Глава I

Линейная алгебра

§ 1. Определение матрицы. Действия над матрицами и векторами

Матрицы
Виды матриц. Векторы
Равенство матриц
Линейные операции над матрицами
Умножение матриц
Свойства умножения матриц

1. Матрицы

Матрицей называется множество чисел, образующих прямоугольную таблицу, которая содержит m строк и n столбцов. Для записи матрицы используется следующее обозначение:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Для любого элемента a_{ij} первый индекс i означает номер строки, а второй индекс j — номер столбца. Сокращенно прямоугольную матрицу типа $m \times n$ можно записать так: $A = (a_{ij})$, где $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

2. Виды матриц. Векторы

Если число строк матрицы не равно числу столбцов ($m \neq n$), то матрица называется *прямоугольной*. Таковы, например, матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \end{pmatrix}.$$

Если число строк равно числу столбцов ($m = n$), то матрица называется *квадратной*. Например, квадратными являются матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

Число строк или столбцов квадратной матрицы называется ее *порядком*. Так, в последнем примере порядок матрицы A равен 2, а порядок матрицы B равен 4.

Рассмотрим квадратную матрицу порядка n:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональ, содержащую элементы a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, будем называть *главной*, а диагональ, содержащую элементы a_{1n}, $a_{2,n-1}$, ..., a_{n1}, — *побочной* (или вспомогательной).

Среди квадратных матриц выделим матрицы, у которых отличны от нуля только элементы, находящиеся на главной диагонали:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{12} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы называются *диагональными*; например, матрицы

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

являются диагональными матрицами второго и четвертого порядка.

Если у диагональной матрицы все числа главной диагонали равны между собой, т. е. $a_{11}=a_{22}=\dots=a_{nn}$, то такая диагональная матрица называется *скалярной*. Если в скалярной матрице все числа главной диагонали равны единице, то матрица называется *единичной* и обозначается буквой E:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой матрицей* и обозначается так:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В прямоугольной матрице типа $m\times n$ возможен случай, когда $m=1$. При этом получается *матрица-строка*:

$$A=(a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n}).$$

В случае, когда $n=1$, получаем *матрицу-столбец*:

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

Такие матрицы-строки и матрицы-столбцы иначе будем называть *векторами*.

3. Равенство матриц

Две матрицы называются *равными*, если они имеют одинаковое число строк m и одинаковое число столбцов n и их соответствующие элементы равны: $a_{ij}=b_{ij}$.

Так, матрицы

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}$$

равны, если $a_{11}=b_{11}$, $a_{12}=b_{12}$, $a_{13}=b_{13}$, $a_{21}=b_{21}$, $a_{22}=b_{22}$, $a_{23}=b_{23}$.

Равные матрицы обязательно имеют одно и то же строение: либо обе они прямоугольные типа $m\times n$, либо квадратные одного и того же порядка n.

Если в матрице типа $m\times n$, имеющей вид

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

переставить строки со столбцами, получим матрицу типа $n\times m$, которую будем называть *транспонированной* матрицей:

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

В том случае, когда матрица состоит из одной строки (матрица-строка), т. е.

$$B=(b_1 \quad b_2 \quad \dots \quad b_n),$$

транспонированная матрица является матрицей-столбцом:

$$B^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

4. Линейные операции над матрицами

Суммой матриц A и B условимся называть такую матрицу, элементы которой равны сумме соответствующих элементов матриц A и B. Складывать можно только матрицы, имеющие одинаковое строение: или прямоугольные типа $m\times n$, или квадратные порядка n.

Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Тогда сумма матриц $C=A+B$ имеет вид

$$C=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mn} \end{pmatrix},$$

где $c_{11}=a_{11}+b_{11}$, $c_{12}=a_{12}+b_{12}$; ... $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$, ..., $c_{mn}=a_{mn}+b_{mn}$.

1. Сложить матрицы A и B, если:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 0 & 0 & 0 \\ 7 & 10 & 0 \end{pmatrix}$,

г) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Решение. а) Здесь A и B — квадратные матрицы второго порядка. Складывая их соответствующие элементы, получим

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2-1 & 4+3 \\ -1+1 & 3-4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

б) Здесь A и B — прямоугольные матрицы типа 2×3. Складываем их соответствующие элементы:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 1+2 & 2-4 & -3+1 \\ 2+3 & -4+0 & 5+2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 5 & -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

в) Здесь A и B — квадратные матрицы третьего порядка. Складываем их соответствующие элементы:

$$C=A+B=\begin{pmatrix} 2-5 & 1+3 & 3+16 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1+7 & 3+10 & 8+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -3 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 13 & 8 \end{pmatrix}.$$

г) Эти прямоугольные матрицы сложить нельзя, так как A есть матрица типа 3×2, а B — матрица типа 2×3; можно складывать только прямоугольные матрицы одного типа.

2—4. Сложить матрицы A и B:

2. $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & 0\\ 5 & 8\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$.

4. $A=\begin{pmatrix}7 & 4 & 0\\ -2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-7 & -4 & -1\\ 2 & -5 & 0\end{pmatrix}$.

Мы видим, что сложение матриц сводится непосредственно к сложению их элементов, являющихся числами. Поэтому на сложение матриц распространяются важнейшие свойства чисел:

1) переместительный закон сложения: $A+B=B+A$, где A и B — либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа $m\times n$;

2) сочетательный закон сложения $(A+B)+C=A+(B+C)$, где A, B, C — либо квадратные матрицы одного порядка n, либо прямоугольные матрицы одного типа $m\times n$.

5. Доказать справедливость равенств:

а) $A+B=B+A$ для матриц

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 6 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -4\\ 3 & -2 & 1\end{pmatrix};$$

б) $(A+B)+C=A+(B+C)$ для матриц

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 5\\ 4 & 2 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & 1 & 2\\ 3 & 0 & 2\\ 7 & -1 & 5\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}2 & 4 & -1\\ 0 & 5 & -3\\ 0 & 2 & 4\end{pmatrix}.$$

Из сказанного выше вытекает равенство

$$A+O=A,$$

т. е. существует такая нулевая матрица (того же порядка или типа), что ее сумма с матрицей A любого типа равна матрице A.

Для любой матрицы A существует матрица $-A$, такая, что $A+(-A)=O$, т. е. матрица, противоположная A.

Произведением матрицы A на число k называется такая матрица kA, каждый элемент которой равен ka_{ij}, т. е.

$$\text{если } A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix},\ \text{то } kA=\begin{pmatrix}ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n}\\ ka_{21} & ka_{22} & \dots & ka_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn}\end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число сводится к умножению на это число всех элементов матрицы.

6. Умножить матрицу $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & 5 & -3\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ на число $k=3$.

Решение. Умножая каждый элемент матрицы A на 3, получим

$$3A=\begin{pmatrix}6 & -3 & 12\\ 0 & 15 & -9\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix}.$$

7. Найти матрицу, противоположную матрице $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Для нахождения противоположной матрицы умножаем матрицу A на $k=-1$:

$$-A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -5 \\ 0 & -4 & -3 \end{pmatrix}.$$

8. Найти линейную комбинацию $3A-2B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -1 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & -7 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & 5 \\ 2 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала находим произведение A на $k_1=3$ и B на $k_2=-2$:

$$3A=\begin{pmatrix} 6 & -12 & 0 \\ -3 & 15 & 3 \\ 0 & 9 & -21 \end{pmatrix},\quad -2B=\begin{pmatrix} -8 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & -10 \\ -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Теперь найдем сумму полученных матриц:

$$3A-2B=\begin{pmatrix} 6-8 & -12+2 & 0+4 \\ -3+0 & 15+6 & 3-10 \\ 0-4 & 9+0 & -21+8 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -10 & 4 \\ -3 & 21 & -7 \\ -4 & 9 & -13 \end{pmatrix}.$$

9—11. Вычислить линейные комбинации матриц:

9. $2A-B$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -5 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

10. $3A+2B$, если $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 3 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

11. $2A+3B-C$, если $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$.

5. Умножение матриц

Рассмотрим умножение квадратных матриц второго порядка. Пусть

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

Произведением этих матриц называется матрица

$$C=AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти элемент c_{11} первой строки и первого столбца матрицы C, нужно каждый элемент первой строки матрицы A (т. е. a_{11} и a_{12}) умножить на соответствующий элемент первого столбца матрицы B (т. е. b_{11} и b_{21}) и полученные произведения сложить: $c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}$;

чтобы найти элемент c_{12} первой строки и второго столбца матрицы C, нужно умножить все элементы первой строки (a_{11} и a_{12}) на соответствующие элементы второго столбца (b_{12} и b_{22}) и полученные произведения сложить: $c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}$; аналогично находятся элементы c_{21} и c_{22}.

Вообще, чтобы получить элемент, стоящий на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы-произведения, нужно все элементы i-й строки (a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{in}) матрицы A умножить на соответствующие элементы j-го столбца (b_{1j}, b_{2j}, ..., b_{nj}) матрицы B и полученные произведения сложить.

12. Найти произведение матриц A и B, если

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Найдем каждый элемент матрицы-произведения:

$$c_{11}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}=3\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 1=6;$$
$$c_{12}=a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}=3\cdot 1+1\cdot(-1)+1\cdot 0=2;$$
$$c_{13}=a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33}=3\cdot(-1)+1\cdot 1+1\cdot 1=-1;$$
$$c_{21}=a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}=2\cdot 1+1\cdot 2+2\cdot 1=6;$$
$$c_{22}=a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}=2\cdot 1+1\cdot(-1)+2\cdot 0=1;$$
$$c_{23}=a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33}=2\cdot(-1)+1\cdot 1+2\cdot 1=1;$$
$$c_{31}=a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}=1\cdot 1+2\cdot 2+3\cdot 1=8;$$
$$c_{32}=a_{31}b_{12}+a_{32}b_{22}+a_{33}b_{32}=1\cdot 1+2\cdot(-1)+3\cdot 0=-1;$$
$$c_{33}=a_{31}b_{13}+a_{32}b_{23}+a_{33}b_{33}=1\cdot(-1)+2\cdot 1+3\cdot 1=4.$$

Следовательно,

$$C=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 6 & 1 & 1 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

13—15. Найти произведения матриц:

13. $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

14. $\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

15. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Правило нахождения матрицы-произведения распространяется на умножение прямоугольных матриц.

16. Найти произведение AB, если

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$AB=\begin{pmatrix} 0\cdot 3+(-1)\cdot 2+2\cdot 1 & 0\cdot 1+(-1)\cdot 1+2\cdot 0 \\ 2\cdot 3+1\cdot 2+1\cdot 1 & 2\cdot 1+1\cdot 1+1\cdot 0 \\ 3\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 1+0\cdot 1+1\cdot 0 \\ 3\cdot 3+7\cdot 2+1\cdot 1 & 3\cdot 1+7\cdot 1+1\cdot 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 9 & 3 \\ 10 & 3 \\ 24 & 10 \end{pmatrix}.$$

Если в этом примере мы попытаемся найти произведение BA, то убедимся, что это невозможно.

Для прямоугольных матриц справедливы следующие правила:

1) умножение матрицы A на матрицу B имеет смысл только в том случае, когда число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B;

2) в результате умножения двух прямоугольных матриц получается матрица, содержащая столько строк, сколько строк в первой матрице, и столько столбцов, сколько столбцов во второй матрице.

17—19. Найти произведение AB:

17. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

18. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

19. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$.

20. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

21. Вычислить $C=A^2+2B$, где

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}.$$

22. Найти $AB-BA$, где

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

23. Найти $3A\cdot 2B$, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

24. Найти AE, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix},\quad E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

25. Найти EA, если

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}.$$

6. Свойства умножения матриц

Пусть $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Найдем произведения AB и BA:

$$AB=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot3+(-1)\cdot1 & 2\cdot1+(-1)\cdot(-1)\\ 1\cdot3+3\cdot1 & 1\cdot1+3\cdot(-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 3\\ 6 & -2\end{pmatrix};$$

$$BA=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot2+1\cdot1 & 3\cdot(-1)+1\cdot3\\ 1\cdot2+(-1)\cdot1 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ 1 & -4\end{pmatrix}.$$

Мы видим, что $AB\neq BA$. Этот пример показывает, что произведение двух матриц, вообще говоря, не подчиняется переместительному закону.

Можно проверить, что для умножения матриц выполняется сочетательный закон:

$$A(BC)=(AB)C,$$

а также распределительный закон:

$$(A+B)C=AC+BC.$$

Отметим следующий любопытный факт. Известно, что произведение двух отличных от нуля чисел не равно нулю. Для матриц это не всегда справедливо, т. е. возможен случай, когда произведение двух ненулевых матриц может оказаться равным нулевой матрице. Например, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

то

$$AB=\begin{pmatrix}1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot1\\ 1\cdot1+1\cdot(-1) & 1\cdot(-1)+1\cdot1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

§ 2. Определитель матрицы. Свойства определителей и их вычисление

Определитель матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядков
Основные свойства определителей
Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя
Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца

1. Определитель матрицы. Вычисление определителей второго и третьего порядков

Пусть дана квадратная матрица второго порядка:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}.$$

Определителем (или *детерминантом*) *второго порядка,* соответствующим данной матрице, называется число $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Определитель второго порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Отметим, что определитель второго порядка равен разности попарных произведений элементов главной и побочной диагоналей.

26. Вычислить определители второго порядка:

а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix}$.

Решение. а) $\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - 5(-3) = -8 + 15 = 7$;

б) $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = a^2 \cdot b^2 - ab \cdot ab = a^2b^2 - a^2b^2 = 0.$

27—32. Вычислить определители:

27. $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}$. **28.** $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$. **29.** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$.

30. $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$. **31.** $\begin{vmatrix} a+b & b \\ 2a & a-b \end{vmatrix}$. **32.** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \sin\beta & \cos\beta \end{vmatrix}$.

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем (или *детерминантом*) *третьего порядка*, соответствующим данной матрице, называется число

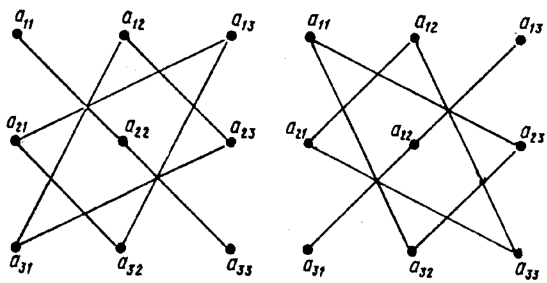
$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Определитель третьего порядка записывается так:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

При вычислении определителей третьего порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (*правилом Сарруса*). Это правило проиллюстрируем на схеме:



Три положительных члена определителя представляют собой произведения элементов главной диагонали ($a_{11}a_{22}a_{33}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали ($a_{12}a_{23}a_{31}$ и $a_{21}a_{32}a_{13}$). Три отрицательных его члена есть произведения элементов побочной диагонали ($a_{13}a_{22}a_{31}$) и элементов, находящихся в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали ($a_{12}a_{21}a_{33}$ и $a_{11}a_{23}a_{32}$).

33. Вычислить определители третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}$.

Решение.

а) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot5\cdot3+2\cdot3\cdot3+2\cdot4\cdot1-1\cdot5\cdot3-2\cdot2\cdot3-$

$-3\cdot3\cdot4=45+18+8-15-12-36=71-63=8;$

б) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix} = acb+bac+cba-c\cdot c\cdot c-b\cdot b\cdot b-a\cdot a\cdot a=$

$=3abc-a^3-b^3-c^3.$

34—39. Вычислить определители:

34. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$. **35.** $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$.

36. $\begin{vmatrix} a+x & x & x \\ x & b+x & x \\ x & x & c+x \end{vmatrix}$. **37.** $\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

38. $\begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & -1 \end{vmatrix}$. **39.** $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$.

2. Основные свойства определителей

1. *Определитель не изменится, если его строки поменять местами с соответствующими столбцами* (т. е. транспонировать):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 3\cdot4-(-2)\cdot5=2.$$

Это свойство называют свойством равноправности строк и столбцов.

2. *При перестановке двух строк (или столбцов) определитель изменит свой знак на противоположный:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4)\cdot 2 + (-2)\cdot 1\cdot 3 + 2\cdot(-5)\cdot 3 - 3\cdot(-4)\cdot 3 -$$
$$-(-2)\cdot 2\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot(-5) = -8-6-30+36+8+5 = -44+49=5.$$

Поменяв местами первый и второй столбцы, получим

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (-2)\cdot 2\cdot 2 + 1\cdot 1\cdot(-5) + 3\cdot(-4)\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot(-5) -$$
$$-(-2)\cdot 3\cdot 1 - 1(-4)\cdot 2 = -8-5-36+30+6+8 = -49+44 = -5.$$

3. *Общий множитель всех элементов строки (или столбца) можно вынести за знак определителя:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & ka_{12} \\ a_{21} & ka_{22} \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = 3\cdot(-6) - (-2)\cdot 7 = -4.$$

Если множитель (—2) вынести за знак определителя, то получим

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & -6 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -2(3\cdot 3 - 7\cdot 1) = -2\cdot 2 = -4.$$

4. *Определитель с двумя одинаковыми строками или столбцами равен нулю.*

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 4 + 1\cdot 3\cdot 2 + 1\cdot(-1)\cdot 3 - 3\cdot 1\cdot 2 - 1\cdot 1\cdot 4 -$$
$$-3\cdot(-1)\cdot 1 = 4+6-3-6-4+3=0.$$

Из свойств 3 и 4 вытекает следующее свойство:

5. *Если все элементы двух строк (столбцов) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 4 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 3\cdot(-2) + 7\cdot(-1)\cdot 4 + 2\cdot 6\cdot 1 - 4\cdot 3\cdot 1 - 6\cdot(-1)\cdot 3 -$$
$$-2\cdot 7(-2) = -18-28+12-12+18+28=0.$$

6. *Если к какой-либо строке (или столбцу) определителя прибавить соответствующие элементы другой строки (или столб-*

ца), умноженные на одно и то же число, то определитель не изменит своей величины:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+ka_{12} & a_{12} \\ a_{21}+ka_{22} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

7. ***Треугольный определитель, у которого все элементы, лежащие выше (или ниже) главной диагонали, — нули, равен произведению элементов главной диагонали:***

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}.$$

3. Миноры и алгебраические дополнения элементов определителя

Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя $D=|a_{ij}|$, где i и j меняются от 1 до n, называется такой новый определитель, который получается из данного определителя вычеркиванием строки и столбца, содержащих данный элемент.

Например, минор M_{12}, соответствующий элементу a_{12} определителя

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

получается, если вычеркнуть из определителя D первую строку и второй столбец, т. е.

$$M_{12}=\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

40. Записать все миноры определителя

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 7 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix};\quad M_{12}=\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix};\quad M_{13}=\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$M_{21}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 2 \end{vmatrix};\quad M_{22}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{vmatrix};\quad M_{23}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix};$$

$$M_{31}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 7 & -1 \end{vmatrix};\quad M_{32}=\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix};\quad M_{33}=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 7 \end{vmatrix}.$$

41. Записать все миноры определителя

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 4 & -3 & 2 \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя D называется минор M_{ij} этого элемента, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} принято обозначать A_{ij}.

Таким образом, $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

42. Найти алгебраические дополнения элементов a_{13}, a_{21}, a_{31} определителя

$$D=\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение.

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=4-0=4;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}=-(10-6)=-4;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix}=-6-0=-6.$$

43. Найти алгебраические дополнения элементов a_{12}, a_{22}, a_{32} определителя

$$D=\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 2 \end{vmatrix}.$$

4. Теорема о разложении определителя по элементам строки или столбца

Сумма произведений элементов любой строки (или столбца) определителя D на их алгебраические дополнения равна этому определителю, т. е.

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$$

или

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}.$$

Эти соотношения называются *разложением определителя по элементам i-й строки или j-го столбца.*

44. Определитель

$$D=\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix}$$

разложить: а) по элементам 1-й строки; б) по элементам 2-го столбца.

Решение.

а) $D=3\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}+2\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}=3(4+20)-$
$-1(-2-0)+2(4-0)=72+2+8=82;$

б) $D=-1\cdot\begin{vmatrix}-1 & 5\\ 0 & 2\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}3 & 2\\ 0 & 2\end{vmatrix}-(-4)\begin{vmatrix}3 & 2\\ -1 & 5\end{vmatrix}=$
$=(-1)(-2)+2\cdot 6-(-4)17=2+12+68=82.$

Если определитель имеет четвертый или более высокий порядок, то его также можно разложить по элементам строки или столбца, а затем понижать порядок алгебраических дополнений.

45. Вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 4\\ 0 & 4 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по элементам 1-й строки (так как она содержит два нулевых элемента):

$$D=\begin{vmatrix}3 & 0 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -1 & 4\\ 0 & 4 & -2 & 3\\ 5 & 2 & 0 & 1\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}3 & -1 & 4\\ 4 & -2 & 3\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2 & -1 & 4\\ 0 & -2 & 3\\ 5 & 0 & 1\end{vmatrix}+$$
$$+2\begin{vmatrix}2 & 3 & 4\\ 0 & 4 & 3\\ 5 & 2 & 1\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 4 & -2\\ 5 & 2 & 0\end{vmatrix}.$$

Поскольку второй и четвертый члены разложения равны нулю, имеем

$$D=3\left[3\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 0 & 1\end{vmatrix}-(-1)\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}4 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}\right]+2\left[2\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}-\right.$$
$$\left.-3\begin{vmatrix}0 & 3\\ 5 & 1\end{vmatrix}+4\begin{vmatrix}0 & 4\\ 5 & 2\end{vmatrix}\right]=3[3(-2)-(-1)(4-6)+4\cdot 4]+$$
$$+2[2(4-6)-3(-15)+4(-20)]=3(-6-2+16)+$$
$$+2(-4+45-80)=24-78=-54.$$

46—48. Вычислить определители третьего порядка:

46. $\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -1\end{vmatrix}$. **47.** $\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ 1 & 2 & -2\\ 2 & 3 & -5\end{vmatrix}$. **48.** $\begin{vmatrix}\sin\alpha & \cos\alpha & 1\\ \sin\beta & \cos\beta & 1\\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1\end{vmatrix}$.

49—51. Вычислить определители четвертого порядка:

49. $\begin{vmatrix}2 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 3 & -1 & 2 & 3\\ 3 & 1 & 6 & 1\end{vmatrix}$. **50.** $\begin{vmatrix}2 & 3 & -3 & 4\\ 2 & 1 & -1 & 2\\ 6 & 2 & 1 & 0\\ 2 & 3 & 0 & 5\end{vmatrix}$. **51.** $\begin{vmatrix}3 & -1 & 4 & 2\\ 5 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & -3\\ 6 & -2 & 9 & 8\end{vmatrix}$.

Перечислим различные способы вычисления определителей.

1. Определитель можно вычислить, используя непосредственно его определение. Этим способом удобно находить определители второго и третьего порядков, а для определителя более высокого порядка применим следующий способ.

2. Определитель можно вычислить с помощью его разложения по элементам строки или столбца.

3. Определитель можно вычислить способом приведения к треугольному виду. Этот способ основан на том, что в силу свойства 7 треугольный определитель равен произведению элементов главной диагонали.

Чтобы получить треугольный определитель, нужно, используя свойство 6, к какой-либо строке (или столбцу) заданного определителя прибавлять соответствующие элементы другой строки (или столбца), умноженные на одно и то же число, до тех пор пока не придем к определителю треугольного вида.

Пусть, например, требуется вычислить определитель

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

Вычитая первую строку из всех остальных, сразу получим определитель треугольного вида:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}=1\cdot(-2)(-2)(-2)=-8.$$

§ 3. Обратная матрица. Обращение матриц второго и третьего порядков

Определение обратной матрицы

Вычисление обратных матриц второго и третьего порядков

1. Определение обратной матрицы

Квадратная матрица A называется *вырожденной*, если ее определитель равен нулю, и *невырожденной*, если ее определитель не равен нулю.

Если A — квадратная матрица, то *обратной* по отношению к A называется матрица, которая, будучи умноженной на A (как справа, так и слева), дает единичную матрицу.

Обозначив обратную матрицу через A^{-1}, запишем

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E.$$

Если обратная матрица A^{-1} существует, то матрица A называется *обратимой*. Операция вычисления обратной матрицы при условии, что она существует, называется *обращением* матрицы. Нахождение обратной матрицы имеет большое значение при решении систем линейных уравнений и в вычислительных методах линейного программирования.

▲ **Теорема.** *Для того чтобы квадратная матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной, т. е. чтобы ее определитель был отличен от нуля.*

При условии $D=|A|\neq 0$ обратная матрица находится по формуле

$$A^{-1}=\begin{vmatrix} A_{11}/D & A_{21}/D & \dots & A_{n1}/D \\ A_{12}/D & A_{22}/D & \dots & A_{n2}/D \\ A_{1n}/D & A_{2n}/D & \dots & A_{nn}/D \end{vmatrix}$$

2. Вычисление обратных матриц второго и третьего порядков

Для нахождения обратной матрицы используют следующую схему:

1⁰. Находят определитель матрицы A.

2⁰. Находят алгебраические дополнения всех элементов a_{ij} матрицы A и записывают новую матрицу.

3⁰. Меняют местами столбцы полученной матрицы (транспонируют матрицу).

4⁰. Умножают полученную матрицу на $1/D$.

52. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1⁰. Находим определитель матрицы A:

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}=2\cdot 3-(-1)4=6+4=10.$$

Так как $D\neq 0$, то данная матрица является невырожденной и, следовательно, существует обратная матрица.

2⁰. Найдем алгебраические дополнения каждого элемента: $A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 3=3$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 4=-4$, $A_{21}=(-1)^{2+1}\times$ $\times(-1)=1$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 2=2$. Тогда получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

3⁰. Транспонируем эту матрицу:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

4⁰. Умножим полученную матрицу на $1/D$, т. е. на $1/10$:

$$A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3/10 & 1/10 \\ -2/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Проверим полученный ответ. Выполнив умножение AA^{-1}, находим

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2\cdot\frac{3}{10}+(-1)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) & 2\cdot\frac{1}{10}+(-1)\cdot\frac{1}{5} \\ 4\cdot\frac{3}{10}+3\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) & 4\cdot\frac{1}{10}+3\cdot\frac{1}{5} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=E.$$

53. Найти матрицу, обратную матрице

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}.$$

Решение. 1^0. Находим определитель матрицы A:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 7+2\cdot 2\cdot 3+0\cdot 0\cdot 3-3\cdot(-1)\cdot 3-$$
$$-2\cdot 0\cdot 7-1\cdot 2\cdot 0=-7+12+9=14.$$

Поскольку $D\neq 0$, матрица A является невырожденной и, значит, можно найти матрицу A^{-1}.

2^0. Найдем алгебраические дополнения всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-7;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 2\\ 3 & 7\end{vmatrix}=6;$$
$$A_{13}=(-1)^{+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3;$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ 0 & 7\end{vmatrix}=-14;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 3 & 7\end{vmatrix}=-2;$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix}=6;$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2;$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1.$$

Запишем новую матрицу:

$$\begin{pmatrix}-7 & 6 & 3\\ -14 & -2 & 6\\ 7 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

3^0. Транспонируем полученную матрицу:

$$\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}.$$

4^0. Умножив полученную матрицу на $1/D=1/14$, находим

$$A^{-1}=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}-7 & -14 & 7\\ 6 & -2 & -2\\ 3 & 6 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/14 & -14/14 & 7/14\\ 6/14 & -2/14 & -2/14\\ 3/14 & 6/14 & -1/14\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 1/2\\ 3/7 & -1/7 & -1/7\\ 3/14 & 3/7 & -1/14\end{pmatrix}.$$

Проверим полученный ответ. Имеем

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 3 & 0 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & -1 & 1/2\\ 3/7 & -1/7 & -1/7\\ 3/14 & 3/7 & -1/14\end{pmatrix}.$$

Последовательно находим:

$$c_{11}=1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2\cdot\frac{3}{7}+3\cdot\frac{3}{14}=-\frac{1}{2}+\frac{21}{14}=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=1;$$

$$c_{12}=1\cdot(-1)+2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+3\cdot\frac{3}{7}=-1+\frac{7}{7}=-1+1=0;$$

$$c_{13}=1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+3\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{1}{2}-\frac{7}{14}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0;$$

$$c_{21}=0\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+(-1)\cdot\frac{3}{7}+2\cdot\frac{3}{14}=-\frac{3}{7}+\frac{6}{14}=-\frac{3}{7}+\frac{3}{7}=0;$$

$$c_{22}=0\cdot(-1)+(-1)\left(-\frac{1}{7}\right)+2\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{7}+\frac{6}{7}=\frac{7}{7}=1;$$

$$c_{23}=0\cdot\frac{1}{2}+(-1)\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+2\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}=0;$$

$$c_{31}=3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+0\cdot\frac{3}{7}+7\cdot\frac{3}{14}=-\frac{3}{2}+\frac{21}{14}=0;$$

$$c_{32}=3\cdot(-1)+0\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+7\cdot\frac{3}{7}=-3+3=0;$$

$$c_{33}=3\cdot\frac{1}{2}+0\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)+7\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1.$$

Следовательно,

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

54—59. Найти матрицы, обратные заданной матрице A:

54. $\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$. **55.** $\begin{pmatrix}3&4\\5&7\end{pmatrix}$. **56.** $\begin{pmatrix}4&-1\\0&3\end{pmatrix}$.

57. $\begin{pmatrix}2&5&7\\6&3&4\\5&-2&-3\end{pmatrix}$. **58.** $\begin{pmatrix}3&-4&5\\2&-3&1\\3&-5&-1\end{pmatrix}$. **59.** $\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&0&0\\1&0&1&-1\end{pmatrix}$.

§ 4. Решение простейших матричных уравнений

Простейшие матричные уравнения и их решение

Решение системы линейных уравнений в матричной форме

1. Простейшие матричные уравнения и их решение

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2,\\a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3.\end{cases}$$

Рассмотрим матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Свободные члены и неизвестные можно записать в виде матриц-столбцов:

$$B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда, используя правило умножения матриц, эту систему уравнений можно записать так:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad AX=B.$$

Это равенство называется *простейшим матричным уравнением*.

Такое уравнение решается следующим образом. Пусть матрица A — невырожденная ($D\neq 0$); тогда существует обратная матрица A^{-1}. Умножив на нее обе части матричного уравнения, имеем

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B.$$

Используя сочетательный закон умножения, перепишем это равенство в виде

$$(A^{-1}A)X=A^{-1}B.$$

Поскольку $A^{-1}A=E$ и $EX=X$, находим

$$X=A^{-1}B.$$

Таким образом, чтобы решить матричное уравнение, нужно:

1^0. Найти обратную матрицу A^{-1}.

2^0. Найти произведение обратной матрицы A^{-1} на матрицу-столбец свободных членов B, т. е. $A^{-1}B$.

3^0. Пользуясь определением равных матриц, записать ответ.

60. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1^0. Будем искать обратную матрицу A^{-1}.

Найдем определитель матрицы A:

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=4-6=-2\neq 0.$$

Вычислим алгебраические дополнения каждого элемента матрицы A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot 4=4,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot 3=-3;\ A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot 2=$
$=-2;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot 1=1.$

Запишем матрицу $\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и транспонируем ее: $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
Учитывая, что $1/D=-1/2$, запишем обратную матрицу:

$$A^{-1}=-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

2^0. Умножим матрицу A^{-1} на матрицу B:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 7 \\ 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (-2)\cdot 7+1\cdot 17 \\ \frac{3}{2}\cdot 7+\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 17 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

3^0. Так как $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, то по определению равных матриц получим $x_1=3,\ x_2=2.$

61. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}X=\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix}.$$

Решение. 1^0. Найдем обратную матрицу A^{-1}.
Вычислим определитель матрицы A:

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{vmatrix}=3\cdot 1\cdot 4+(-1)\cdot 1\cdot 2+(-2)\cdot(-1)\cdot 0-$$
$$-2\cdot 1\cdot 0-(-1)\cdot 1\cdot 3-(-2)\cdot(-1)\cdot 4=12-2+3-3=5\neq 0.$$

Запишем все алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=5;\ A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=10;$$
$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=0;$$
$$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=4;\ A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=12;$$
$$A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1;$$
$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1;\ A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=-3;$$
$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=1.$$

Запишем новую матрицу

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 0 \\ 4 & 12 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

и транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 10 & 12 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $1/D = 1/5$, запишем обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}.$$

2^0. Имеем

$$X = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{5} & -\frac{1}{5} \\ 2 & \frac{12}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + \frac{4}{5}\cdot 0 + \left(-\frac{1}{5}\right)\cdot 15 \\ 2\cdot 5 + \frac{12}{5}\cdot 0 + \left(-\frac{3}{5}\right)\cdot 15 \\ 0\cdot 5 + \frac{1}{5}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3^0. Итак, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, т. е. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$.

62—65. Решить матричные уравнения:

62. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$. **63.** $\begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -18 \\ 19 \\ 1 \end{pmatrix}$.

64. $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix}$. **65.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2. Решение системы линейных уравнений в матричной форме

Так как систему линейных уравнений можно записать в виде матричного уравнения, то эту систему можно решить как матричное уравнение.

66. Решить матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_2 + 2x_3 = 13. \end{cases}$$

Решение. Составим матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 13 \end{pmatrix},$$

и решим его указанным способом. Находим

$$D=\begin{vmatrix}1&2&0\\3&2&1\\0&1&2\end{vmatrix}=-9\neq 0;$$

$$A_{11}=3;\ A_{12}=-6;\ A_{13}=3;\ A_{21}=-4;\ A_{22}=2;\ A_{23}=-1;$$
$$A_{31}=2;\ A_{32}=-1;\ A_{33}=-4.$$

Составим матрицу

$$\begin{pmatrix}3&-6&3\\-4&2&-1\\2&-1&-4\end{pmatrix}$$

и транспонируем ее:

$$\begin{pmatrix}3&-4&2\\-6&2&-1\\3&-1&-4\end{pmatrix}.$$

Запишем обратную матрицу:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\ -\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}&\frac{4}{9}&-\frac{2}{9}\\ \frac{2}{3}&-\frac{2}{9}&\frac{1}{9}\\ -\frac{1}{3}&\frac{1}{9}&\frac{4}{9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}10\\23\\13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\3\\5\end{pmatrix}$$

Итак, решение системы уравнений есть $x_1=4$, $x_2=3$, $x_3=5$.

67—70. Решить матричным способом системы линейных уравнений:

67. $\begin{cases}3x_1-5x_2=13,\\2x_1+7x_2=81.\end{cases}$ **68.** $\begin{cases}3x_1-4x_2=-6,\\3x_1+4x_2=18.\end{cases}$

69. $\begin{cases}5x_1+8x_2+x_3=2,\\3x_1-2x_2+6x_3=-7,\\2x_1+x_2-x_3=-5.\end{cases}$ **70.** $\begin{cases}2x_1-3x_2+x_3=-7,\\x_1+4x_2+2x_3=-1,\\x_1-4x_2=-5.\end{cases}$

§ 5. Решение линейных уравнений по формулам Крамера

Теорема Крамера

Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений

1. Теорема Крамера

▲**Теорема.** *Система n уравнений с n неизвестными, определитель которой отличен от нуля, всегда имеет решение и притом единственное. Оно находится следующим образом: значение каждого из неизвестных равно дроби, знаменателем которой является определитель системы, а числитель получается из определителя системы заменой столбца коэффициентов при искомом неизвестном на столбец свободных членов.*

Пусть дана система n линейных уравнений с n переменными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n. \end{cases}$$

Из коэффициентов при неизвестных составим матрицу A, а из свободных членов — матрицу-столбец B, т. е.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы A обозначим Δ и назовем *определителем системы.* Таким образом,

$$\Delta=\det A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\Delta\neq 0$. Если в определителе системы заменить поочередно столбцы коэффициентов при $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на столбец свободных членов, то получим n определителей (для n неизвестных)

$$\Delta_{x_1}=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad \Delta_{x_2}=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \ldots$$

$$\ldots,\quad \Delta_{x_n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Тогда формулы Крамера для решения системы n линейных уравнений с n неизвестными запишутся так:

$$x_1=\frac{\Delta_{x_1}}{\Delta},\quad x_2=\frac{\Delta_{x_2}}{\Delta},\ \ldots,\ x_n=\frac{\Delta_{x_n}}{\Delta}$$

или короче

$$x_i=\frac{\Delta_{x_i}}{\Delta},\ \text{где } i=1,2,\ldots,n.$$

Рассмотрим случай, когда определитель системы равен нулю. Здесь возможны два варианта:

1. $\Delta=0$ и каждый определитель $\Delta_{x_i}=0$. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при неизвестных x_i пропорциональны, т. е. каждое уравнение системы получается из первого уравнения умножением обеих его частей на число k. Очевидно, что при этом система имеет бесчисленное множество решений.

2. $\Delta=0$ и хотя бы один из определителей $\Delta_{x_i}\neq 0$. Это имеет место только тогда, когда коэффициенты при всех неизвестных, кроме x_i, пропорциональны. При этом получается система из противоречивых уравнений, которая не имеет решений.

2. Применение формул Крамера к решению систем линейных уравнений

Рассмотрим применение формул Крамера к решению систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

71. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 5x+3y=12, \\ 2x-\ \ y=7. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определители Δ_x и Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-11,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 12 & 3 \\ 7 & -1 \end{vmatrix}=-33;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=11.$$

Найдем значения x и y по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-33}{-11}=3;\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{11}{-11}=-1.$$

Итак, решение системы есть $(3;\ -1)$.

72. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x-2y=5, \\ 6x-4y=11. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы Δ и определитель Δ_x и Δ_y:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}=0;\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 11 & -4 \end{vmatrix}=2;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 11 \end{vmatrix}=1.$$

Так как $\Delta=0$, а $\Delta_x\neq 0$, $\Delta_y\neq 0$, то система не имеет решений (уравнения противоречивы).

73. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x-3y=11, \\ 6x-9y=33. \end{cases}$$

Решение. Находим

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & -9 \end{vmatrix}=0,\ \Delta_x=\begin{vmatrix} 11 & -3 \\ 33 & -9 \end{vmatrix}=0;\ \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 11 \\ 6 & 33 \end{vmatrix}=0.$$

Данная система имеет бесчисленное множество решений (коэффициенты при неизвестных пропорциональны).

74. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y+z=3, \\ 5x-2y-2z=3, \\ x+y-z=-2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы и определители при неизвестных:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot4-2(-3)+1\cdot7=25;$$

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}+$$

$$+1\cdot\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=3\cdot4-2(-7)+1\cdot(-1)=25;$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=3(-7)-3(-3)+1\cdot(-13)=-25;$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}=3\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}-2\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}+3\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=3\cdot1-2\cdot(-13)+3\cdot7=50.$$

Найдем значения x, y, z по формулам Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{25}{25}=1;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-25}{25}=-1;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{50}{25}=2.$$

Итак, получаем ответ: (1; —1; 2).

75—81. Решить по формулам Крамера следующие системы уравнений:

75. $\begin{cases} 2x+3y=7, \\ 4x-5y=2. \end{cases}$ **76.** $\begin{cases} 2x+5y=3, \\ 4x+10y=6. \end{cases}$ **77.** $\begin{cases} 5x+3y=7, \\ 10x+6y=2. \end{cases}$

78. $\begin{cases} 5x+8y+z=2, \\ 3x-2y+6z=-7, \\ 2x+y-z=-5. \end{cases}$ **79.** $\begin{cases} 2x-3y+z=-7, \\ x+4y+2z=-1, \\ x-4y=-5. \end{cases}$

80. $\begin{cases} 2x-7y+z=-4, \\ 3x+y-z=17, \\ x-y+3z=3. \end{cases}$ **81.** $\begin{cases} 2x+5y+4z+t=20, \\ x+3y+2z+t=11, \\ 2x+10y+9z+9t=40, \\ 3x+8y+9z+2t=37. \end{cases}$

§ 6. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

При решении систем линейных уравнений используют также *метод Гаусса (метод последовательного исключения неизвестных)*. Он состоит в следующем: систему уравнений приводят к эквивалентной ей системе с треугольной матрицей (системы называются эквивалентными, если множества их решений совпадают). Эти действия называют *прямым ходом*. Из полученной треугольной системы переменные находят с помощью последовательных подстановок (*обратный ход*).

При выполнении прямого хода используют следующие преобразования:

1) умножение или деление коэффициентов и свободных членов на одно и то же число;

2) сложение и вычитание уравнений;

3) перестановку уравнений системы;

4) исключение из системы уравнений, в которых все коэффициенты при неизвестных и свободные члены равны нулю.

82. Используя метод Гаусса, решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3x+2y-z=4, \\ 2x-y+3z=9, \\ x-2y+2z=3. \end{cases}$$

Решение. Переставим третье уравнение на место первого:

$$\begin{cases} x-2y+2z=3, \\ 3x+2y-z=4, \\ 2x-y+3z=9. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Чтобы в 1-м столбце получить $a_{21}=a_{31}=0$, умножим 1-ю строку сначала на 3, а затем на 2 и вычтем результаты из 2-й и 3-й строк:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 & -5 \\ 0 & 3 & -1 & 3 \end{array}\right).$$

Разделим 2-ю строку на 8, полученные результаты умножим на 3 и вычтем из 3-й строки:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{8} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 0 & \frac{13}{8} & \frac{39}{8} \end{array}\right).$$

Запишем новую эквивалентную систему, которой соответствует расширенная матрица:

$$\begin{cases} x-2y+2z=3, \\ \quad y-\frac{7}{8}z=-\frac{5}{8}, \\ \quad \frac{13}{8}z=\frac{39}{8}. \end{cases}$$

Выполняя обратный ход, с помощью последовательных подстановок находим неизвестные:

$$\frac{13}{8}z=\frac{39}{8};\ z=3;$$

$$y-\frac{7}{8}\cdot 3=-\frac{5}{8};\ y=-\frac{5}{8}+\frac{21}{8}=2;$$

$$x-2\cdot 2+2\cdot 3=3;\ x=3+4-6=1.$$

Итак, получаем ответ: (1; 2; 3).

83. Решить методом Гаусса систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3, \\ 3x_1-x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+x_2-2x_3-x_4=4, \\ x_1+3x_2-2x_3-2x_4=7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

Последовательно умножим 1-ю строку на 3 и 2 и вычтем результаты из 2-й и 3-й строк, а из 4-й строки вычтем 1-ю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right).$$

Вычтем 2-ю строку последовательно из 3-й и 4-й:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Отбросив нулевые строки, получим матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{array}\right).$$

Разделим вторую строку на 5:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -2/5 & -3/5 & 2 \end{array}\right).$$

Эта расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2. \end{cases}$$

Но мы знаем, что система двух уравнений с четырьмя неизвестными имеет бесчисленное множество решений.

84—89. Решить методом Гаусса следующие системы уравнений:

84. $\begin{cases} 5x-5y-4z=-3, \\ x-y-5z=11, \\ 4x-3y-6z=-9. \end{cases}$ **85.** $\begin{cases} x-4y-2z=0, \\ 3x-5y-6z=-21, \\ 3x+y+z=-4. \end{cases}$

86. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=11, \\ 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=12, \\ 3x_1+4x_2+x_3+2x_4=13, \\ 4x_1+x_2+2x_3+3x_4=14. \end{cases}$ **87.** $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1, \\ 2x_1-x_2-3x_4=2, \\ 3x_1-x_3+x_4=-3, \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6. \end{cases}$

88. $\begin{cases} 7x_1-5x_2-2x_3-4x_4=8, \\ -3x_1+2x_2+x_3+2x_4=-3, \\ 2x_1-x_2-x_3-2x_4=1, \\ -x+x_3-24x_4=1. \end{cases}$

89. $\begin{cases} 3x_1+2x_2-3x_3+5x_4=10, \\ 2x_1-x_2+5x_3-x_4=5, \\ x_1+x_2-3x_3+2x_4=2, \\ 2x_1+2x_2-x_3-x_4=-1. \end{cases}$

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой? матрицей-столбцом? вектором?
3. Какие матрицы называются прямоугольными? квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит «транспонировать» матрицу?
10. Транспонируйте матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

11. Что называется суммой матриц?
12. Сложите матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

13. Что называется произведением матрицы на число?
14. Как найти произведение двух матриц?
15. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
16. Найдите произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

17. Какими свойствами обладает произведение матриц?
18. Что называется определителем матрицы?
19. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
20. Что называется минором?
21. Что называется алгебраическом дополнением элемента определителя?
22. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
23. Какие способы вычисления определителя вам известны?
24. Перечислите свойства определителей.
25. Какая матрица называется невырожденной?
26. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
27. Каков порядок вычисления обратной матрицы?
28. Вычислите обратную матрицу для $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$.
29. Как записать простейшее матричное уравнение?
30. Как решить матричное уравнение?
31. Решите матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y - 5z = 0, \\ 5x - 2y - 3z = 0, \\ x + y + z = 1. \end{cases}$$

32. Сформулируйте теорему Крамера.
33. Запишите формулы Крамера.
34. Решите по формулам Крамера систему уравнений из задачи 31.
35. Опишите метод Гаусса.
36. Решите методом Гаусса систему уравнений из задачи 31.

Ответы

10. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 7 & -3 \end{pmatrix}$. 12. $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. 16. а) $\begin{pmatrix} 7 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -8 & 9 \\ 0 & 26 \end{pmatrix}$.
28. $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & -1/8 \\ -7/8 & -3/8 \end{pmatrix}$. **31, 34, 36.** (1/4; 1; −1/4).

Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите $A^2 + 3A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Решите матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - 4y + 9z = 28, \\ 7x + 3y - 6z = -1, \\ 7x + 9y - 9z = 5. \end{cases}$$

3. Решите по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 13, \\ 3x_1 - 8x_2 + 5x_3 + x_4 = -23, \\ 4x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 5x_4 = -5, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 15. \end{cases}$$

4. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 6, \\ 3x_1 - x_2 - 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 8x_4 = -7. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Вычислите $A^2 - 2B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Решите матричным способом систему уравнений

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 15, \\ x + y + 5z = 16, \\ 3x - 2y + z = 1. \end{cases}$$

3. Решите по формулам Крамера систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 17, \\ 5x_1 - 17x_2 + x_3 - 2x_4 = -24. \end{cases}$$

4. Решите методом Гаусса систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -22, \\ x_1 - 8x_2 + 10x_3 + 3x_4 = -35, \\ 4x_1 - 7x_2 + 14x_3 + 5x_4 = -48, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 12. \end{cases}$$

Ответы

Вариант 1. 1. $\begin{pmatrix} 10 & 11 & 42 \\ 10 & 4 & 44 \\ -2 & -6 & 4 \end{pmatrix}$. 2. (2; 3; 4). 3. (6; 5; −1; 4).

4. (0; 2; 1/3; 1,5). Вариант 2. 1. $\begin{pmatrix} 21 & -11 & -17 \\ 10 & -6 & -11 \\ -14 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. 2. (0; 1; 3).

3. (4; 2; 0,5). 4. (1; 0; −3; −2).