех допустимых значениях аргумента выполняется равенство $f(-x) = -f(x)$.

Среди тригонометрических функций имеется только одна четная $y = \cos x$. Для нее справедливо равенство $\cos(-x) = \cos x$.

Все остальные функции $y = \sin x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ являются нечетными. Для них справедливы равенства $\sin(-x) = -\sin x$, $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$.

378. Вычислить: а) $\sin(-60°)$; б) $\cos(-45°)$; в) $\operatorname{tg}(-945°)$.

Решение. а) Так как $\sin x$ — нечетная функция, то $\sin(-60°) = -\sin 60°$. Итак, $\sin(-60°) = -\sin 60° = -\sqrt{3}/2$.

б) Функция $\cos x$ — четная; поэтому знак минус можно опустить, т. е. $\cos(-45°) = \cos 45°$. Итак, $\cos(-45°) = \cos 45° = \sqrt{2}/2$.

в) Воспользуемся свойствами периодичности и нечетности. Так как функция $\operatorname{tg} x$ — нечетная, то $\operatorname{tg}(-945°) = -\operatorname{tg} 945°$. Далее, период функции $\operatorname{tg} x$ равен $180°$ и, следовательно, $\operatorname{tg}(-945°) = -\operatorname{tg} 945° = -\operatorname{tg}(180° \cdot 5 + 45°) = -\operatorname{tg} 45° = -1$.

379—382. Упростить выражения:

379. $a \sin(-30°) - 2a \operatorname{tg}(-45°) + b \cos(-60°) - b \operatorname{ctg}(-90°)$.

380. $\dfrac{\sin^2(-30°) - 2\operatorname{ctg}(-30°) - 1}{2 - \operatorname{tg} 45° + 4\cos^2(-60°)}$.

381. $[2a \cos(-\pi/3)]^2 - 4[a \operatorname{ctg}(-\pi/6)]^3 + 6\operatorname{tg} 0$.

382. $5\operatorname{tg} 0 + 2\sin(-\pi/6) - 3\operatorname{ctg}(-\pi/4) + 4\cos(-\pi/2)$.

2. Основные тригонометрические тождества

Тригонометрические функции связаны между собой следующими основными тождествами:

I. $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$. II. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

III. $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. IV. $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$.

V. $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$. VI. $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$.

Из тождества I вытекают формулы

$$1 - \cos^2\alpha = \sin^2\alpha \quad \text{и} \quad 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha,$$

которыми мы будем часто пользоваться.

383—394. Упростить выражения:

383. $\sin^2 x+\cos^2 x+\operatorname{ctg}^2 x$.

Решение. Используя тождества I и VI, получим

$$(\sin^2 x+\cos^2 x)+\operatorname{ctg}^2 x=1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

384. $\dfrac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}+\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.

Решение. Применив формулы $1-\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$, $1-\sin^2\alpha=$ $=\cos^2\alpha$ и тождества IV и VI, находим

$$\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}+\operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x=\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+1=\operatorname{tg}^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

385. $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$.

Решение. Воспользуемся формулами квадрата суммы и разности двух чисел:

$$(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2=\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha+$$
$$+2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha=4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=4$$

(после приведения подобных членов применили тождество IV).

386. $\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}$.

Решение. Раскроем скобки, а затем заменим $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, применяя тождества II и III:

$$\sqrt{\sin^2\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)}=$$
$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha+\cos^2\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{tg}\alpha}=$$
$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos^2\alpha\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=$$
$$=\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\sqrt{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=\sin\alpha+\cos\alpha.$$

387. $(1+\cos\alpha)\operatorname{ctg}^2\alpha(1-\cos\alpha)$.

388. $1-\sin\alpha\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha$.

389. $\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}\operatorname{ctg}\beta\operatorname{tg}\alpha+1$.

390. $\sin^2\alpha-\sin^2\beta-\cos^2\beta-\cos^2\alpha$.

391. $\sqrt{\dfrac{2}{1+\sin\alpha}+\dfrac{2}{1-\sin\alpha}}$.

392. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha$.

393. $\sin^4\beta-\cos^4\beta+\cos^2\beta$.

394. $\cos^4\beta+\sin^2\beta\cos^2\beta+\sin^2\beta$.

С помощью основных тригонометрических тождеств решается задача отыскания значений всех тригонометрических функций по известному значению одной из них.

395. Найти значения $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$, если известно, что $\sin x=-3/5$, $0<x<3\pi/2$.

Решение. Так как угол x оканчивается в III четверти, то $\cos x<0$, а $\operatorname{tg} x>0$ и $\operatorname{ctg} x>0$.

Используя значение $\sin x$ и формулу $\cos^2 x=1-\sin^2 x$, находим $\cos^2 x=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}$, откуда $\cos x=-\frac{4}{5}$; $\operatorname{tg} x=\frac{3}{4}$; $\operatorname{ctg} x=\frac{4}{3}$.

396. Найти значения $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{ctg} x$, если известно, что $\operatorname{tg} x=-8/15$, $3\pi/2<x<2\pi$.

Решение. Прежде всего найдем $\operatorname{ctg} x=-15/8$. Поскольку угол x оканчивается в IV четверти, заключаем, что $\sin x<0$, а $\cos x>0$. Согласно тождеству V, имеем $1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x}$, откуда $\cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Следовательно, $\cos^2 x=\frac{1}{1+\frac{64}{225}}=\frac{1}{\frac{289}{225}}=\frac{225}{289}$, т. е. $\cos x=\frac{15}{17}$. Используя формулу $\sin^2 x=1-\cos^2 x$, получим $\sin^2 x=1-\frac{225}{289}=\frac{64}{289}$, т. е. $\sin x=-\frac{8}{17}$.

397—400. Найти значения всех тригонометрических функций, если известно:

397. $\cos x=-0{,}8$; $\pi/2<x<\pi$.

398. $\operatorname{ctg} x=5/12$; $0<x<\pi/2$.

399. $\operatorname{tg} x=-4/3$; $\frac{\pi}{2}<x<\pi$.

400. $\sin x=-7/25$; $3\pi/2<x<2\pi$.

3. Формулы сложения аргументов

Формулы сложения аргументов имеют следующий вид:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha; \qquad (3)$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha; \qquad (4)$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta; \qquad (5)$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta; \qquad (6)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}; \qquad (7)$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (8)$$

401. Вычислить $\cos 75°$.

Решение. Воспользуемся тем, что $75°=30°+45°$, и применим формулу (5):

$$\cos 75°=\cos(30°+45°)=\cos 30°\cos 45°-\sin 30°\sin 45°=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

402. Упростить выражение

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}.$$

Решение. Применяя формулы (5) и (6), получим

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta.$$

403. Упростить выражение

$$\frac{\sin 11^\circ\cos 15^\circ+\sin 15^\circ\cos 11^\circ}{\sin 18^\circ\cos 12^\circ+\sin 12^\circ\cos 18^\circ}.$$

Решение. Числитель и знаменатель представляют собой развернутые выражения синуса суммы по формуле (3). Следовательно,

$$\frac{\sin 11^\circ\cos 15^\circ+\sin 15^\circ\cos 11^\circ}{\sin 18^\circ\cos 12^\circ+\sin 12^\circ\cos 18^\circ}=\frac{\sin(11^\circ+15^\circ)}{\sin(18^\circ+12^\circ)}=\frac{\sin 26^\circ}{\sin 30^\circ}=\frac{\sin 26^\circ}{\frac{1}{2}}=2\sin 26^\circ.$$

404. Доказать тождество

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Решение. Используя формулы (3) и (4), преобразуем левую часть тождества:

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha+\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha-\sin\alpha\cos\frac{\pi}{4}}=$$

$$=\frac{2\sin\frac{\pi}{6}\cos\alpha}{2\sin\frac{\pi}{4}\cos\alpha}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{4}}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

405—409. Упростить выражения:

405. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)}$.

406. $\dfrac{\sin(45^\circ+\alpha)-\cos(45^\circ+\alpha)}{\sin(45^\circ+\alpha)+\cos(45^\circ+\alpha)}$.

407. $\dfrac{\cos 65^\circ\cos 40^\circ+\sin 65^\circ\sin 40^\circ}{\sin 37^\circ\cos 12^\circ-\cos 37^\circ\sin 12^\circ}$.

408. $\cos 3\alpha\cos\alpha+\sin 3\alpha\sin\alpha$.

409. $\sin 5\alpha\cos 2\alpha-\sin 2\alpha\cos 5\alpha$.

410—414. Доказать тождества:

410. $\sin 15^\circ+\operatorname{tg}30^\circ\cos 15^\circ=\sqrt{6}/3$.

411. $\cos\alpha+\cos(120^\circ-\alpha)+\cos(120^\circ+\alpha)=0$.

412. $\sin^2\alpha+\sin^2(120°+\alpha)+\sin^2(120°-\alpha)=3/2$.

413. $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$.

414. $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$.

4. Формулы приведения

Значения тригонометрических функций острых углов вычисляют по таблицам. Значения функций любых углов можно вычислить с помощью формул приведения к острому углу.

Сформулируем общее правило написания формул приведения.

1^0. Знак тригонометрической функции определяют по первоначально заданному углу.

2^0. Если аргумент можно представить как сумму или разность π, 2π и острого угла, то название функции не изменяют.

3^0. Если аргумент можно представить как сумму или разность $\pi/2$, $3\pi/2$ и острого угла, то название функции изменяют на сходное (синус — на косинус, тангенс — на котангенс).

415. Вычислить $\sin 210°$.

Решение. Представим $210°$ как $180°+30°$. Применяя п. 1^0 и 2^0 правила и учитывая, что угол $210°$ оканчивается в III четверти, находим

$$\sin 210°=\sin(180°+30°)=-\sin 30°=-1/2.$$

416. Вычислить $\cos 300°$.

Решение. Так как $300°=270°+30°$ и данный угол оканчивается в IV четверти, то $\cos 300°=\cos(270°+30°)=\sin 30°=1/2$.

417. Вычислить $\sin\frac{53\pi}{6}$.

Решение. Имеем $\frac{53\pi}{6}=8\frac{5}{6}\pi$. Опуская целое число периодов, получим

$$\sin\frac{53\pi}{6}=\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

418. Вычислить $\operatorname{tg}(-300°)$.

Решение. Функция $y=\operatorname{tg}x$ — нечетная, поэтому $\operatorname{tg}(-300°)=-\operatorname{tg}300°$. Так как $300°=270°+30°$ и угол $300°$ оканчивается в IV четверти, то

$$\operatorname{tg}(-300°)=-\operatorname{tg}300°=-\operatorname{tg}(270°+30°)=\operatorname{ctg}30°=\sqrt{3}.$$

419. Вычислить $\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+$ $+\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

Решение. Используя сначала свойства четности и нечетности функций, а затем формулы приведения, находим

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)+\operatorname{tg}\left(-\frac{11\pi}{6}\right)+\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)=$$

$$= -\sin\frac{5\pi}{3}+\cos\frac{5\pi}{4}-\mathrm{tg}\frac{11\pi}{6}-\mathrm{ctg}\frac{4\pi}{3}=$$

$$= -\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}\right)-\mathrm{tg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)-\mathrm{ctg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)=$$

$$=\sin\frac{\pi}{3}-\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{tg}\frac{\pi}{6}-\mathrm{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{2}.$$

420—422. Вычислить:

420. $\sin^2(-330°)-\cos^2(-120°)-\mathrm{tg}^2(-240°)+\mathrm{ctg}^2(-330°)$.

421. $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi-\alpha)+\mathrm{tg}(\pi-\alpha)-\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

422. $\dfrac{\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right)}{\cos\frac{11\pi}{6}}-\dfrac{\mathrm{tg}\frac{5\pi}{6}\sin\frac{5\pi}{3}}{\cos\pi}+\cos\left(-\frac{4\pi}{3}\right)\mathrm{ctg}\frac{2\pi}{3}$.

423—427. Упростить выражения:

423. $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\mathrm{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{ctg}^2\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$.

424. $\dfrac{\sin 160°\cos 70°-\cos 200°\sin 70°-\cos 235°\sin 215°}{\mathrm{tg}\,55°\,\mathrm{ctg}\,215°}$.

425. $\sin(\alpha-90°)-\cos(\alpha-180°)+\mathrm{tg}(\alpha-270°)+\mathrm{ctg}(360°+\alpha)$.

426. $\dfrac{\mathrm{tg}(270°-\alpha)\sin 130°\cos 320°\sin 270°}{\mathrm{ctg}(180°-\alpha)\cos 50°\sin 220°\cos 360°}$.

427. $\dfrac{\sin^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)\cos(2\pi-\alpha)}{\mathrm{tg}^3\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\cos^3\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

428—432. Доказать тождества:

428. $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\,\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\,\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}=1$.

429. $\dfrac{\mathrm{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)\left[\sin\left(\alpha-\frac{3}{2}\pi\right)-\sin(\pi+\alpha)\right]}{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)[\cos(\alpha+2\pi)+\sin(\alpha-2\pi)]}=-1$.

430. $\dfrac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)}+\mathrm{tg}(\pi-\alpha)=0$.

431. $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(-\alpha)}{\mathrm{ctg}(\pi-\alpha)\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\alpha$.

432. $\mathrm{tg}\,10°\,\mathrm{tg}\,20°\,\mathrm{tg}\,30°\,\mathrm{tg}\,40°\,\mathrm{tg}\,50°\,\mathrm{tg}\,60°\,\mathrm{tg}\,70°\,\mathrm{tg}\,80°=1$.

5. Формулы двойных и половинных углов

Полагая $\beta=\alpha$ в формулах (3), (5), (7) сложения аргументов, получим следующие формулы двойных углов:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha; \tag{9}$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha; \tag{10}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}. \tag{11}$$

Из формулы (10) вытекают два часто употребляемых соотношения

$$1+\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1; \tag{12}$$

$$1-\cos 2\alpha=2\sin^2\alpha \quad \text{или} \quad \cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha. \tag{13}$$

Из формул (12) и (13) можно получить формулы половинных углов:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}, \quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}, \tag{14}$$

где знак зависит от четверти, в которой оканчивается угол $\alpha/2$.

Заменяя в равенствах (9) — (11) 2α на α, а α на $\alpha/2$, находим:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{\alpha}\cos\frac{\alpha}{2}; \tag{15}$$

$$\cos\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}; \tag{16}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{17}$$

Кроме того, $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ выражаются через тангенс половинного угла по формулам

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}, \tag{18}$$

$$\cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}. \tag{19}$$

433—441. Упростить выражения:

433. $2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$.

Решение. Согласно формулам (9) и (10) имеем

$$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\sin 2\alpha\cos 2\alpha.$$

Умножив и разделив произведение на 2, получим

$$\sin 2\alpha\cos 2\alpha=\frac{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha}{2}=\frac{\sin 4\alpha}{2}.$$

434. $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$.

Решение. Применяя последовательно формулы (13), (12) и (9), вынося общий множитель за скобки и преобразуя, находим

$$\frac{(1-\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}{(1+\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha}=\frac{2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)}{2\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

435. $\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

Решение. Для преобразования произведения квадратов функций в квадрат произведения воспользуемся формулой (15), а затем применим формулу (10):

$$\cos^2\alpha-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=\cos^2\alpha-\left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)^2=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha.$$

436. $\dfrac{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

437. $\sqrt{\dfrac{1-\cos 4\alpha}{2\cos^2 2\alpha}}$.

438. $\dfrac{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha-\sin\alpha}$.

439. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 4\alpha}{2}}$.

440. $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha$.

441. $\sqrt{\dfrac{1+\cos 2\alpha}{1-\cos 2\alpha}}$.

442—446. Доказать тождества:

442. $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

443. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$.

444. $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$.

445. $\dfrac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}=\operatorname{tg}^2\dfrac{\alpha}{2}$.

446. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$.

6. Формулы сложения одноименных функций

Формулы сложения одноименных тригонометрических функций позволяют преобразовать сумму и разность функций в произведение этих функций. Они имеют следующий вид:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{20}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{21}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{22}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}. \tag{23}$$

447—458. Преобразовать в произведения следующие выражения:

447. $\sin 75°+\sin 15°$.

Решение. Воспользуемся формулой (20):

$$\sin 75°+\sin 15°=2\sin\frac{75°+15°}{2}\cos\frac{75°-15°}{2}=2\sin 45°\cos 30°=$$

$$=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

448. $\dfrac{\sin 7\alpha-\sin 5\alpha}{\sin 7\alpha+\sin 5\alpha}$.

Решение. Применяя формулы (20) и (21), получим

$$\frac{\sin 7\alpha-\sin 5\alpha}{\sin 7\alpha+\sin 5\alpha}=\frac{2\sin\dfrac{7\alpha-5\alpha}{2}\cos\dfrac{7\alpha+5\alpha}{2}}{2\sin\dfrac{7\alpha+5\alpha}{2}\cos\dfrac{7\alpha-5\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha\cos 6\alpha}{\sin 6\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}6\alpha.$$

449. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$.

Решение. Сгруппировав слагаемые и применив формулы (23) и (20), вынесем общие множители за скобки и сократим дробь:

$$\frac{(\cos\alpha-\cos 3\alpha)+(\cos 5\alpha-\cos 7\alpha)}{(\sin\alpha+\sin 3\alpha)+(\sin 5\alpha+\sin 7\alpha)}=$$

$$=\frac{\left(-2\sin\dfrac{\alpha-3\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha+3\alpha}{2}\right)+\left(-2\sin\dfrac{5\alpha-7\alpha}{2}\sin\dfrac{5\alpha+7\alpha}{2}\right)}{2\sin\dfrac{\alpha+3\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha-3\alpha}{2}+2\sin\dfrac{5\alpha+7\alpha}{2}\cos\dfrac{5\alpha-7\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{2\sin\alpha\sin 2\alpha+2\sin\alpha\sin 6\alpha}{2\sin 2\alpha\cos\alpha+2\sin 6\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\,(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)}{2\cos\alpha(\sin 2\alpha+\sin 6\alpha)}=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$$

450. $\sin(45°+\alpha)-\sin(45°-\alpha)$.

Решение. Сначала найдем сумму и разность аргументов:

$$(45°+\alpha)+(45°-\alpha)=45°+\alpha+45°-\alpha=90°;$$

$$(45°+\alpha)-(45°-\alpha)=45°+\alpha-45°+\alpha=2\alpha.$$

Используя теперь формулу (21), находим

$$\sin(45°+\alpha)-\sin(45°-\alpha)=2\sin\alpha\cos 45°=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha=\sqrt{2}\sin\alpha.$$

451. $1+2\cos\alpha$.

Решение. Вынесем за скобки множитель 2, а затем представим 1/2 как $\cos 60°$:

$$1+2\cos\alpha=2\left(\frac{1}{2}+\cos\alpha\right)=2(\cos 60°+\cos\alpha).$$

Применяя формулу (22), получим

$$2(\cos 60°+\cos\alpha)=2\cdot 2\cos\frac{60°+\alpha}{2}\cos\frac{60°-\alpha}{2}=$$

$$=4\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right).$$

452. $\frac{\sin 75° + \sin 15°}{\sin 75° - \sin 15°}$.

453. $\frac{\cos 6\alpha - \cos 4\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha}$.

454. $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha$.

455. $\cos\alpha + \cos 2\alpha + \cos 3\alpha + \cos 4\alpha$.

456. $\sin 19° + \sin 25° + \sin 6°$.

457. $1 - \sqrt{2}\cos\alpha$.

458. $\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha}{\cos\alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}$.

7. Обратные тригонометрические функции

Определение 4. *Арксинусом* числа m называется такой угол x, для которого $\sin x = m$, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $|m| \leqslant 1$.

Арккосинусом числа m называется такой угол x, для которого $\cos x = m$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$, $|m| \leqslant 1$.

Арктангенсом числа m называется такой угол x, для которого $\operatorname{tg} x = m$, $-\pi/2 < x < \pi/2$.

Арккотангенсом числа m называется такой угол x, для которого $\operatorname{ctg} x = m$, $0 < x < \pi$.

Очевидно, что отыскание значений обратной тригонометрической функции представляет собой задачу нахождения угла по известному значению его тригонометрической функции.

Например,

$$\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6};\quad \arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2};\quad \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4};$$

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4},\quad \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4};\quad \operatorname{arcctg} 0 = \frac{\pi}{2};$$

С помощью обратных тригонометрических функций можно решать простейшие тригонометрические уравнения:

$$\sin x = m,\ |m| \leqslant 1;\ x = (-1)^k \arcsin m + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}; \qquad (24)$$

$$\cos x = m,\ |m| \leqslant 1;\ x = \pm\arccos m + 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}; \qquad (25)$$

$$\operatorname{tg} x = m,\ m \text{ — любое число};\ x = \operatorname{arctg} m + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}; \qquad (26)$$

$$\operatorname{ctg} x = m,\ m \text{ — любое число};\ x = \operatorname{arcctg} m + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}. \qquad (27)$$

459—467. Решить простейшие тригонометрические уравнения:

459. а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg} x = 3$; г) $\operatorname{ctg} x = -1$.

Решение. а) Согласно формуле (24), получим

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k,\ k \in \mathbf{Z}.$$

б) По формуле (25) находим

$$x=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}+2\pi k=\pm\frac{\pi}{4}+2\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

в) В соответствии с формулой (26) имеем

$$x=\operatorname{arcctg}3+\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

г) Применяя формулу (27) и учитывая, что $\operatorname{arcctg}(-1)=\pi-\operatorname{arcctg}1=\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}$, получим

$$x=\operatorname{arcctg}(-1)+\pi k=\frac{3\pi}{4}+\pi k,\quad k\in\mathbf{Z}.$$

460. $\sin x=\frac{1}{2}$. **461.** $\cos x=-\frac{1}{2}$.

462. $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$. **463.** $\operatorname{ctg}x=\sqrt{3}$.

464. $\sin x=0$. **465.** $\cos x=0$.

466. $\operatorname{tg}x=0$. **467.** $\operatorname{ctg}x=0$.

8. Тригонометрические уравнения

Уравнение называется *тригонометрическим*, если неизвестная величина входит в него как аргумент тригонометрической функции.

468—501. Решить тригонометрические уравнения:

468. $2\cos^2 x-3\cos x=0$.

Решение. Вынесем $2\cos x$ за скобки: $2\cos x(\cos x-1{,}5)=0$. Так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда равен нулю один из сомножителей, то $\cos x=0$ или $\cos x-1{,}5=0$. Решая простейшее уравнение $\cos x=0$, находим $x=\pm\arccos 0+2\pi k=\pm\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Уравнение $\cos x-1{,}5=0$ не имеет решений, поскольку $\cos x\neq 1{,}5$.

469. $2\sin^2 x-3\sin x-2=0$.

Решение. Полагая $\sin x=y$, получим квадратное уравнение $2y^2-3y-2=0$. Здесь $a=2$, $b=-3$, $c=-2$, $D=b^2-4ac=(-3)^2-4\cdot2\cdot(-2)=9+16=25$, $\sqrt{D}=5$. Значит, $y_1=\frac{3-5}{4}=-\frac{1}{2}$, $y_2=\frac{3+5}{4}=2$.

Итак, $y_1=-\frac{1}{2}$ и $y_2=2$, т. е. $\sin x=-\frac{1}{2}$ и $\sin x=2$. Решение уравнения $\sin x=-\frac{1}{2}$ имеет вид $x=(-1)^k\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\pi k=(-1)^{k+1}\times\arcsin\frac{1}{2}+\pi k$, т. е. $x_1=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$, $k\in\mathbf{Z}$. Уравнение $\sin x=2$ не имеет решений.

470. $\sin^2 x+2\sin x\cos x=3\cos^2 x$.

Решение. Это — однородное уравнение относительно $\sin x$ и $\cos x$; разделив все его члены на $\cos^2 x\neq 0$, получим

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}+\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x}-\frac{3\cos^2 x}{\cos^2 x}=0;\quad \operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg}x-3=0.$$

Полагая $\operatorname{tg} x = y$, имеем квадратное уравнение $y^2 + 2y - 3 = 0$. Решая его, находим $y_1 = \frac{-2-4}{2} = -3$, $y_2 = \frac{-2+4}{2} = 1$.

Итак, $x_1 = \operatorname{arctg}(-3) + \pi k = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k$, $x_2 = \operatorname{arctg} 1 + \pi k = \pi/4 + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

471. $\cos x + \cos 3x + \cos 5x = 0$.

Решение. Группируя первый и последний члены и применяя формулу суммы косинусов, получим

$$(\cos x + \cos 5x) + \cos 3x = 0;\ 2\cos 3x \cos x + \cos 3x = 0.$$

Следовательно, $\cos 3x(2\cos x + 1) = 0$, откуда $\cos 3x = 0$ или $2\cos x + 1 = 0$. Решая уравнение $\cos 3x = 0$, находим $3x = \pm\arccos 0 + 2\pi k = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, т. е. $x_1 = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$. Решая уравнение $2\cos x + 1 = 0$, имеем $\cos x = -\frac{1}{2}$, т. е. $x_2 = \pm\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.

472. $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$.

473. $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$.

474. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.

475. $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$.

476. $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$.

477. $2\sin^2 x = 3\cos x$.

478. $3\sin^2 x = \cos^2 x$.

479. $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 13\cos x \sin x$.

480. $3\sin x \cos x + 4\cos^2 x = 0$.

481. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

482. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

483. $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$.

484. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2\cos(2\pi - x) = 0$.

485. $\sin(x - 90°) + \sin(x - 180°) = 0$.

486. $\sin x \cos x = 0{,}25$.

487. $\cos 2x = \cos x$.

488. $\sin^2 x - \cos^2 x = 0{,}5$.

489. $1 + \sin^2 2x = 4\sin^2 x$.

490. $\sin 6x - \sin 4x = 0$.

491. $\cos 4x + \cos x = 0$.

492. $\cos 3x = \sin x$.

493. $\sin 3x = \sin 2x - \sin x$.

494. $\cos x + \cos 3x = \cos 2x$.

495. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 3x = 0$.

496. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

497. $2\cos^2 x - 3\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 0$.

498. $\sin^4 x + \cos^2 2x = 2$.

499. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$.

500. $1 - \cos 2x = 2\sin x$.

501. $3\cos^2\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \sin x \cos x = 1$.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Перечислите формулы сокращенного умножения.
2. Возведите в квадрат $(3a^2+2b^3)$.
3. Возведите в квадрат $(4a^3-5b^2)$.
4. Возведите в куб $(5x+2y)$.
5. Возведите в куб $(6x^2-4y^3)$.
6. Упростите выражение $\frac{x}{4x^2-9y^2}-\frac{1}{3y-2x}$.
7. Что значит возвести число в степень n?
8. Сформулируйте правило знаков.
9. Как перемножить две степени с одинаковыми основаниями?
10. Как разделить две степени с одинаковыми основаниями?
11. Как возвести степень в степень?
12. Как извлечь корень из степени?
13. Чему равна нулевая степень любого числа?
14. Вычислите $\left[\left(37{,}2-\left(\frac{5}{28}\right)^2\right)^{-1/4}\right]^0$.
15. Как найти степень с отрицательным показателем?
16. Вычислите: 5^{-3}, $(-2)^{-3}$; $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$
17. Запишите с помощью отрицательных показателей выражение $y=\frac{1}{a^2b^3c}$.
18. Как найти степень с дробным показателем?
19. Вычислите: $8^{1/3}$; $9^{3/2}$; $81^{3/4}$.
20. Запишите с помощью дробных степеней выражения $\sqrt[5]{a^2}$; $\sqrt[3]{a^2b}$; $\frac{1}{\sqrt[3]{a^2b^5c}}$.
21. Какое уравнение называется показательным?
22. Сформулируйте правило решения простейших показательных уравнений.
23. Решите уравнение $2^x+2^{x-2}+2^{x-3}=\frac{11}{4}$.
24. Решите уравнение $\frac{\sqrt{5}}{5^{x-3}}=125\cdot 0{,}04^{x+1}$.
25. Решите уравнение $9\cdot 3^{2x}-28\cdot 3^x+3=0$.
26. Дайте определение логарифма.
27. Вычислите $\log_3 81$; $\log_{15} 1$; $\log_3\frac{1}{27}$; $\log_{1/2} 2\sqrt{2}$.
28. Сформулируйте теоремы о логарифмах произведения, частного степени и корня.
29. Найдите $\log x$, если $x=\frac{a^2(a+b)}{\sqrt{c}}$.
30. Найдите x, если $\log x=\frac{1}{2}\log(a+b)+\frac{2}{3}\log c-\frac{1}{3}\log(a-c)$.
31. Какие уравнения называются логарифмическими?
32. Какие корни уравнения называются посторонними?
33. Чем обязательно следует заканчивать решение любого логарифмического уравнения?
34. Решите уравнение $\log_2(x-5)-\log_2(2x+5)=3\log_2 2$.
35. Решите уравнение $\lg^2 x-\lg x-6=0$.
36. Сформулируйте основное свойство корня.
37. Приведите к одному показателю $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a^2}$, $\sqrt[5]{a^3}$.
38. Упростите выражение $\sqrt[10]{32x^5(x-y)^{15}}$.
39. Как извлечь корень из произведения?

40. Как извлечь корень из дроби?
41. Как извлечь корень из степени?
42. Упростите $\sqrt[3]{x^8}$.
43. Упростите $\sqrt[3]{2x^6}$.
44. Освободите от дроби подкоренное выражение: $\sqrt[3]{\frac{3}{5a^2}}$; $\sqrt[5]{\frac{a}{(a+b)^3}}$.
45. Упростите выражение $\sqrt[5]{\frac{a^3}{b^3}+\frac{a^2}{b^3}}$.
46. Как производится умножение корней одинаковой степени?
47. Как производится умножение корней разных степеней?
48. Найдите произведение $\sqrt[5]{a^2(a+b)}\cdot\sqrt[5]{a(a-b)}$.
49. Перемножьте корни $\sqrt[3]{a^2}$ и $\sqrt[4]{a^3}$.
50. Как производится деление корней одинаковой степени?
51. Произведите деление $\sqrt[5]{a^3b^6c^7}$ на $\sqrt[5]{bc^2}$.
52. Как производится возведение корня в степень?
53. Выполните действия: $(\sqrt[3]{3a^2x^3c})^5$.
54. Какие корни называются подобными?
55. Освободитесь от корня в знаменателе: $\frac{5}{\sqrt{a}}$; $\frac{a+3}{\sqrt{a^2-9}}$; $\frac{6}{\sqrt{5}-1}$.
56. Какие уравнения называются иррациональными?
57. Как возникает в решении посторонний корень?
58. Решите уравнение $\sqrt{5-x}+7=4$.
59. Решите уравнение $\sqrt{x-3}\cdot\sqrt{2x+2}=x+1$.
60. Что называется единичной окружностью?
61. Что называется градусом?
62. Каковы соотношения между градусом, минутой и секундой?
63. Какие тригонометрические функции называются периодическими?
64. Чему равен период функции $y=\sin x$; $y=\cos x$?
65. Чему равен период функции $y=\operatorname{tg} x$; $y=\operatorname{ctg} x$?
66. Какие тригонометрические функции являются четными?
67. Какие тригонометрические функции являются нечетными?
68. Выпишите в тетрадь таблицу значений тригонометрических функций некоторых углов.
69. Перечислите основные тригонометрические тождества.
70. Упростите выражение $\frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x}+\cos^2 x+\sin^2 x$.
71. Запишите формулы сложения аргументов.
72. Вычислите $\sin 15°$.
73. Вычислите $\cos 15°\cos 45° - \sin 15°\cos 45°$.
74. Сформулируйте правило написания формул приведения.
75. Вычислите $\cos 150°$.
76. Вычислите $\operatorname{tg} 210°$.
77. Перечислите формулы двойных углов.
78. Перечислите формулы половинных углов.
79. Запишите формулы сложения функций.
80. Вычислите $\cos 75° + \cos 15°$.
81. Вычислите $\sin 45° - \sin 15°$.
82. Что называется арксинусом угла?
83. Что называется арккосинусом угла?
84. Что называется арктангенсом угла?
85. Вычислите $\arcsin(1/2)$.
86. Вычислите $\arccos(-1/2)$.
87. Вычислите $\operatorname{arctg}(-1)$.
88. Перечислите формулы решения простейших тригонометрических уравнений.
89. Решите уравнение $\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x = 0$.

90. Решите уравнение $3\cos^2 x + 8\cos x - 3 = 0$.

91. Решите уравнение $\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$.

Ответы

2. $9a^4 + 12a^2b^3 + 4b^6$. **3.** $16a^6 - 40a^3b^2 + 25b^4$. **4.** $125x^3 + 150x^2y + 60xy^2 + 8y^3$. **5.** $216x^6 - 432x^4y^3 + 288x^2y^6 - 64y^9$. **6.** $\dfrac{3(x+y)}{4x^2 - 9y^2}$. **14.** 1. **16.** $1/125$; $-1/8$; $16/9$. **17.** $y = a^{-2}b^{-3}c^{-1}$. **19.** 2; 27; 27. **20.** $a^{2/5}$; $a^{2/3}b^{1/3}$; $a^{-2/3}b^{-5/3}c^{-1/3}$. **23.** 1. **24.** $x = -2{,}5$. **25.** $x_1 = 1$; $x_2 = -2$. **27.** 4; 0; $-1/3$; $-3/2$. **29.** $\log x = 2\log a + \log(a+b) - \frac{1}{2}\log c$. **30.** $x = \sqrt{a+b}\sqrt[3]{\dfrac{c^2}{a-c}}$. **34.** Нет решений. **35.** $x_1 = 1000$; $x_2 = 0{,}01$. **37.** $\sqrt[30]{a^{15}}$; $\sqrt[30]{a^{20}}$; $\sqrt[30]{a^{18}}$. **38.** $\sqrt{2x(x-y)^3}$. **42.** $x^2\sqrt[3]{x^2}$. **43.** $x^2\sqrt[3]{2}$. **44.** $\dfrac{1}{5a}\sqrt[3]{75a}$; $\sqrt[5]{a(a+b)^2}$. **45.** $\dfrac{1}{b}\sqrt[5]{a^2(a+1)b^2}$. **48.** $a\sqrt[3]{a^2-b^2}$. **49.** $a\sqrt[12]{a^5}$. **51.** $bc\sqrt[5]{a^3}$. **53.** $3a^3x^5c\sqrt[3]{9ac^2}$. **55.** $5\sqrt{a}/a$; $\sqrt{a^2-9}/(a-3)$; $\sqrt{5}+1$. **58.** Нет решений. **59.** $x = 7$. **70.** $1/\cos^2 x$. **72.** $(\sqrt{6} - \sqrt{2})/4$. **73.** $1/2$. **75.** $-\sqrt{3}/2$. **76.** $\sqrt{3}/3$. **80.** $\sqrt{6}/2$. **81.** $\sqrt{3}\sin 15°$. **85.** $\pi/6$. **86.** $2\pi/3$. **87.** $-\pi/4$. **89.** πk; $\operatorname{arctg} 5 + \pi k$; $k \in \mathbf{Z}$. **90.** $\pm\arccos\frac{1}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. **91.** $\pm\frac{\pi}{10} + \frac{2}{5}\pi k$; $\pm\frac{\pi}{3} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$.