Глава VI

Дифференциальные уравнения

§ 1. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

1. Расширение понятия уравнения

В школьном курсе математики мы неоднократно встречались с различными уравнениями: алгебраическими, показательными, тригонометрическими и т. д. Рассмотрим, например, два уравнения $ax+b=0$ $(a \neq 0)$ и $\sin x = 0$. Первое имеет единственный корень $x=-b/a$, второе — бесконечное число корней $x=\pi n$, где $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Эти уравнения объединяет то, что в них неизвестными являются числа.

В математике и ее приложениях иногда приходится рассматривать так называемые функциональные уравнения, решениями которых служат неизвестные функции (или семейства функций). Таково, например, уравнение

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) + f(x_2), \tag{1}$$

решением которого (для монотонных функций $f(x)$ и любых положительных значений x_1 и x_2) является семейство логарифмических функций

$$y = \log_a x. \tag{2}$$

В выражении (2) основание a может быть любым положительным числом, кроме $a=1$, поэтому указанное выражение представляет собой семейство функций. Легко проверить, что это семейство является решением функционального уравнения (1); действительно,

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 \quad (x_1,\ x_2 > 0).$$

К функциональным уравнениям относятся, в частности, дифференциальные уравнения.

С простейшими дифференциальными уравнениями мы встречались при решении задач о нахождении уравнения кривой по заданной функции углового коэффициента (например, $y' = x$) и об определении закона движения точки по заданной функции скорости (например, $s' = t^2$). В том и другом случае по заданному уравнению, содержащему производную искомой функции, нужно найти эту функцию. Это и значит решить дифференциальное уравнение.

Существуют различные виды дифференциальных уравнений. Некоторые из них мы рассмотрим в этой главе.

2. Понятие о дифференциальном уравнении

Рассмотрим некоторую функцию $y = f(x)$. Обозначим через $f'(x)$ ее первую производную, через $f''(x)$ — вторую производную и т. д., а дифференциалы функций и аргумента обозначим соответственно dy и dx.

В дифференциальных уравнениях всегда присутствуют производные или дифференциалы функции и аргумента. Это отличительный признак дифференциального уравнения. Например,

$$6y' - xy = 0, \quad y' = 2x + y, \quad x\,dy - y\,dx = 0$$

— дифференциальные уравнения.

Наличие самой функции и аргумента в дифференциальном уравнении не является обязательным. Например, уравнения

$$dy - 5dx = 0, \quad y' = 0, \quad y\,dx = dy, \quad y' = x$$

также являются дифференциальными.

1. Установить, какие из указанных ниже уравнений являются дифференциальными: а) $y' + 3x = 0$; б) $y^2 + x^2 = 5$; в) $y = e^x$; г) $y'y - x = 0$; д) $y = \ln|x| + C$; е) $2dy + 3x\,dx = 0$.

Решение. Уравнения б), в), д) не являются дифференциальными, так как не содержат производной искомой функции или дифференциалов аргумента и искомой функции; уравнения а), г), е) являются дифференциальными.

2. Даны уравнения: а) $y' = y$; б) $y'' = \sin x$; в) $y = Cx$; г) $y' = y \operatorname{tg} x$; д) $\frac{ds}{dt} = 5t$; е) $y^2 = \ln|x|$. Какие из них являются дифференциальными?

Определение. *Дифференциальным уравнением* называется уравнение, содержащее производные искомой функции или ее дифференциалы.

Решить дифференциальное уравнение — значит найти такую функцию, подстановка которой в это уравнение обращает его в тождество. Эта функция называется *решением* дифференциального уравнения.

3. Даны функции: $y = \ln|x| + C$, $y = Cx$, $y = Ce^x$. Какие из них являются решениями дифференциального уравнения $y'x = y$?

Решение. Функция $y = Cx$ есть решение уравнения $y'x = y$, так как подстановка этой функции в уравнение обращает его в тождество. Остальные функции не являются решениями данного уравнения.

4. Какие из перечисленных ниже функций представляют собой решения дифференциального уравнения $y' = x$: а) $y = x + 2$; б) $y = x^2 - 1$; в) $y = \frac{x^2}{2} - 3$; г) $y = \frac{x^2}{2} + 5$?

5. Даны функции: $s = t^2 + C$; $s = t^3 + C$; $s = \frac{t^3}{3} + 5$; $s = 3t^3 - 1$. Какие из них служат решениями дифференциального уравнения $\frac{ds}{dt} = t^2$?

6. Дано уравнение $xy' = y - 1$. Какая из функций $y = 3x + 1$ или $y = Cx + 1$ является его решением?

Решение. Каждая из указанных функций есть решение данного уравнения. Действительно:

если $y = 3x + 1$, то $y' = 3$, откуда $x \cdot 3 = (3x + 1) - 1$, т. е. $3x = 3x$;
если $y = Cx + 1$, то $y' = C$, откуда $xC = (Cx + 1) - 1$, т. е. $Cx = Cx$.

7. Проверить, является ли функция $y = x^2 + x + C$ решением дифференциального уравнения $dy = (2x + 1)dx$.

Решение. Находим $y' = 2x + 1$, откуда $dy = (2x + 1)dx$. Подставляя найденное для dy выражение в левую часть заданного уравнения, получим $(2x + 1)dx \equiv (2x + 1)dx$, т. е. данная функция есть решение этого уравнения.

8. Является ли функция $s = 3t^3 - 2t$ решением уравнения $ds = (3t^2 - 2)dt$?

9. Показать, что функция $y = \sqrt{x}$ является решением уравнения $2yy' = 1$.

10. Является ли функция $x = y^2 + C$ решением уравнения $x^2dx = ydy$?

Часто решение дифференциального уравнения получается в виде неявной функции. Проверка такого решения может привести к сложным вычислениям. Мы будем проверять решения только в том случае, когда они получаются в явной форме.

11. Проверить, что функция $y = Ce^{-x^2}$ есть решение дифференциального уравнения $\frac{dy}{y} + 2xdx = 0$.

Решение. Имеем $\frac{Ce^{-x^2}(-2x)}{Ce^{-x^2}}dx + 2xdx = 0$, т. е. $-2xdx + 2x \times$ $\times dx \equiv 0$.

12. Найти значение a, при котором функция $y = e^{ax} + \frac{1}{3}e^x$ является решением уравнения $y' + 2y = e^x$.

13. Доказать, что $y = Cx$, где $C = \mathrm{const}$, есть решение уравнения $y'x = y$.

14. Проверить, является ли функция $y = Ce^{2x}$ решением уравнений: а) $y' = -2y$; б) $y' = 2y$; в) $y' = 2(y + 1)$; г) $y' = 2xy$.

Пусть требуется найти уравнение кривой, для которой угловой коэффициент касательной в каждой точке равен x. Тогда приходим к уравнению $y'=x$, содержащему производную искомой функции. Перепишем это уравнение в виде $\frac{dy}{dx}=x$. Умножив обе части равенства на dx, имеем $dy=x\,dx$, откуда после интегрирования обеих частей получим $y=\frac{x^2}{2}+C$.

Функция $y=\frac{x^2}{2}+C$ является решением данного уравнения, так как, найдя производную $\left(\frac{x^2}{2}+C\right)'=x$ и подставляя ее в уравнение, получим тождество $x\equiv x$. Известно, что функция $y=\frac{x^2}{2}+C$ задает семейство парабол, сдвинутых друг относительно друга по оси ординат. Из этого семейства можно выделить одну конкретную параболу, если задать начальные данные, например координаты точки, через которую должна проходить эта парабола. Пусть, скажем, это точка $M(0;\ 3)$; тогда уравнение искомой параболы примет вид $y=\frac{x^2}{2}+3$. Эта функция также представляет собой решение данного дифференциального уравнения.

Решение, содержащее производную постоянную C, называется *общим решением* дифференциального уравнения. В рассмотренном примере $y=\frac{x^2}{2}+C$ — общее решение уравнения $y'=x$.

Решение, в которое подставлено числовое значение C, называется *частным решением* дифференциального уравнения. Значение C вычисляется при подстановке начальных данных в общее решение. Так, функция $y=\frac{x^2}{2}+3$ есть частное решение дифференциального уравнения $y'=x$.

Геометрически частное решение представляется одной интегральной кривой, общее решение — совокупность интегральных кривых.

15. Зная, что функция $y=Cx+1$ является общим решением уравнения $xy'=y-1$, определить его частное решение, если $y(1)=5$.

Решение. Подставив в общее решение $y=Cx+1$ заданные начальные условия $x=1$, $y=5$, получим $5=C\cdot 1+1$, откуда $C=4$.

Теперь подставим значение $C=4$ в общее решение и найдем искомое частное решение $y=4x+1$.

Таким образом, при решении дифференциального уравнения сначала получается общее решение. Затем, если известны начальные данные, то можно получить частное решение. Для этого нужно:

1) подставить начальные данные в общее решение и вычислить C;

2) полученное числовое значение C подставить в общее решение.

Задача отыскания конкретного частного решения данного дифференциального уравнения по начальным данным называется *задачей Коши.*

16. Найти общее и частное решения дифференциального уравнения $y' = 2x$, если $y = 2$ при $x = 1$.

3. Примеры задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

Как уже было отмечено, при вычислении неопределенных интегралов мы фактически имеем дело с дифференциальными уравнениями. Нахождение неопределенного интеграла по заданному дифференциалу некоторой функции сводится, по существу, к решению дифференциального уравнения.

17. Решить уравнение $y' = x + 3$.

Решение. Требуется найти функцию $y(x)$, производная которой равна $x+3$, т. е. найти первообразную функции $x+3$. Согласно правилам интегрирования, получаем общее решение данного уравнения в виде $y = \frac{x^2}{2} + 3x + C$, где C — произвольная постоянная.

18. Найти решение $y(x)$ дифференциального уравнения $y' = \cos x$, удовлетворяющее условию $y(0) = 1$.

Решение. Общее решение этого уравнения находим интегрированием: $y = \sin x + C$. Подставив начальные данные и определив $C = 1$, найдем частное решение (решение задачи Коши): $y = \sin x + 1$.

Рассмотренные выше задачи о нахождении уравнения кривой, для которой угловой коэффициент касательной равен x, о нахождении первообразной данной функции приводят к простым дифференциальным уравнениям. К такого же типа дифференциальным уравнениям приводят задачи, связанные со скоростью изменения функции, так как скорость есть производная данной функции по времени. Например, если нужно найти закон движения $s(t)$ по заданной скорости, то нужно решить дифференциальное уравнение вида $\frac{ds}{dt} = f(t)$, где $\frac{ds}{dt}$ — скорость движения.

Рассмотрим в качестве примеров некоторые конкретные задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.

19. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M(1; 3)$ и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен $2x - 3$.

Схема решения. Согласно условию, $y' = 2x - 3$ или $\frac{dy}{dx} = 2x - 3$. Решив полученное уравнение, найдем общее решение, т. е. семейство интегральных кривых. Затем, подставив в него начальные условия $x = 1$, $y = 3$, получим частное решение, т. е. уравнение искомой кривой. Подробное решение этой задачи будет рассмотрено ниже (см. задачу 60).

20. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/с по истечении t секунд. Определить путь, который пройдет тело за 3 с.

Схема решения. По условию, $\frac{ds}{dt} = 5t^2$ (мгновенная скорость — это производная пути по времени). Решив полученное уравнение и используя начальные условия, найдем ответ на поставленный вопрос. Ниже будет дано подробное решение этой задачи (см. задачу 65).

21. Материальная точка движется так, что скорость ее движения пропорциональна пройденному пути. В начальный момент точка находилась от начала отсчета на расстоянии 1 м, а через 2 с — на расстоянии e м. Найти закон движения материальной точки.

Схема решения. По условию, $v = ks'$, где k — коэффициент пропорциональности. Следовательно, задача сводится к решению уравнения $\frac{ds}{dt} = ks$ при заданных условиях. Сначала найдем его общее решение, затем — частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $s = 1$ при $t = 0$ и, наконец, используя условия $s = e$ при $t = 2$, — значение коэффициента k. Подробное решение этой задачи будет приведено ниже (см. задачу 67).

22. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна их количеству в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 ч. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Схема решения. Пусть x — количество бактерий, имеющихся в момент t, а $x_0 = x(0)$ — их количество в начальный момент. Тогда, согласно условию, получаем дифференциальное уравнение $\frac{dx}{dt} = kx$, где k — коэффициент пропорциональности. Для ответа на поставленный вопрос сначала найдем общее решение этого уравнения, далее — частное решение, удовлетворяющее начальным условиям $x_0 = x(0)$ и, наконец, используя условия $x(5) = 3x_0$, — значение коэффициента k. Подробное решение этой задачи приводится ниже (см. задачу 70).

23. Скорость распада радия пропорциональна его количеству в данный момент времени. Найти закон радиоактивного распада, если известно, что через 1600 лет останется половина первоначального количества радия.

Схема решения. Пусть R — количество радия в момент t, а R_0 — его первоначальное количество. Обозначив коэффициент пропорциональности через k, согласно условию имеем $\frac{dR}{dt} = -kR$ (знак минус берется вследствие того, что скорость распада является отрицательной величиной, так как с течением времени количество вещества уменьшается).

Закон радиоактивного распада определяется из полученного дифференциального уравнения и условий $R = R_0$ при $t = 0$ и $R = \frac{1}{2}R_0$ при $t = 1600$. Подробное решение приведено ниже (см. задачу 72).

24. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела T и температурой воздуха T_0. Определить закон изменения температуры тела в зависимости от времени t, если опыт проводится при температуре $T_0 = 20\,°C$, причем тело за 20 мин охладилось от 100 до 60 °С.

Схема решения. Так как скорость охлаждения тела равна $\frac{dT}{dt}$, то согласно условию имеем $\frac{dT}{dt} = k(T - T_0)$, где k — коэффициент пропорциональности.

Решение полученного дифференциального уравнения при заданных условиях выражает закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t. Подробное решение приведено ниже (см. задачу 74).

Вообще говоря, дифференциальные уравнения могут содержать более сложные зависимости между искомой функцией, ее производными и независимой переменной. С ними мы будем знакомиться по ходу изучения различных типов дифференциальных уравнений.

§ 2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными

1. Порядок дифференциального уравнения

Дифференциальные уравнения принято классифицировать в зависимости от порядка производной, входящей в уравнение.

Наивысший порядок производной, входящий в уравнение, называется *порядком* дифференциального уравнения. Например:

$xy' - y = 4$ — дифференциальное уравнение первого порядка, так как наивысший порядок производной, входящей в него, — первый;

$y'' - xy' + 5y = 1 + x^2$ — дифференциальное уравнение второго порядка, поскольку наивысший порядок производной, входящей в данное уравнение, — второй;

$y''' + 2xy'' = 0$ — дифференциальное уравнение третьего порядка;

$s_t'' = 12t^2 + 6t$, где $s = f(t)$, — дифференциальное уравнение второго порядка.

25. Определить порядок следующих дифференциальных уравнений: а) $y' + 2x = 0$; б) $y'' + 3y' - 4 = 0$; в) $2dy - 3x\,dx = 0$; г) $y'' = \cos x$.

Решение. Уравнения а) и в) — первого порядка, а уравнения б) и г) — второго порядка.

26. Определить порядок дифференциальных уравнений:

а) $y'+p(x)y=q(x)$; б) $y''+p(x)y'+q(x)y=0$; в) $y'''-ay''+by'+cy=0$; г) $y^{V}+y^{IV}-y=0$.

Итак, к дифференциальным уравнениям первого порядка относятся уравнения, в которые входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Общий вид дифференциального уравнения первого порядка таков:

$$F(x,\ y,\ y')=0. \tag{1}$$

Если это уравнение можно разрешить относительно y', то оно примет вид $y'=f(x,\ y)$ или $dy=f(x,\ y)\,dx$.

2. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделенными переменными

Определение 1. Уравнение вида

$$f(x)dx+\varphi(y)dy=0, \tag{2}$$

где $f(x)$ и $\varphi(y)$ — данные функции, называется *уравнением с разделенными переменными.*

Это уравнение можно переписать в виде

$$f(x)dx=-\varphi(y)dy$$

и рассматривать как равенство двух дифференциалов.

Каждая часть уравнения с разделенными переменными представляет собой произведение некоторого выражения, зависящего от одной переменной, на дифференциал этой переменной.

Например,

$$x\,dx+y\,dy=0,\ \ 2y\,dy=3x^2dx,\ \ ds=(3t^2-2)dt,$$

$$2y\,dy=(1-3x^2)dx,\ \ e^x dx=y\,dy,\ \ \frac{dy}{y}=\frac{dx}{x}$$

— уравнения с разделенными переменными. Решение таких уравнений выполняется непосредственным интегрированием.

27. Решить уравнение $x\,dx+y\,dy=0$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, получим

$$\int x\,dx+\int y\,dy=C;\ \ \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C;\ \ x^2+y^2=2C.$$

Так как C произвольно, то можно обозначить $2C$ через C^2, учитывая, что левая часть последнего равенства положительна. Тогда это равенство примет вид $x^2+y^2=C^2$. Это и есть общее решение, или как говорят, общий интеграл данного дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения мы получили семейство (совокупность) концентрических окружностей с центром в начале координат и радиусом, равным C (сравните полученное уравнение с известным уравнением окружности вида $x^2+y^2=R^2$).

28. Решить уравнение $2y\,dy = 3x^2 dx$.

Решение. Здесь $\varphi(y) = 2y$, $f(x) = 3x^2$. Интегрируя обе части уравнения, имеем

$$\int 2y\,dy = \int 3x^2 dx, \quad y^2 = x^3 + C.$$

Получили общее решение дифференциального уравнения. Это решение можно записать в явной форме: $y = \sqrt{x^3 + C}$.

29. Решить уравнение $2y^2 dy = 3x\,dx$.

30. Решить уравнение $2y\,dy = (1 - 3x^2)dx$.

31. Найти частное решение дифференциального уравнения $dy = (x^2 - 1)dx$, если $y = 4$ при $x = 1$.

Решение. Имеем $\int dy = \int (x^2 - 1)dx$; $y = \frac{x^3}{3} - x + C$; $4 = \frac{1}{3} - 1 + C$, откуда $C = \frac{14}{3}$. Итак, получаем ответ: $y = \frac{x^3}{3} - x + \frac{14}{3}$.

32. Решить уравнение $dx = (3t^2 - 2)\,dt$, если $s = 0$ при $t = 1$.

33. Решить уравнение $\frac{dy}{y+1} = \frac{dx}{x-1}$.

Решение. Здесь переменные разделены. Интегрируя, имеем

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int \frac{dx}{x-1}; \quad \ln(y+1) = \ln(x-1) + C.$$

Произвольную постоянную C можно обозначить через $\ln C$; тогда $\ln(y+1) = \ln(x-1) + \ln C$. Представив в правой части равенства сумму логарифмов в виде логарифма произведения, получим $\ln(y+1) = \ln C(x-1)$, откуда $y + 1 = C(x-1)$. Это и есть общий интеграл данного дифференциального уравнения.

С геометрической точки зрения мы получили уравнение пучка прямых с центром в точке $M(1;\ -1)$ и с угловым коэффициентом C (сравните полученное уравнение с уравнением пучка прямых $y - y_1 = k(x - x_1)$).

34—39. Решить уравнения:

34. $\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x-1}$. **35.** $e^x dx = y\,dy$.

36. $\sqrt{y}\,dy = 3\sqrt{x}\,dx$. **37.** $\mathrm{tg}\,t\,dt + \frac{ds}{s} = 0$.

38. $\frac{dy}{1+y^2} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$. **39.** $\frac{dy}{\sqrt{y}} - \frac{dx}{x} = 0$.

3. Дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными

Определение 2. Уравнение вида

$$f(x)F(y)dx + \varphi(x)\Phi(y)dy = 0, \tag{3}$$

где $f(x)$, $F(y)$, $\varphi(x)$, $\Phi(y)$ — заданные функции, называется *уравнением с разделяющимися переменными.*

Например,

$$x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0,\ 1+y-xy'=0,$$
$$2dx-3dy+xdx+y^2dy=0,\ 1+y'+y+xy'=0$$

являются дифференциальными уравнениями первого порядка с разделяющимися переменными.

Уравнение (3) можно привести к виду (2), если разделить все его члены на произведение $\varphi(x)F(y)$.

40. Решить уравнение $x(y^2-1)dx+y(x^2+1)dy=0$.

Решение. Разделив все члены уравнения на произведение $(x^2+1)(y^2-1)$, получим $\frac{xdx}{x^2+1}+\frac{ydy}{y^2-1}=0$. Теперь переменные разделены; интегрируя, находим

$$\int\frac{xdx}{x^2+1}+\int\frac{ydy}{y^2-1}=C_1;\ \frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\ln(y^2-1)=\frac{1}{2}\ln C.$$

Здесь произвольная постоянная C_1 заменена на $\frac{1}{2}\ln C$ (поскольку любое положительное или отрицательное число может быть представлено как натуральный логарифм другого, положительного числа $|C|$).

Сокращая все члены равенства на $1/2$, получим $\ln(x^2+1)(y^2-1)=\ln C$, откуда $(x^2+1)(y^2-1)=C$. Это и есть общий интеграл или общее решение данного дифференциального уравнения.

Замечание. При делении на произведение $\varphi(x)F(y)$ можно потерять те решения уравнения, которые обращают это произведение в нуль (если они входят в состав сокращаемого множителя).

41. Найти все решения дифференциального уравнения $y'=xy^2$.

Решение. Очевидно, что $y=0$ является решением данного уравнения. Пусть теперь $y\neq 0$. Тогда

$$\frac{dy}{y^2}=xdx$$

и, следовательно,

$$-\frac{1}{y}=\frac{1}{2}x^2+C.$$

Таким образом, общее решение данного уравнения имеет вид $y=-\frac{2}{x^2+C}$, где C — произвольная постоянная. Заметим, что решение не получается из общего решения ни при каком значении постоянной C.

42. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(1+x^2)dy-2xydx=0.$$

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Разделив обе части уравнения на произведение $y(1+x^2)$, получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{y}-\frac{2xdx}{1+x^2}=0.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$\ln|y|-\ln(1+x^2)=\ln|C| \text{ или } \ln\left(\frac{|y|}{1+x^2}\right)=\ln|C|,$$

откуда получаем общее решение $y=C(1+x^2)$.

Замечание. При делении на $y(1+x^2)$ предполагалось, что $y(1+x^2)\neq 0$, т. е. $y\neq 0$, $1+x^2\neq 0$. Однако $y=0$ есть решение уравнения, в чем можно убедиться непосредственно. Это решение получается из общего при $C=0$.

На основании решенных примеров очевиден алгоритм решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.

1^0. Выражают производную функции через дифференциалы dx и dy.

2^0. Члены с одинаковыми дифференциалами переносят в одну сторону равенства и выносят дифференциал за скобку.

3^0. Разделяют переменные.

4^0. Интегрируют обе части равенства и находят общее решение.

5^0. Если заданы начальные условия, то находят частное решение.

В зависимости от вида уравнения некоторые пункты алгоритма решения могут быть опущены.

43. Найти общее решение уравнения $1+y'+y+xy'=0$.

Решение. 1^0. Заметим y' на $\frac{dy}{dx}$:

$$1+\frac{dy}{dx}+y+x\frac{dy}{dx}=0.$$

2^0. Умножим все члены равенства на dx:

$$dx+dy+ydx+xdy=0.$$

Сгруппируем все члены, содержащие dy и dx, и запишем полученные выражения в разных частях равенства:

$$(1+x)dy=-(1+y)dx.$$

3^0. Разделим обе части равенства на выражение $(1+x)(1+y)$.

$$\frac{dy}{1+y}=-\frac{dx}{1+x}.$$

4^0. Интегрируя обе части равенства, имеем

$$\int\frac{dy}{1+y}=-\int\frac{dx}{1+x};\ \ln|1+y|=-\ln|1+x|+\ln C;$$

$$\ln|1+y|=\ln\left|\frac{C}{1+x}\right|;\ 1+y=\frac{C}{1+x};\ y=\frac{C}{1+x}-1.$$

44—51. Решить уравнения:

44. $xdy+2ydx=0$. **45.** $x^2dy=y^2dx$.

46. $\frac{dy}{2x}+ydx=0$. **47.** $y'=x$.

48. $y' = y^2 \cos x$. **49.** $y' - y - 1 = 0$.

50. $t dx - dx + x dt = 0$. **51.** $y' + 2x^2 y' + 2xy - 2x = 0$.

52. Найти частное решение уравнения $2y dx = (1 + x) dy$, если $y = 4$ при $x = 1$.

Решение. Разделяем переменные:

$$\frac{2dx}{1+x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, получим

$$\int \frac{2dx}{1+x} = \int \frac{dy}{y}, \quad 2\ln(1+x) = \ln y + C, \text{ или } \ln(1+x)^2 = \ln y + \ln C$$

(здесь C заменено на $\ln C$). Потенцируя, находим $(1+x)^2 = Cy$ — общий интеграл данного дифференциального уравнения.

Найдем теперь частное решение данного уравнения по заданным начальным условиям. Полагая в общем решении $x = 1$, $y = 4$, имеем $2^2 = 4C$, откуда $C = 1$. Следовательно, $y = (1+x)^2$.

53. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' = 2 + y$, если $y = 3$ при $x = 0$.

Решение. Заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, а затем умножив все члены на dx, получим

$$dy = 2dx + y dx, \text{ т. е. } dy = (2+y)dx.$$

Разделим обе части равенства на $2 + y$ и проинтегрируем:

$$\frac{dy}{2+y} = dx; \int \frac{dy}{2+y} = \int dx; \ \ln(2+y) = x + \ln C.$$

Выразим x через логарифм: $x = \ln e^x$. Тогда получим

$$\ln(2+y) = \ln e^x + \ln C.$$

Потенцируя, находим

$$2 + y = Ce^x, \ y = Ce^x - 2.$$

Это общее решение данного уравнения.

Чтобы найти частное решение, подставим в общее решение $x = 0$, $y = 3$ и определим C: $3 = C \cdot e^0 - 2$; $e^0 = 1$; $3 = C - 2$; $C = 5$. Итак, $y = 5e^x - 2$.

54. Найти частное решение уравнения $(1 + y^2)dx = xy dy$, если $y = 1$ при $x = 2$.

55. Найти частное решение уравнения $(1 + x^3)dy = 3x^2 y dx$, если $y = 2$ при $x = 0$.

56. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(1 + x^2) \times dy - 2xy dx = 0$. Найти частное решение, удовлетворяющее условию $y = 4$ при $x = -1$.

57. Найти частное решение уравнения $y' + y \operatorname{tg} x = 0$, если $y = 2$ при $x = 0$.

Решение. 1^0. $\frac{dy}{dx} + y \operatorname{tg} x = 0$.

2^0. $dy = -y \operatorname{tg} x \, dx$.

3^0. $\frac{dy}{y} = -\operatorname{tg} x\, dx$.

4^0. $\int \frac{dy}{y} = -\int \operatorname{tg} x\, dx$; $\ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C|$, $y = C\cos x$.

5^0. При $x = 0$, $y = 2$ имеем $2 = C \cdot 1$, $C = 2$, т. е. $y = 2\cos x$.

58. Найти частное решение уравнения $y' + \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{ctg} y} = 0$, если $y = \frac{\pi}{6}$ при $x = \frac{\pi}{3}$.

59. Найти частное решение уравнения $y\,dx + \operatorname{ctg} x\, dy = 0$, удовлетворяющее начальному условию $y(\pi/3) = -1$.

4. Задачи, сводящиеся к решению дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными

60. Найти уравнение линии, проходящей через точку (1; 3) и имеющей касательную, угловой коэффициент которой равен $2x-3$ (см. задачу 19).

Решение. Используя условие, составим дифференциальное уравнение:

$$y' = 2x-3;\ \frac{dy}{dx} = 2x-3;\ dy = (2x-3)dx.$$

Найдем общее решение этого уравнения:

$$\int dy = \int (2x-3)dx;\ y = x^2 - 3x + C.$$

Подставив начальные данные $x = 1$, $y = 3$ в общее решение, получим $C = 5$. Следовательно, частное решение имеет вид $y = x^2 - 3x + 5$.

Семейством интегральных кривых, соответствующих общему решению дифференциального уравнения, являются параболы $y = x^2 - 3x + C$ с вершинами, расположенными на прямой $x = 2/3$. Найденному частному решению соответствует парабола, проходящая через точку (1; 3) и пересекающая ось Oy в точке (0; 5).

61. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (1; 3), если угловой коэффициент касательной к этой кривой в каждой ее точке равен $-2x$.

62. Найти уравнение кривой, обладающей тем свойством, что угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой в 2 раза меньше абсциссы точки.

63. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (—2; —8/3), если угловой коэффициент касательной в любой точке этой кривой равен x^2.

64. Решить уравнение $yy' = -0{,}5$. Найти уравнение интегральной кривой, проходящей через точку (0; —2).

65. Скорость тела, выходящего из состояния покоя, равна $5t^2$ м/с по истечении t секунд. Определить путь, который пройдет тело за 3 с (см. задачу 20).

Решение. Используя условие, составим дифференциальное уравнение: $\frac{ds}{dt} = 5t^2$, так как скорость $v = \frac{ds}{dt}$.

Найдем общее решение этого уравнения:

$$ds = 5t^2 dt; \int ds = 5\int t^2 dt; \; s = \frac{5}{3}t^3 + C.$$

Найдем частное решение этого уравнения. Начальные условия определяются тем, что тело выходит из состояния покоя, т. е. $s = 0$ при $t = 0$. Подставляя эти значения в общее решение, получим $C = 0$. Следовательно, частное решение имеет вид $s = \frac{5}{3}t^3$.

Определим путь, пройденный телом за 3 с:

$$s = \frac{5}{3}\cdot 3^3 = \frac{5}{3}\cdot 27 = 45 \text{ (м)}.$$

66. Составить уравнение движения тела по оси Ox, если оно начало движение из точки $M(4;\ 0)$ со скоростью $v = 2t + 3t^2$.

67. Материальная точка движется так, что скорость ее движения пропорциональна пройденному пути. В начальный момент точка находилась от начала отсчета на расстоянии 1 м, а через 2 с — на расстоянии e м. Найти закон движения материальной точки (см. задачу 21).

Решение. Обозначим скорость движения материальной точки через v. Как известно, скорость равна производной пути по времени, т. е. $v = \frac{ds}{dt}$. По условию, скорость пропорциональна пройденному пути, т. е. $v = \frac{ds}{dt} = ks$, где k — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, дифференциальное уравнение данной задачи имеет вид $\frac{ds}{dt} = ks$. Разделив в нем переменные, получим $\frac{ds}{s} = k\,dt$. Общее решение этого уравнения есть $\ln s = kt + C$.

Найдем частное решение, т. е. из всех возможных движений по этому закону найдем такое, при котором точка в начальный момент удалена на 1 м от начала отсчета. Вообще говоря, расстояние материальной точки от начала отсчета в начальный момент могло быть взято любым, а не обязательно равным 1 м. Этот выбор аналогичен выбору одной кривой из семейства кривых в геометрических задачах.

Используя для определения C начальные условия $t = 0$, $s = 1$, имеем $\ln 1 = k\cdot 0 + C$, откуда $C = 0$. Тогда закон движения можно записать в виде $\ln s = kt$.

Остается неизвестной еще величина k. Ее можно определить из того условия, что через 2 с точка находилась на расстоянии e (e — основание натуральных логарифмов). Следовательно, $\ln e = k\cdot 2$ или $2k = 1$, откуда $k = 1/2$.

Итак, закон движения материальной точки имеет вид $\ln s = t/2$, т. е. $s = e^{t/2}$.

68. Тело движется прямолинейно со скоростью, пропорциональной времени движения. Найти уравнение движения тела, если от начала отсчета времени оно проходит 20 м за 10 с, а 35 м — за 20 с. Какой путь пройдет тело за 1 мин 40 с?

69. Тело, находящееся в состоянии покоя, начинает двигаться со скоростью, пропорциональной пройденному пути. Найти уравнение движения тела, если от начала отсчета времени оно проходит 10 м за 2 с, а 40 м — за 4 с. Найти путь, пройденный телом за 6 с.

70. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна их количеству в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 ч. Найти зависимость количества бактерий от времени (см. задачу 22).

Решение. Обозначим количество бактерий в момент времени t через $x(t)$, а в начальный момент — через $x_0 = x(0)$; тогда $\frac{dx}{dt}$ — скорость их размножения. По условию, $x(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{dx}{dt} = kx, \text{ или } \frac{dx}{x} = k\,dt.$$

Проинтегрировав обе части равенства, получим общее решение этого уравнения:

$$\ln x = kt + \ln C;\ x(t) = Ce^{kt}.$$

Найдем частное решение, соответствующее начальным условиям $x(0) = x_0$; имеем $x_0 = Ce^{k\cdot 0}$, т. е. $C = x_0$. Значит, $x(t) = x_0e^{kt}$ — частное решение дифференциального уравнения.

Чтобы найти искомую зависимость, определим коэффициент пропорциональности k. Известно, что $x(5) = 3x_0$ или $3x_0 = x_0e^{5k}$, т. е. $e^{5k} = 3$, откуда

$$k = \frac{1}{5}\ln 3 = 0{,}2\ln 3$$

и, следовательно,

$$x(t) = x_0e^{0{,}2t\ln 3} \approx x_0e^{0{,}22t}.$$

71. В начальный момент $t = 0$ имелось 100 бактерий, а в течение 3 ч их число удвоилось. Найти зависимость количества бактерий от времени. Во сколько раз увеличится количество бактерий в течение 9 ч?

72. Скорость распада радия пропорциональна его количеству в данный момент времени. Найти закон радиоактивного распада, если известно, что через 1600 лет останется половина первоначального количество радия (см. задачу 23).

Решение. Пусть R — количество радия в момент t, а R_0 — его первоначальное количество. Тогда скорость распада радия равна $\frac{dR}{dt}$ и является отрицательной величиной, так как R с возрастанием t убывает. Согласно условию, имеем $\frac{dR}{dt} = -kR$, где k — коэффициент пропорциональности, подлежащий определению.

Это уравнение с разделяющимися переменными. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dR}{R} = -k\,dt;\ \ln R = -kt + \ln C;\ \ln R = \ln e^{-kt} + \ln C;\ \ln R = \ln Ce^{kt}.$$

Таким образом, $R = Ce^{-kt}$ — общее решение уравнения.

Найдем теперь C и k. Для определения произвольной постоянной C воспользуемся начальными условиями $R = R_0$. В начальный момент времени $t_0 = 0$, откуда $R_0 = C$. Поэтому закон распада имеет вид $R = R_0 e^{-kt}$.

Для нахождения k используем следующие условия: $R = \frac{1}{2} R_0$ при $t = 1600$; отсюда

$$\frac{1}{2} R_0 = R_0 e^{-1600k}, \text{ т. е. } e^{-1600k} = \frac{1}{2}.$$

Прологарифмируем обе части полученного показательного уравнения:

$$-1600k \ln e = \ln \frac{1}{2}; \; -1600k = -\ln 2; \; 1600k = \ln 2; \; k = \frac{\ln 2}{1600} = 0{,}00043.$$

Итак, окончательно получаем $R = R_0 e^{-0{,}00043t}$

73. Период полураспада некоторого радиоактивного вещества равен 1000 лет. Какое количество этого вещества останется через 500 лет?

74. Согласно закону Ньютона, скорость охлаждения тела в воздухе пропорциональна разности между температурой тела T и температурой воздуха T_0. Определить закон изменения температуры тела в зависимости от времени, если опыт проводится при $T_0 = 20\,°C$, причем тело за 20 мин охладилось от 100 до 60 °C. (см. задачу 24).

Решение. Скорость охлаждения тела (скорость изменения его температуры) равна производной $\frac{dT}{dt}$ и, следовательно, закон Ньютона можно выразить равенством

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 20),$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Решая полученное дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными, имеем

$$\frac{dT}{T-20} = k\,dt; \; \int \frac{dT}{T-20} = k \int dt; \; \ln(T-20) = kt + \ln C,$$

откуда

$$T = 20 + Ce^{kt}. \tag{4}$$

Для определения C и k воспользуемся условиями задачи: $T = 100°$ при $t = 0$; $T = 60°$ при $t = 20$.

Подставляя эти значения в равенство (4), получим

$$\begin{cases} 100 = 20 + C, \\ 60 = 20 + Ce^{20k}. \end{cases}$$

Отсюда $C = 80$, $e^{20k} = \frac{1}{2}$, $e^k = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/20}$. Таким образом,

$$T = 20 + 80\left(\frac{1}{2}\right)^{t/20}.$$

Это и есть закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t при указанных условиях.

75. Температура воздуха равна 15 °С. Известно, что за 30 мин тело охлаждается от 90 до 40 °С. Какова будет температура тела через 1 ч после первоначального измерения?

76. Температура воздуха равна 20 °С. Тело охлаждается за 40 мин от 80 до 30 °С. Какую температуру будет иметь тело через 30 мин после первоначального измерения?

77. Вода в открытом резервуаре сначала имела температуру 70 °С, через 10 мин температура воды стала равной 65 °С, температура окружающей резервуар среды составляет 15 °С. Найти: а) температуру воды в резервуаре через 30 мин от начального момента; б) момент времени, когда температура воды в резервуаре станет равной 20 °С.

§ 3. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

1. Основные понятия

Определение. Уравнение вида $y' + py = q$, где p и q — функции переменной x или постоянные величины, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка.*

Замечание. Уравнение называется линейным, так как искомая функция y и ее производная y' входят в это уравнение в первой степени.

78. Даны уравнения:

а) $y' + \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$; б) $y'' + 2xy = 0$; в) $\frac{dy}{dx} + xy^2 = (x-3)^2$.

Какие из них являются линейными уравнениями первого порядка, а какие нет и почему?

Решение. Уравнение а) есть линейное уравнение первого порядка, так как y и y' входят в первой степени, а $p = \frac{2}{x+1}$, $q = (x+1)^3$ — функции одной переменной x. Уравнения б) и в) не являются линейными, так как содержат соответственно вторую производную и y^2.

79. Являются ли линейными дифференциальными уравнениями первого порядка следующие уравнения:

$$\text{а) } y'+\frac{y}{x}=ay^2\ln x;\ \text{ б) } y'-\frac{2y}{x+1}=(x+1)^3;\ \text{ в) } y'-\frac{3}{x}y=x?$$

Линейное уравнение может быть одновременно и уравнением с разделяющимися переменными, например $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x^2}$. В этом случае оно решается как уравнение с разделяющимися переменными.

К уравнениям с разделяющимися переменными относятся линейные уравнения первого порядка без правой части (т. е. при $q=0$). Например, линейные уравнения

$$y'+y\sin 2x=0,\ \frac{dy}{dx}=8y,\ xy'-2y=0$$

могут быть решены сразу разделением переменных и интегрированием.

2. Решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка методом Бернулли

Чтобы решить дифференциальное уравнение первого порядка с правой частью ($q\neq 0$), нужно свести его к уравнению с разделяющимися переменными.

При решении таких уравнений применяют *метод Бернулли*. Для этого используют подстановку $y=uv$, в результате которой уравнение $y'+py=q$ сводится к двум уравнениям с разделяющимися переменными:

$$u'+pu=0;\ uv'=q,$$

где u и v — новые функции переменной x.

Одну из этих функций подбирают так, чтобы уравнение, содержащее другую функцию, стало уравнением с разделяющимися переменными.

Рассмотрим решение линейных дифференциальных уравнений первого порядка на примерах.

80. Решить уравнение $y'-\frac{3}{x}y=x$.

Решение. Это линейное уравнение, так как оно имеет вид $y'+py=q$, где $p=-3/x$, $q=x$. Положим $y=uv$; тогда $y'=u'v+v'u$. Подставив выражения y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v+v'u-\frac{3}{x}uv=x,$$

или

$$u\left(v'-\frac{3}{x}v\right)+u'v=x. \qquad (1)$$

Считая, что неизвестная функция y является произведением двух (также неизвестных) функций u и v, мы тем самым можем одну из этих функций выбрать произвольно. Поэтому приравняем нулю коэффициент при u в уравнении (1):

$$v'-\frac{3}{x}v=0.$$

Разделяя переменные в полученном уравнении, имеем

$$\frac{dv}{v}=3\frac{dx}{x};\ \int\frac{dv}{v}=3\int\frac{dx}{x};\ \ln v=3\ln x;\ v=x^3.$$

Снова ввиду произвольности в выборе v мы можем не учитывать произвольную постоянную C (точнее — можем приравнять ее нулю).

Найденное значение v подставляем в уравнение (1):

$$u'x^3=x;\ u'=\frac{1}{x^2};\ du=\frac{1}{x^2}dx;\ \int du=\int\frac{dx}{x^2};\ u=-\frac{1}{x}+C$$

(здесь C писать обязательно, иначе получится не общее, а частное решение).

Тогда окончательно получим $y=uv=\left(C-\frac{1}{x}\right)x^3$.

Замечание. Уравнение (1) можно было записать в эквивалентном виде:

$$v\left(u'-\frac{3}{x}u\right)+uv'=x.$$

Произвольно выбирая функцию u (а не v), мы могли полагать $u'-\frac{3}{x}u=0$ и т. д. Этот путь решения отличается от предыдущего одной лишь заменой v на u (и следовательно, u на v), так что окончательное значение y оказывается тем же самым.

Общая формула для решения линейных уравнений слишком громоздка и поэтому удобнее в каждом отдельном случае проводить решение линейных уравнений заново.

81. Решить уравнение $y'+y\operatorname{tg}x=\cos^2 x$.

Решение. Это — линейное уравнение, так как оно имеет вид $y'+py=q$, где $p=\operatorname{tg}x$, $q=\cos^2 x$. Пусть $y=uv$; тогда $y'=u'v+v'u$. Подставив выражения y и y' в исходное уравнение, имеем

$$u'v+v'u-uv\operatorname{tg}x=\cos^2 x$$

или

$$u'v+(v'+v\operatorname{tg}x)u=\cos^2 x. \qquad (2)$$

Из двух функций u и v одну можно выбрать произвольно; поэтому определим функцию v так, чтобы множитель при u в уравнении (2) обратился в нуль, т. е. чтобы

$$v'+v\operatorname{tg}x=0 \text{ или } \frac{dv}{v}+\operatorname{tg}x\,dx=0,$$

откуда

$$\int\frac{dv}{v}+\int\operatorname{tg}x=0;\ \ln|v|-\ln|\cos x|=0;\ v=\cos x$$

(произвольную постоянную C принимаем равной нулю).

Подставляя выражение функции v в уравнение (2), для определения u получаем уравнение

$$u'\cos x = \cos^2 x \text{ или } du = \cos x\,dx,$$

откуда

$$\int du = \int \cos x\,dx + C, \text{ т. е. } u = \sin x + C.$$

Так как $y = uv$, то общее решение заданного уравнения примет вид

$$y = (\sin x + C)\cos x.$$

Из рассмотренных примеров легко установить алгоритм решения линейного дифференциального уравнения первого порядка.

1⁰. Приводят уравнение к виду $y' + py = q$.

2⁰. Используя подстановку $y = uv$, находят $y' = u'v + v'u$ и подставляют эти выражения в уравнение.

3⁰. Группируют члены уравнения, выносят одну из функций v или u за скобки. Находят вторую функцию, приравняв выражение в скобках нулю и решив полученное уравнение.

4⁰. Подставляют найденную функцию в оставшееся выражение и находят вторую функцию.

5⁰. Записывают общее решение, подставив выражения для найденных функций u и v в равенство $y = uv$.

6⁰. Если требуется найти частное решение, то определяют C из начальных условий и подставляют в общее решение.

82. Решить уравнение $\frac{dy}{dx}\cos x + y\sin x = 1$.

Решение. 1⁰. Разделив все члены уравнения на $\cos x$, получим

$$\frac{dy}{dx} + y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}.$$

2⁰. Полагаем $y = uv$; $y' = \frac{dy}{dx} = u'v + v'u$.

Подставляя выражение y и $\frac{dy}{dx}$ в уравнение, имеем

$$u'v + v'u + uv\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x},$$

или

$$u'v + u(v' + v\,\mathrm{tg}\,x) = \frac{1}{\cos x}. \tag{3}$$

3⁰. Полагаем $v' + v\,\mathrm{tg}\,x = 0$, или $\frac{dv}{dx} = -v\,\mathrm{tg}\,x$. Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dv}{v} = -\mathrm{tg}\,x\,dx; \int \frac{dv}{v} = -\int \mathrm{tg}\,x\,dx \text{ или } \ln v = \ln\cos x$$

(произвольную постоянную C не пишем); отсюда $v = \cos x$.

4^0. Теперь уравнение (3) примет вид

$$u'\cos x = \frac{1}{\cos x}, \text{ или } \frac{du}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}, \text{ или } du = \frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Интегрируя, находим $\int du = \int \frac{dx}{\cos^2 x}$, т. е. $u = \operatorname{tg} x + C$.

5^0. Подставляя значения u и v в равенство $y = uv$, получим $y = (\operatorname{tg} x + C)\cos x$, или, окончательно,

$$y = \sin x + C\cos x.$$

83—92. Решить уравнения:

83. $y' + \frac{2y}{x} = x^2$ $(x \neq 0)$.

84. $y' = 2x - 2xy$.

85. $\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$.

86. $y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}$.

87. $\cos x\,dy + y\sin x\,dx = 0$.

88. $\frac{y'}{\sin x} - \frac{y}{\sin x} = 2e^x$.

89. $\frac{y'}{(x+1)^3} - \frac{2y}{(x+1)^4} = 1$.

90. $\frac{y'}{x} - 2y = (1-x^2)e^{x^2}$.

91. $(1+x^2)y' - xy = 2x$.

92. $y'x + 2y = x^3$ $(x \neq 0)$.

3. Задача Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка

93. Найти частное решение уравнения $y' = \frac{2}{x}y = x^4$, удовлетворяющее начальным условиям $y\big|_{x=1} = \frac{4}{3}$.

Решение. Поскольку данное уравнение является линейным, полагаем $y = uv$ и, следовательно, $y' = u'v + v'u$. Подставляя выражения y и y' в исходное уравнение, имеем

$$u'v + v'u - \frac{2}{x}uv = x^4$$

или

$$u'v + \left(v' - \frac{2}{x}v\right)u = x^4. \qquad (4)$$

Выберем v так, чтобы

$$v' - \frac{2}{3}v = 0, \text{ или } \frac{dv}{v} = 2\frac{dx}{x},$$

откуда

$$\int \frac{dv}{v} = 2\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|v| = 2\ln|x|; \quad v = x^2.$$

Подставив выражение v в уравнение (4), для определения u получаем уравнение

$$u'x^2 = x^4 \text{ или } du = x^2 dx,$$

откуда

$$\int du = \int x^2 dx, \text{ т. е. } u = \frac{x^3}{3} + C.$$

Поскольку $y = uv$, общее решение заданного уравнения записывается в виде

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)x^2.$$

Теперь, используя начальные условия $y\big|_{x=1} = \frac{4}{3}$, находим C; имеем $\frac{4}{3} = \left(\frac{1}{3} + C\right) \cdot 1$, откуда $C = 1$. Следовательно, частное решение заданного уравнения имеет вид

$$y = \left(\frac{x^3}{3} + 1\right)x^2 \text{ или } y = \frac{x^5}{3} + x^2.$$

94—101. Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

94. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos^3 x}$; $y = 0$ при $x = 0$.

95. $xy' + y = x^2$ $(x \neq 0)$; $y\big|_{x=1} = 2$.

96. $y' - 2y + 3e^{2x} = 0$; $y = 1$ при $x = 0$.

97. $y' - y\,\mathrm{tg}\,x = \frac{1}{\cos x}$; $y = 0$ при $x = 0$.

98. $xy' - y = x^3$; $y = 1/2$ при $x = 1$.

99. $y' + 2y\,\mathrm{tg}\,x = \cos^4 x$; $y = -1$ при $x = 0$.

100. $x^2 y' + 2yx = \sin x$; $y = 0$ при $x = \pi$.

101. $xy' + y - 2x = 0$; $y = 2$ при $x = -1$.

4. Линейные дифференциальные уравнения вида $y' + ay = b$ и $y' = ay$

Рассмотрим линейное уравнение первого порядка, имеющее вид $y' + ay = b$, где a и b — постоянные $(a \neq 0)$. Это уравнение решается разделением переменных:

$$\frac{dy}{dx} = b - ay; \quad \frac{dy}{b - ay} = dx.$$

Отсюда

$$\int \frac{dy}{b - ay} = \int dx; \quad -\frac{1}{a}\ln|b - ay| = x + C_1; \quad \ln|b - ay| = aC_1 - ax.$$

Освобождаясь от логарифма, получаем окончательный ответ:

$$y = Ce^{-ax} + \frac{b}{a} \left(\text{здесь } C = -\frac{1}{a}e^{aC_1}\right).$$

102. Решить уравнение $y' + 2y + 3 = 0$.

Решение. $\frac{dy}{dx} = -(2y+3)$; $\frac{dy}{2y+3} = -dx$; $\int \frac{dy}{2y+3} = -\int dx$;

$\ln|2y+3| = -x + \ln C$; $\ln\frac{2y+3}{C} = -x$,

$$\frac{2y+3}{C} = e^{-x};\ 2y+3 = Ce^{-x},\ y = Ce^{-x} - \frac{3}{2}.$$

103. Найти частное решение уравнения $y' + 3y = 1$, если $y = 0$ при $x = 0$.

104. Найти частное решение уравнения $y' - 2y + 3 = 0$, если $y = 1$ при $x = 0$.

В том случае, когда $b = 0$, решениями линейного дифференциального уравнения указанного вида являются показательные функции. Поэтому процессы, описываемые уравнениями вида $y' = ay$, называются *процессами показательного роста*. Если $b \neq 0$ и $a < 0$, то всякое решение указанного уравнения с течением времени стремится к числу b/a. Процессы этого вида называют *процессами выравнивания*.

105. Катер движется в спокойной воде со скоростью $v_0 = 20$ км/ч. Определить скорость катера через 2 мин после выключения двигателя, если за 40 с она уменьшилась до $v_1 = 8$ км/ч. Сопротивление воды пропорционально скорости движения катера.

Решение. Пусть скорость движения катера в момент времени t равна v. Тогда на движущийся катер действует сила сопротивления воды $F = -kv$. Согласно закону Ньютона, $F = ma = m\frac{dv}{dt}$ и, следовательно, $m\frac{dv}{dt} = -kv$, или

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{k}{m}v.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением показательного роста; его общее решение имеет вид

$$v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$

Постоянную C найдем из начальных условий $v(0) = 20$ км/ч:

$$20 = Ce^{-\frac{k}{m}\cdot 0};\ C = 20.$$

Итак, скорость движения катера после выключения двигателя определяется формулой

$$v = 20e^{-\frac{k}{m}t}. \tag{5}$$

Найдем значение постоянной $e^{-k/m}$. Для этого воспользуемся тем, что $v = 80$ км/ч при $t = 40$ с $= 1/90$ ч:

$$8 = 20e^{-\frac{k}{m}\cdot\frac{1}{90}};\ e^{-\frac{k}{m}} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}.$$

Полагая в равенстве (5) $t = 2$ мин $= \frac{1}{30}$ ч, $e^{-k/m} = \left(\frac{2}{5}\right)^{90}$, найдем искомую скорость:

$$v = 20\left(\left(\frac{2}{5}\right)^{90}\right)^{1/30} = \frac{32}{25} = 1{,}28 \text{ (км/ч)}.$$

5. Линейное дифференциальное уравнение первого порядка с искомой функцией $x(y)$

Иногда уравнение становится линейным, если y считать независимой переменной, а x — зависимой, т. е. поменять роли x и y. Это можно сделать при условии, что x и dx входят в уравнение линейно.

106. Решить уравнение $y'(y^2 - x) = y$.

Решение. Это уравнение не является линейным относительно неизвестной функции y, так как его нельзя привести к виду $y' + p(x))y = q(x)$. Однако если x считать функцией, а y — аргументом, то это уравнение окажется линейным относительно неизвестной функции x, поскольку его можно привести к виду $x' + p(y)x = q(y)$.

В самом деле, заменив y' на $\frac{dy}{dx}$, получим

$$\frac{dy}{dx}(y^2 - x) = y \text{ или } (y^2 - x)\,dy = y\,dx.$$

Разделив обе части последнего уравнения на произведение $y\,dy$, приведем его к виду

$$y - \frac{1}{y}x = x' \text{ или } x' + \frac{1}{y}x = y. \qquad (6)$$

Здесь $p(y) = \frac{1}{y}$, $q(y) = y$. Это — линейное уравнение относительно x; поэтому полагаем $x = uv$ (где u и v — функции от y), откуда $\frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy}v + \frac{dv}{dy}u$.

Подставляя выражения x и $\frac{dx}{dy}$ в уравнение (6), имеем

$$\frac{du}{dy}v + \frac{dv}{dy}u + \frac{1}{y}uv = y \text{ или } \frac{du}{dy}v + \left(\frac{dv}{dy} + \frac{1}{y}v\right)u = y.$$

Выберем v так, чтобы

$$\frac{dv}{dy} + \frac{1}{y}v = 0 \text{ или } \frac{dv}{v} = -\frac{dy}{y},$$

откуда

$$\int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dy}{y};\ \int\frac{dv}{v} = -\int\frac{dy}{y};\ \ln|v| = -\ln|y|;\ v = \frac{1}{y}.$$

Теперь уравнение (7) примет вид

$$\frac{du}{dy}\cdot\frac{1}{y} = y \text{ или } du = u^2 dy,$$

откуда

$$\int du=\int y^2dy+C,\ \text{т. е. }\ u=\frac{y^3}{3}+C.$$

Так как $x=uv$, то общее решение данного уравнения имеет вид

$$x=\left(\frac{y^3}{3}+C\right)\frac{1}{y}.$$

107. Найти частное решение уравнения $(x+y)y'=1$, удовлетворяющее начальным условиям $y=0$ при $x=-1$.

Решение. Это уравнение не является линейным относительно y, так как содержит произведение искомой функции y и ее производной y'. Однако если рассматривать x как функцию от y, то, учитывая, что $y'=1/x'$, получим линейное уравнение

$$x'=x+y. \qquad (8)$$

Применим подстановку $x=uv$; тогда $x'=u'v+uv'$. Подставляя эти выражения в уравнение (8), получим

$$u'v+uv'=uv+y\ \text{ или }\ u'v+u(v'-v)=y.$$

Выберем функцию $v\neq 0$ так, чтобы коэффициент при u в последнем уравнении обратился в нуль:

$$v'-v=0;\ \frac{dv}{dy}-v=0;\ \frac{dv}{v}=dy.$$

Интегрируя, имеем

$$\ln v=y;\ v=e^y.$$

Далее, находим

$$e^y\frac{du}{dy}=y;\ du=ye^{-y}dy;\ u=\int ye^{-y}dy=-ye^{-y}-e^{-y}+C.$$

Таким образом, общее решение уравнения есть

$$x=uv=(-ye^{-y}-e^{-y}+C)e^y\ \text{ или }\ x=-y-1+Ce^y.$$

Полагая $x=-1$ и $y=0$, получим $-1=-1+C$, т. е. $C=0$. Следовательно, искомое частное решение имеет вид $y=-(x+1)$.

Решить уравнения:

108. $y'(y^2-x)=y$. **109.** $y\,dx=(y^3-x)dy$.

§ 4. Дифференциальные уравнения высших порядков

Понятие о дифференциальном уравнении высшего порядка
Дифференциальное уравнение второго порядка и его общее решение
Задача Коши для простейшего дифференциального уравнения второго порядка
Задачи, сводящиеся к простейшим дифференциальным уравнениям второго порядка
Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

1. Понятие о дифференциальном уравнении высшего порядка

Как было отмечено выше, дифференциальные уравнения принято классифицировать в зависимости от порядка производной, входящей в уравнение.

Дифференциальное уравнение n-го порядка имеет вид

$$F(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n)})=0 \tag{1}$$

(напомним, что символом $y^{(n)}$ обозначается производная n-го порядка).

Если же уравнение (1) можно разрешить относительно старшей производной (т. е. относительно $y^{(n)}$), то оно примет вид

$$y^{(n)}=\varphi(x,\ y,\ y',\ y'',\ \ldots,\ y^{(n-1)}). \tag{2}$$

Общим решением уравнения n-го порядка называется семейство функций $y=f(x,\ C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n)$, которое при любом наборе произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ удовлетворяет исходному уравнению.

Общее решение дифференциального уравнения должно содержать столько произвольных постоянных, каков порядок этого уравнения; так, если уравнение имеет первый порядок, то оно должно содержать одну произвольную постоянную. Ниже будут рассмотрены некоторые дифференциальные уравнения второго порядка, общие решения которых содержат две произвольные постоянные.

Частным решением дифференциального уравнения n-го порядка называется функция $y=f(x)$, получающаяся при подстановке некоторого набора произвольных постоянных $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$ в общее решение этого уравнения.

2. Дифференциальное уравнение второго порядка и его общее решение

Уравнение, содержащее производные или дифференциалы второго порядка, называется *дифференциальным уравнением второго порядка.*

Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно y'', имеет вид

$$y''=f(x,\ y,\ y'). \tag{3}$$

Простейшим дифференциальным уравнением второго порядка является уравнение вида

$$y''=f(x).$$

Такое уравнение решается двукратным интегрированием:

$$\frac{dy'}{dx}=f(x);\quad dy'=f(x)dx,$$

откуда

$$y' = \int f(x)\,dx.$$

Проинтегрировав эту функцию, получим какую-то новую функцию от $f(x)$, которую обозначим через $F(x)$. Таким образом,

$$y' = F(x) + C_1;\ \frac{dy}{dx} = F(x) + C_1;\ dy = (F(x) + C_1)dx.$$

Интегрируем еще раз:

$$y = \int (F(x) + C_1)dx = \int F(x)dx + C_1 \int dx$$

или

$$y = \Phi(x) + C_1 x + C_2.$$

Итак, получили общее решение данного дифференциального уравнения, содержащее две произвольные постоянные C_1 и C_2.

110. Найти общее решение уравнения $y'' = 4x$.

Решение. Имеем

$$\frac{dy'}{dx} = 4x;\ dy' = 4x\,dx;\ y' = 4\int x\,dx = 2x^2 + C_1;$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x^2 + C;\ dy = (2x^2 + C_1)dx;$$

$$y = \int (2x^2 + C_1)dx = 2\int x^2 dx + C_1 \int dx = \frac{2}{3}x^3 + C_1 x + C_2.$$

Полученный результат проверим дифференцированием:

$$y' = \frac{2}{3}\cdot 3x^2 + C_1 = 2x^2 + C_1;\ y'' = 4x.$$

111. Найти общее решение уравнения $y'' = \sin 2x$.

Решение. Умножим обе части уравнения на dx и затем проинтегрируем:

$$dy' = \sin 2x\,dx;\ \int dy' = \int \sin 2x\,dx;\ y' = -\frac{1}{2}\cos 2x + C_1.$$

Обе части последнего уравнения умножим на dx и проинтегрируем:

$$dy = -\frac{1}{2}\cos 2x\,dx + C_1 dx;\ \int dy = -\frac{1}{2}\int \cos 2x\,dx + C_1 \int dx + C_2.$$

Итак, $y = -\frac{1}{4}\sin 2x + C_1 x + C_2$ — общее решение уравнения.

112—119. Найти общие решения уравнений:

112. $y'' = 0$. **113.** $y'' = 5$.

114. $y'' = x$. **115.** $y'' = 3x$.

116. $y'' = x^3$. **117.** $y'' = \cos x$.

118. $s'' = t + 1$. **119.** $y'' = 18x + 2$.

В общее решение уравнения первого порядка входит одна произвольная постоянная C, а в общее решение уравнения второго порядка — две произвольные постоянные C_1 и C_2.

Функция $y=\varphi(x, C_1, C_2)$, удовлетворяющая данному уравнению при любых произвольных постоянных, называется его *общим решением*.

3. Задача Коши для простейшего дифференциального уравнения второго порядка

Задача Коши для дифференциального уравнения второго порядка состоит в том, чтобы найти решение, удовлетворяющее начальным условиям.

Так как в функцию $y=\varphi(x, C_1, C_2)$ входят две произвольные постоянные C_1 и C_2, то для выделения из общего решения уравнения некоторого частного решения необходимо иметь два начальных условия: $y(x_0)=y_0$ и $y'(x_0)=y'_0$. Тогда получим

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0, C_1, C_2), \\ y'_0=\varphi'(x_0, C_1, C_2). \end{cases}$$

Из этой системы можно определить постоянные C_1 и C_2 и тем самым найти частное решение уравнения (3).

120. Найти решение уравнения $y''=2$, удовлетворяющее следующим начальным условиям: $y=1$ и $y'=2$ при $x=0$.

Решение. Интегрируя данное уравнение по x последовательно два раза, сначала получим $y'=2x+C_1$, а затем $y=x^2+C_1x+C_2$. Используя теперь начальные условия, имеем

$$\begin{cases} y'=2x+C_1, \\ y=x^2+C_1x+C_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=2\cdot 0+C_1, \\ 1=0+C_1\cdot 0+C_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2=C_1, \\ 1=C_2, \end{cases}$$

т. е. $C_1=2$, $C_2=1$. Следовательно, искомое решение имеет вид $y=x^2+2x+1$ или $y=(x+1)^2$.

Таким образом, для решения дифференциального уравнения вида $y''=f(x)$ используют следующий алгоритм:

1^0. Интегрируют обе части уравнения и находят $\frac{dy}{dx}$.

2^0. Интегрируя $\frac{dy}{dx}$, находят общее решение, содержащее две произвольные постоянные.

3^0. Если требуется найти частное решение (найти решение задачи Коши), то определяют C_1 и C_2 из начальных условий и подставляют их в общее решение.

121. Решить задачу Коши для уравнения $y''=1+x+x^2+x^3$, если $y=1$ и $y'=1$ при $x=0$.

Решение. 1^0. $\frac{dy}{dx}=\int(1+x+x^2+x^3)dx=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C_1$.

2^0. $y=\int\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{4}+C_1\right)dx=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{20}+C_1x+C_2$.

3^0. Подставив начальные условия $y=1$ и $y'=1$ при $x=0$, получим $C_1=1$, $C_2=1$.

Следовательно, $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}+\frac{x^5}{20}+x+1$.

122—127. Решить задачу Коши для уравнений:

122. $y''=0$, если $y=0$ при $x=0$ и $y'=1$ при $x=1$.

123. $s''=t+1$, если $s=2$ и $s'=-11/6$ при $t=0$.

124. $y''=1-2x$, если искомая кривая проходит через точки $(0;\ 1)$ и $(1;\ 1/6)$.

125. $y''=x^2$, если $y=12\frac{3}{4}$ при $x=3$ и $y'=2\frac{1}{3}$ при $x=1$.

126. $y''=\sin x$, если $y=0$ и $y'=2$ при $x=0$.

127. $y''=1-\frac{1}{x^2}$, если $y=-1$ и $y'=1$ при $x=1$.

4. Задачи, сводящиеся к простейшим дифференциальным уравнениям второго порядка

В задачах, решение которых приводит к интегрированию дифференциальных уравнений, используют известные законы физики, механики и других наук.

При решении задач сначала нужно составить дифференциальное уравнение по условию задачи, а затем найти решение этого уравнения по общему правилу.

Напомним, что под скоростью движения в данный момент времени разумеется производная пути по времени, т. е. $v=\frac{ds}{dt}=s'$, а ускорение есть производная скорости по времени или вторая производная пути по времени, т. е. $a=s''_t$.

128. Найти уравнение движения, если точка движется прямолинейно с постоянным ускорением, равным a см/с^2 (под уравнением движения понимается уравнение, устанавливающее зависимость между временем и пройденным путем).

Решение. Согласно условию, имеем уравнение $s''=a$. Интегрируя, получим

$$\frac{ds'}{dt}=a;\ ds'=a\,dt;\ s'=a\int dt=at+C_1.$$

Интегрируем еще раз:

$$\frac{ds}{dt}=at+C_1;\ ds=(at+C_1)dt;\ s=\int(at+C_1)\,dt=\frac{at^2}{2}+C_1t+C_2.$$

Для определения механического смысла произвольных постоянных C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями.

Рассмотрим формулу $s'=at+C_1$. Поскольку $s'=v$, запишем ее в виде $v=at+C_1$; эта формула устанавливает зависимость между временем и скоростью в данный момент времени. Следовательно, она верна в момент начала движения, т. е. при $t=0$ и $v=v_0$. Подставляя эти данные, получаем $v_0=a\cdot 0+C_1$, откуда $C_1=v_0$, т. е. C_1 представляет собой начальную скорость. Теперь подставим это значение в выражение для пройденного пути: $s=\frac{at^2}{2}+v_0t+C_2$. При $t=0$, т. е. в момент начала движения, величина $s=s_0$, т. е. равна начальному пути s_0, с которого производится отсчет.

Итак,

$$s=\frac{at^2}{2}+v_0t+s_0.$$

Это и есть общее уравнение движения тела с постоянной скоростью.

Если $s=0$ и $v_0=0$, то последняя формула принимает вид

$$s=\frac{at^2}{2}$$

и называется формулой пути при равнопеременном движении.

При $a=9{,}8$ м/с^2 получим $s=\frac{9{,}8t^2}{2}=4{,}9t^2$; это — уравнение движения свободно падающего тела в пустоте.

129. Тело движется прямолинейно с ускорением $a=6t-4$. При $t=0$ начальный путь $s_0=0$, начальная скорость $v_0=4$. Найти скорость и пройденный путь как функции времени.

Решение. Согласно условию, имеем $s''=6t-4$. Интегрируя обе части этого уравнения, получим $\frac{ds}{dt}=3t^2-4t+C_1$, т. е. скорость выражена как функция времени.

Интегрируя обе части последнего уравнения, выразим путь как функцию времени:

$$s=t^3-2t^2+C_1t+C_2.$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из начальных данных: $v_0=4$ и $s_0=0$ при $t=0$. Подставив эти данные в выражения $\frac{ds}{dt}$ и s, находим $C_1=4$, $C_2=0$.

Тогда скорость тела и пройденный им путь окончательно запишутся в виде $v=3t^2-4t$, $s=t^3-2t^2+4t$.

130. Ускорение брошенного вверх тела постоянно и равно $-g$. Найти уравнение движения, если $s=0$, $v=v_0$ при $t=0$.

131. Ускорение прямолинейного движения тела определяется уравнением $\omega=t^2+1$. Найти закон движения тела, если в момент $t=1$ его скорость $v=2$, путь $s=4$.

132. Ускорение ω материальной точки, движущейся прямолинейно, в зависимости от времени t выражется формулой $\omega=2t+3$. Найти закон движения, если $v=0$ и $s=0$ при $t=0$.

133. Тело движется с ускорением $a=t^2+t$; если $t=0$, то $s=0$, а $v=1$. Найти путь, пройденный телом за 2 с, и скорость к концу 2-й секунды.

5. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Прежде чем дать определение нового вида дифференциального уравнения, раскроем подробно его название:

1) дифференциальное уравнение (по определению) обязательно содержит производные или дифференциалы искомой функции;

2) уравнение второго порядка содержит производную, наивысший порядок которой равен 2;

3) это уравнение — линейное относительно искомой функции и ее производных, т. е. содержит их в первой степени;

4) это — уравнение с постоянными коэффициентами; значит, коэффициенты при функции и ее производных являются постоянными величинами.

Учитывая все это, можно сказать, что рассматриваемое уравнение содержит y, y', y'' в первой степени и коэффициенты при них — постоянные величины.

Коэффициент при y'' всегда можно сделать равным единице, полученные при этом коэффициенты при y' и y обозначим через p и q. Тогда получим уравнение вида

$$y''+py'+qy=f(x), \tag{4}$$

где p и q — постоянные величины, а $f(x)$ — непрерывная функция x.

Если правая часть уравнения (4) равна нулю, т. е.

$$y''+py'+qy=0,$$

то оно называется *уравнением без правой части* (или *однородным уравнением*).

Определение 1. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y''+py'+qy=0, \tag{5}$$

где p и q — постоянные величины.

Напомним, что общее решение дифференциального уравнения второго порядка содержит две произвольные постоянные.

Для нахождения общего решения этого уравнения рассмотрим следующие теоремы.

▲ **Теорема 1.** *Если функция $y=y_1$ — решение уравнения* (5), *то функция $y=ay_1$, где a — постоянный множитель, также является решением этого уравнения.*

Доказательство. Так как по условию $y=y_1$ есть решение уравнения $y''+py'-qy=0$, то функция y_1 обращает это уравнение в тождество: $y_1''+py_1'+qy_1=0$.

Пусть $y=ay_1$, где a — постоянный множитель; тогда $y'=ay_1'$ и $y''=ay_1''$. Для того чтобы показать, что функция $y=ay_1$ является решением данного уравнения, подставим в него эту функцию и ее производные; имеем

$$ay_1''+pay_1'+qay_1=0.$$

Вынося a за скобки, получим

$$a(y_1''+py_1'+qy_1)=0.$$

Выражение в скобках равно нулю, так как по условию y_1 — решение уравнения.

Очевидно, что функция ay_1 обращает данное уравнение в тождество, т. е. является его решением, что и требовалось доказать.

▲ **Теорема 2.** *Если функции $y=y_1$ и $y=y_2$ — решения уравнения* (5), *то и функция $y=y_1+y_2$ также является решением этого уравнения.*

При этом y_1 и y_2 называют *частными решениями* уравнения (5).

Доказательство. Так же как и при доказательстве теоремы 1, подставим функцию $y=y_1+y_2$ и ее производные в данное уравнение и покажем, что оно обращается в тождество. Имеем $y=y_1+y_2$, $y'=y_1'+y_2'$, $y''=y_1''+y_2''$, откуда

$$y_1''+y_2''+p(y_1'+y_2')+q(y_1+y_2)=0.$$

Раскрыв скобки и перегруппировав члены уравнения, получим

$$(y_1''+py_1'+qy_1)+(y_2''+py_2'+qy_2)=0.$$

Выражения в скобках равны нулю, так как по условию $y=y_1$ и $y=y_2$ — решения уравнения $y''+py'+qy=0$.

Следовательно, функция $y=y_1+y_2$ обращает рассматриваемое уравнение в тождество, а значит, является его решением, что и требовалось доказать.

Определение 2. Два частных решения уравнения $y''+$ $+py'+qy=0$ называются *линейно независимыми*, если одно из них не может быть представлено как другое, умноженное на некоторый постоянный множитель, т. е. $y_2\neq$ $\neq ay_1$ ни при каких значениях a.

▲ **Теорема 3.** *Если $y=y_1$ и $y=y_2$ — линейно независимые частные решения уравнения* (5), *то его общее решение имеет вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.*

Доказательство. Воспользуемся результатами двух предыдущих теорем.

Так как $y=y_1$ и $y=y_2$ — решения уравнения (5), то согласно теореме 1 функции C_1y_1 и C_2y_2 также являются решениями этого уравнения. Далее, поскольку C_1y_1 и C_2y_2 — решения уравнения (5), в силу теоремы 2 функция $y=C_1y_1+C_2y_2$ также есть решение этого уравнения, что и требовалось доказать.

Замечание. Если $y_2=ky_1$ (т. е. y_2 и y_1 линейно зависимы), то $y=$ $=C_1y_1+C_2y_2=C_1y_1+C_2ky_1=C_3y_1$. Это означает, что решение будет содержать одну произвольную постоянную, тогда как решение дифференциального уравнения второго порядка обязательно должно содержать две произвольные постоянные. Именно поэтому в теореме говорится о линейно независимых частных решениях y_1 и y_2.

Итак, для того чтобы найти общее решение уравнения $y''+py'+qy=0$, имеющее вид $y=C_1y_1+C_2y_2$, нужно найти два линейно независимых частных решения y_1 и y_2.

Эйлер предложил искать частное решение рассматриваемого уравнения в виде $y=e^{kx}$, где k — постоянная величина, которую нужно подобрать. При различных значениях k функции $y=e^{kx}$ будут линейно независимы.

Например, функции $y_1=e^x$ и $y_2=e^{3x}$ являются линейно независимыми.

Чтобы найти значение k, при котором $y=e^{kx}$ окажется решением уравнения $y''+py'+qy=0$, нужно подставить функцию $y=e^{kx}$ и ее производные в это уравнение. Тогда получим $y=e^{kx}$, $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2e^{kx}$, откуда

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0$$

или, вынося e^{kx} за скобки,

$$e^{kx}(k^2+pk+q)=0.$$

Выражение e^{kx} как показательная функция ни при каких значениях x не равна нулю; следовательно, $k^2+pk+q\neq 0$. Из этого уравнения находим два значения k_1 и k_2. Функции $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$ являются частными решениями уравнения $y''+py'+qy=0$.

134. Решить уравнение $y''-3y'+2y=0$.

Р е ш е н и е. Подставим функцию $y=e^{kx}$ и ее производные $y'=ke^{kx}$ и $y''=k^2e^{kx}$ в данное уравнение:

$$k^2e^{kx}-3ke^{kx}+2e^{kx}=0.$$

Выносим e^{kx} за скобки: $e^{kx}(k^2-3k+2)=0$. Так как $e^{kx}\neq 0$, то $k^2-3k+2=0$.

Решаем полученное квадратное уравнение относительно k:

$$k_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 1\cdot 2}}{2}=\frac{3\pm 1}{2};\ k_1=1,\ k_2=2.$$

Частные решения данного уравнения таковы: $y_1=e^x$, $y_2=e^{2x}$.

Общее решение уравнения имеет вид

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}.$$

135. Найти общее решение уравнения $y''-4y'+3y=0$.

Уравнение $k^2+pk+q=0$ называется *характеристическим* для данного дифференциального уравнения. Чтобы получить это уравнение, достаточно заменить y'', y', y соответственно на k^2, k, 1.

Известно, что при решении квадратного уравнения могут получиться корни следующих видов: 1) действительные и различные; 2) действительные и разные; 3) комплексные.

Каждому виду корней квадратного уравнения соответствует свой вид решения дифференциального уравнения.

I с л у ч а й. Корни k_1 и k_2 — действительные и различные

($D>0$). Функции $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$ являются частными линейно независимыми решениями уравнения $y''+py'+qy=0$. В этом случае общее решение указанного уравнения записывается в виде

$$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}.$$

136. Решить уравнение $y''+2y'-8y=0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2+2k-8=0$. Здесь $D=p^2-4q=2^2-4\cdot(-8)=4+32=36>0$. Следовательно, характеристическое уравнение имеет два различных действительных корня. Определим их: $k_1=-4$, $k_2=2$.

Находим частные решения данного дифференциального уравнения: $y_1=e^{-4x}$, $y_2=e^{2x}$.

Общее решение данного уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{-4x}+C_2e^{2x}.$$

137. Найти общее решение уравнения $y''+4y'+3y=0$.

138. Найти общее решение уравнения $y''-y'-2y=0$.

139. Показать, что функция $y=C_1e^{-2x}+C_2e^x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, является общим решением уравнения $y''+y'-2y=0$.

140. Найти частное решение уравнений $y''-2y'-3y=0$, если $y=8$ и $y'=0$ при $x=0$.

Решение. Имеем $k^2-2k-3=0$, $D>0$, $k_1=-1$, $k_2=3$; значит, $y_1=e^{-x}$, $y_2=e^{3x}$ — частные линейно независимые решения данного уравнения. Его общее решение имеет вид

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}.$$

Далее, находим

$$y'=-C_1e^{-x}+3C_2e^{3x}.$$

Подставляем начальные данные:

$$8=C_1e^{-1\cdot0}+C_2e^{3\cdot0}=C_1+C_2;\ 0=-C_1e^{-1\cdot0}+3C_2e^{3\cdot0}=-C_1+3C_2,$$

т. е. $8=C_1+C_2$; $0=-C_1+3C_2$, откуда $C_1=6$ и $C_2=2$.

Итак, искомое частное решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям, имеет вид $y=6e^{-x}+2e^{3x}$.

141. Найти частное решение уравнения $y''-9y=0$, если $y=2$ и $y'=6$ при $x=0$.

II случай. Корни k_1 и k_2 — действительные и равные ($D=0$).

Одно частное решение имеет вид $y_1=e^{kx}$. Можно доказать, что второе частное решение есть $y_2=xe^{kx}$. Покажем это на примере.

142. Найти линейно независимые частные решения и общее решение уравнения $y''-4y'+4y$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-4k+4=0$ имеет равные корни: $k_1=k_2=2$.

Одно частное решение есть $y_1=e^{2x}$. Покажем, что $y_2=xe^{2x}$. Имеем $y'=e^{2x}+2xe^{2x}$, $y'=2e^{2x}+2e^{2x}+4xe^{2x}=4e^{2x}+4xe^{2x}$, откуда

$$4e^{2x}+4xe^{2x}-4(e^{2x}+2xe^{2x})+4xe^{2x}=0,$$

т. е. получили тождество. Следовательно, $y_2=xe^{2x}$ — второе частное решение. Эти два решения линейно независимы. Поэтому общее решение записывается в виде

$$y=C_1e^{2x}+C_2xe^{2x}=(C_1+C_2x)e^{2x}.$$

143. Найти общее решение уравнения $y''-6y'+9y=0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-6k+9=0$ имеет равные корни: $k_1=k_2=3$. Частными линейно независимыми решениями этого уравнения являются функции $y_1=e^{3x}$, $y_2=xe^{3x}$, а общее решение имеет вид

$$y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}=(C_1+C_2x)e^{3x}.$$

144. Найти общее решение уравнения $y''+6y'+9y=0$.

145. Найти общее решение уравнения $y''-10y'+25y=0$.

146. Найти частное решение уравнения $y''-2y'+y=0$, если $y(0)=4$, $y'(0)=2$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2-2k+1=0$ имеет равные действительные корни: $k_2=k_1=1$. Поэтому общим решением данного дифференциального уравнения является функция $y=e^x\times\times(C_1+C_2x)$.

Далее, в равенства $y=e^x(C_1+C_2x)$ и $y'=e^x(C_2x+C_1+C_2)$ подставим начальные условия $y_{(0)}=4$ и $y'_{(0)}=2$. Получим систему уравнений $4=C_1$, $2=C_1+C_2$, из которой определяем $C_2=-2$.

Подставив значения $C_1=4$, $C_2=-2$ в общее решение $y=e^x(C_1+C_2x)$, получим частное решение $y=e^x(4-2x)$.

147. Найти частное решение уравнения $y''-4y'+4y=0$, если $y(0)=3$ и $y'(0)=-1$.

148. Найти частное решение уравнения $y''+6y'+9y=0$, если $y=2$ и $y'=1$ при $x=0$.

III случай. Корни k_1 и k_2 — сопряженные комплексные: $k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$. Частные решения уравнения $y''+py'+qy=0$ можно записать в виде

$$y_1=e^{(a+bi)x};\quad y_2=e^{(a-bi)x}.$$

Обычно их преобразуют так, чтобы избавиться от мнимых величин в показателе степени. Для этого используют формулы Эйлера:

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x \quad \text{и} \quad e^{-ix}=\cos x-i\sin x$$

(эти формулы мы принимаем без доказательства). Отсюда

$$e^{(a+bi)x}=e^{ax}\cdot e^{bix}=e^{ax}(\cos bx+i\sin bx),$$
$$e^{(a-bi)x}=e^{ax}\cdot e^{-bix}=e^{ax}(\cos bx-i\sin bx).$$

Общее решение имеет вид

$$y=C_{\mathrm{I}}e^{ax}(\cos bx+i\sin bx)+C_{\mathrm{II}}e^{ax}(\cos bx-i\sin bx).$$

Группируя члены и обозначая $C_1=C_{\mathrm{I}}+C_{\mathrm{II}}$ и $C_2=(C_{\mathrm{I}}-C_{\mathrm{II}})i$, получим

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx),$$

где $y_1 = e^{ax}\cos bx$ и $y_2 = e^{ax}\sin bx$ — линейно независимые функции, не содержащие мнимых величин.

149. Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 13y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение и найдем его корни: $k^2 - 4k + 13 = 0$; $k_1 = 2 + 3i$, $k_2 = 2 - 3i$.

Запишем общее решение данного уравнения:

$$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x).$$

150. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 5y = 0$.

151. Найти общее решение уравнения $y'' + 2y' + 10y = 0$.

152. Найти частное решение уравнения $y'' - 2y' + 50y = 0$, если $y = 1$ и $y' = 1$ при $x = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $k^2 - 2k + 50 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1 - 50} = 1 \pm 7i$. Поэтому общее решение данного уравнения есть

$$y = e^x(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x).$$

Далее, находим

$$y' = e^x(C_1\cos 7x + C_2\sin 7x) + e^x(-7C_1\sin 7x + 7C_2\cos 7x).$$

Подставив $x = 0$, $y = 1$ в выражение y, получим $C_1 = 1$. Затем, подставив $x = 0$, $y' = -1$, $C_1 = 1$ в выражение y', находим $C_2 = -2/7$.

Итак, искомое частное решение имеет вид

$$y = e^x\left(\cos 7x - \frac{2}{7}\sin 7x\right).$$

153. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' - 5y = 0$, если $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

154. Найти частное решение уравнения $y'' + 2y' + 2y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$.

155. Найти частное решение уравнения $y'' + 4y' + 7y = 0$, если $y = 1$ и $y' = 1$ при $x = 0$.

На основании рассмотренных примеров получаем алгоритм решения линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

1^0. Записывают дифференциальное уравнение в виде $y'' + py' + qy = 0$.

2^0. Составляют его характеристическое уравнение $k^2 + pk + q = 0$.

3^0. Вычисляют дискриминант $D = p^2 - 4q$.

а) Если $D > 0$, то уравнение имеет два разных корня k_1 и k_2, а общее решение записывается в виде

$$y = C_1e^{kx} + C_2e^{k_2x}.$$

б) Если $D = 0$, то уравнение имеет два разных корня $k_1 = k_2$, а общее решение записывается в виде

$$y = C_1e^{kx} + C_2xe^{kx}.$$

в) Если $D<0$, то уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2}=a\pm bi$, а общее решение записывается в виде

$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx).$$

Для практического использования указанный алгоритм удобно оформить в виде следующей таблицы:

Дифференциальное уравнение	$y''+py'+qy=0$		
Характеристическое уравнение	$k^2+pk+q=0$		
Дискриминант	$D>0$	$D=0$	$D<0$
Корни характеристического уравнения	$k_1\neq k_2$	$k_1=k_2$	$k_1=a+bi$, $k_2=a-bi$
Множества решений	$y=C_1e^{k_1x}+C_2e^{k_2x}$	$y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}$	$y=e^{ax}(C_1\cos bx+$ $+C_2\sin bx)$

156—179. Найти общие решения уравнений:

156. $y''+3y'=0$.
157. $y''+24y'+144y=0$.
158. $y''-5y'+6y=0$.
159. $y''-2y'+3y=0$.
160. $y''+y'+y=0$.
161. $y''+4y'+4y=0$.
162. $y''+6y'+13y=0$.
163. $y''-3y'+2y=0$.
164. $y''-2y'+y=0$.
165. $y''+12y'+36y=0$.
166. $y''-2ay'+a^2y=0$.
167. $y''-8y'=0$.
168. $y''+10y'-11y=0$.
169. $y''+14y'+49y=0$.
170. $y''-y'-12y=0$.
171. $y''-4y'+10y=0$.
172. $y''+49y=0$.
173. $y''+20y'+19y=0$.
174. $y''-ay=0$.
175. $y''-4y'+20y=0$.
176. $y''-22y'+121y=0$.
177. $y''-7y'+10y=0$.
178. $y''-4y'+8y=0$.
179. $y''+6y'+25y=0$.

180—188. Найти частные решения уравнений, удовлетворяющие заданным начальным условиям:

180. $y''+3y'+2y=0$, если $y=-1$, $y'=3$ при $x=0$.
181. $y''+2y'+5y=0$, если $y=1$, $y'=1$ при $x=0$.
182. $y''-4\sqrt{2}y'+6y=0$, если $y=-3$, $y'=\sqrt{2}$ при $x=0$.
183. $y''+4y=0$, если $y(\pi/4)=1$, $y'(\pi/4)=-2$.
184. $y''+4y'+4y=0$, если $y(0)=1$, $y'(0)=-1$.
185. $y''-10y'+25y=0$, если $y(0)=2$, $y'(0)=8$.
186. $y''-y=0$, если $y(0)=0$, $y'(0)=1$.

187. $y''+2y'-8y=0$, если $y(0)=4$, $y'(0)=-4$.

188. $y''-2y'+y=0$, если $y=4$ и $y'=2$ при $x=0$.

Как было отмечено ранее, геометрически общее решение дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых. Геометрический смысл частного решения состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через данную точку.

189. Найти интегральную кривую дифференциального уравнения $y''+2y'+2y=0$, проходящую через точку (0; 1) и касающуюся в этой точке прямой $y=x+1$.

Решение. Корни характеристического уравнения $k^2+2k+2=0$ — комплексные сопряженные: $-1\pm i$. Уравнение семейства интегральных кривых данного дифференциального уравнения, записывается в виде

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$$

Чтобы найти уравнение искомой интегральной кривой, подставим в равенства

$$y=e^{-x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$$

и

$$y'=e^{-x}((C_2-C_1)\cos x-(C_2+C_1)\sin x)$$

значения ординаты $y=1$ и углового коэффициента касательной $y'=k=1$ в точке $x=0$. Получим систему уравнений $1=C_1$, $1=C_2-C_1$, из которой определяем $C_1=1$, $C_2=2$. Подставив эти значения в уравнение семейства, получим искомое уравнение

$$y=e^{-x}(\cos x+2\sin x).$$

190. Найти интегральную кривую уравнения $y''-4y'+3y=0$, проходящую через точку (0; 2) и касающуюся в этой точке прямой $y=x+2$.

§ 5. Решения некоторых дополнительных задач, приводящих к дифференциальным уравнениям

1. Сфера применения дифференциальных уравнений

Широкое распространение дифференциальных уравнений в естествознании объясняется тем, что многие явления и процессы, происходящие в природе, количественно описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями.

В настоящее время диапазон применения дифференциальных уравнений очень широк. С их помощью решаются задачи математики, физики, химии, биологии, электротехники, радиоэлектроники, экономики, технологии производства и многих других сфер человеческой деятельности.

Дифференциальные уравнения возникают в тех случаях, когда исследуются процессы, в описании которых используются такие величины, как скорость (быстрота) протекания процесса, изменение скорости и т. п.

С помощью дифференциальных уравнений или систем таких уравнений можно создать математическую модель изучаемого физического, химического или биологического процесса. Решение этих уравнений позволяет предсказать свойства изучаемого явления и прогнозировать конечный результат.

Правда, это возможно лишь в том случае, когда составленное дифференциальное уравнение совершенно точно и полно отражает физическую, химическую или биологическую сущность явления. Составить, а тем более решить такие уравнения удается далеко не всегда. Поэтому часто дифференциальные уравнения оказываются приближенными, описывающими лишь частный случай изучаемого процесса.

2. Составление дифференциального уравнения по условию задачи

Рассмотрим конкретные задачи, решение которых приводит к интегрированию дифференциальных уравнений.

При решении этих задач сначала составляют дифференциальное уравнение, которое затем решают тем или иным способом в зависимости от его типа.

Составление дифференциальных уравнений по условию задачи напоминает составление алгебраических уравнений.

Дифференциальное уравнение задачи составляют по ее условию и в зависимости от этого условия оно получается либо как соотношение между дифференциалами переменных величин, либо как соотношение, содержащее производные неизвестной функции.

При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между дифференциалами переменных можно делать различные допущения, упрощающие задачу и вместе с тем не отражающиеся на результатах.

Например, как и при отыскании дифференциала неизвестной величины, здесь можно небольшой участок кривой считать прямолинейным, небольшой участок поверхности — плоским, переменное движение в течение малого промежутка времени можно рассматривать как равномерное, а всякий физический, химический или технический процесс — как протекающий с неизменной скоростью. При составлении дифференциального уравнения задачи в виде соотношения между производными используют геометрический, физический или механический смысл производной.

Кроме того, при составлении дифференциального уравнения задачи в зависимости от ее условия используют известные законы физики, химии, механики и других наук, в которых выражена зависимость между функцией, аргументом и производной. Например, из механики известно, что скорость, ускорение и путь при прямолинейном движении связаны соотношениями $v = s'_t$, $a = v'_t$, $a = s''_t$. Из электротехники известно, что сила тока есть производная количества электричества q, протекающего через проводник, по времени t, т. е. $\frac{dq}{dt} = f(q, t)$.

Теплоемкость тела равна производной количества теплоты Q по температуре T, т. е. $\frac{dQ}{dT} = f(Q, T)$. Скорость химической реакции определяется изменением количества вещества x за промежуток времени t, т. е. $\frac{dx}{dt} = f(x, t)$.

Можно использовать формулу силы тока как функции напряжения и времени, т. е. $\frac{dI}{dt} = f(U, t)$ и др.

3. Алгоритм решения задач на составление дифференциальных уравнений

На основании рассмотренных ранее задач на составление дифференциальных уравнений получаем алгоритм решения таких задач:

1^0. Из переменных величин выделяют функцию и аргумент, устанавливают физический смысл функции и ее производной. Затем, используя известные сведения из физики, механики, электротехники и других дисциплин, выражают зависимость между функцией, ее производной и аргументом, т. е. составляют дифференциальное уравнение.

2^0. Определяют, к какому типу относится составленное уравнение и находят его общее решение.

3^0. Если в задаче даны начальные условия, то получают частное решение уравнения.

191. Ускорение прямолинейно движущейся материальной точки в зависимости от времени выражается формулой $a(t) = 6t - 2$. Найти закон движения, если в начальный момент времени $t = 0$ скорость $v = 1$ м/с, а путь $s = 0$.

Р е ш е н и е. 1^0. Закон движения точки выражается функцией $s(t)$. Тогда $v(t) = \frac{ds}{dt}$ — скорость точки; $a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ — ускорение движения. Согласно условию, составим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2s}{dt^2} = 6t - 2.$$

2^0. Полученное уравнение является простейшим дифференциальным уравнением второго порядка. Понизим его порядок; так как $\frac{d^2s}{dt^2}=\frac{dv}{dt}$, то

$$\frac{dv}{dt}=6t-2;\ dv=(6t-2)dt;\ v=3t^2-2t+C_1.$$

Отсюда

$$\frac{ds}{dt}=3t^2-2t+C_1;\ ds=(3t^2-2t+C_1)dt;\ s=t^3-t^2+C_1t+C_2.$$

3^0. Используя начальные условия, находим $C_1=1$, $C_2=0$; следовательно, $s=t^3-t^2+t$ — искомый закон движения.

4. Дополнительные задачи на составление дифференциальных уравнений

Перед рассмотрением решений задач данного раздела следует еще раз просмотреть решения задач п. 3 § 1 и п. 4 § 2.

192. Металлический шар, температура которого в начале опыта была равна 12 °С, охлаждается струей воды, имеющей температуру 0°. Через 8 мин шар охладился до 9°. Считая скорость охлаждения пропорциональной разности между температурой тела и температурой охлаждающей среды, определить, в течение какого времени шар охладился до 7°.

Решение. 1^0. Обозначим через T температуру шара, а через t — время, прошедшее после начала опыта. Тогда скорость охлаждения шара есть производная $\frac{dT}{dt}(T'_t)$. Согласно условию, $T'=k(T-0)=kT$, где k — коэффициент пропорциональности.

2^0. Это — уравнение с разделяющимися переменными. Разделяя переменные, имеем $\frac{dT}{dt}=kT$, $\frac{dT}{T}=kdt$, откуда $\ln T=kt+\ln C$, или $\ln T=\ln e^{kt}+\ln C$. Наконец, после потенцирования получим

$$T=Ce^{kt}. \qquad (1)$$

3^0. Чтобы найти постоянные C и k, воспользуемся данными задачи: при $t=0$ температура шара $T=12°$, а при $t=8$ она составляет $T=9°$. Заменяя в равенстве (1) t и T их значениями, находим $12=Ce^0$ и $9=Ce^{8k}$. Из первого равенства имеем $C=12$, а из второго $e^{8k}=0{,}75$. Для нахождения e^k извлечем из обеих частей равенства корень восьмой степени:

$$e^k=\sqrt[8]{0{,}75}=0{,}75^{1/8}.$$

Возведя в степень t обе части этого равенства, имеем

$$e^{kt}=0{,}75^{t/8}.$$

Подставив в равенство (1) вместо C и e^{kt} найденные значения, получим

$$T=12\cdot(0{,}75)^{t/8}. \qquad (2)$$

Чтобы ответить на вопрос задачи, прологарифмируем по основанию 10 равенство (2):

$$\lg T = \lg 12 + \frac{t}{8}\lg 0{,}75$$

и положим в полученном равенстве $T = 7$:

$$\lg 7 = \lg 12 + \frac{t}{8}\lg 0{,}75.$$

Отсюда окончательно находим

$$t = \frac{8(\lg 7 - \lg 12)}{\lg 0{,}75} = \frac{8(0{,}8451 - 1{,}0792)}{\bar{1}{,}8751} = \frac{-8\cdot 0{,}2341}{-0{,}1249} = \frac{1{,}8728}{0{,}1249} \approx 15 \text{ мин}.$$

193. Сосуд вместимостью 100 л наполнен рассолом, содержащим 10 кг растворенной соли. За 1 мин в него втекает 3 л воды и столько же смеси перекачивается в другой сосуд той же вместимости, первоначально наполненный водой, из которого избыток жидкости выливается. В какой момент времени количество соли в обоих сосудах окажется одинаковым?

Решение. Пусть в момент времени t (мин) в первом сосуде содержится x (кг) соли и пусть в последующий малый промежуток времени dt количество соли в этом сосуде уменьшится на dx.

За время dt из сосуда вытечет $3dt$ (л) рассола. Концентрация рассола (количество соли в одном литре раствора) в момент t составит $\frac{x}{100}$ (кг/л). Если допустить, что в течение малого промежутка времени dt концентрация рассола останется неизменной, то за это время количество соли уменьшится на $-dx = \frac{x}{100}\cdot 3dt$ (так как $dx < 0$). Разделяя в этом уравнении переменные и интегрируя, получим

$$\frac{dx}{x} = -\frac{3}{100}dt; \quad \ln x = -0{,}03t + C_1$$

Исходя из начального условия $x = 10$ при $t = 0$, определяем значение постоянной $C_1 = \ln 10$.

Следовательно, зависимость количества соли x в первом сосуде от времени t выражается равенством

$$\ln x = -0{,}03t + \ln 10 \text{ или } x = 10e^{-0{,}03t}. \qquad (3)$$

Найдем теперь зависимость количества соли y от времени для второго сосуда. Во втором сосуде концентрация рассола в момент t равна $\frac{y}{100}$ (кг/л). За время dt в него вольется $3dt$ (л) рассола, содержащих $\frac{3x}{100}dt$ (кг) соли, а выльется $3dt$ (л) рассола, содержащих $\frac{3y}{100}dt$ (кг) соли, т. е. за время dt количество соли во втором резервуаре изменится на величину

$$dy = 0{,}03x\,dt - 0{,}03y\,dt \text{ или } dy = 0{,}03(x-y)\,dt.$$

Заменяя в этом уравнении x его выражением из формулы (3), получим линейное уравнение первого порядка

$$dy = 0{,}03(10e^{-0{,}03t} - y)dt; \quad y' + 0{,}03y = 0{,}3e^{-0{,}03t},$$

общий интеграл которого имеет вид

$$y = e^{-0,03t}(C_2 + 0,3t).$$

Значение постоянной C_2 определяем из начальных условий; так как $y = 0$ при $t = 0$, то $C_2 = 0$. Следовательно, зависимость количества соли y во втором сосуде от времени t выражается равенством

$$y = 0,3te^{0,03t}.$$

Искомый момент времени, в который количество соли в обоих сосудах станет одинаковым, найдем, полагая $x = y$:

$$10e^{-0,03t} = 0,3te^{-0,03t};\ 10 = 0,3t;\ t = 33\frac{1}{3}\ \text{с}.$$

В этот момент в каждом сосуде окажется по $10/e \approx 3,68$ кг соли.

194. Конденсатор емкостью Q включается в цепь с напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент t после включения.

Решение. 1°. Сила тока I представляет собой производную количества электричества q, прошедшего через проводник, по времени t, т. е. $I = \frac{dq}{dt}$. В цепи действует электродвижущая сила E, равная разности между напряжением цепи U и напряжением конденсатора $\frac{q}{Q}$, т. е. $E = U - \frac{q}{Q}$. Согласно закону Ома, $I = \frac{E}{R}$.

Теперь можем составить уравнение

$$\frac{dq}{dt} = \frac{U - \frac{q}{Q}}{R} \quad \text{или} \quad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{QR} = \frac{U}{R}.$$

2°. Это — линейное уравнение первого порядка. Его общее решение имеет вид

$$q = Ce^{-\frac{t}{QR}} + UQ.$$

3°. По условию $q = 0$ при $t = 0$ и, значит, $0 = C + UQ$, т. е. $C = -UQ$. Таким образом, заряд конденсатора в момент t выражается формулой

$$q = UQ\left(1 - e^{-\frac{t}{QR}}\right).$$

195. В моторной лодке, имеющей начальную скорость $v_0 = 5$ м/с, выключили мотор. При движении лодка испытывает сопротивление воды, сила которой пропорциональна квадрату скорости лодки, причем коэффициент пропорциональности равен $m/50$, где m — масса лодки. Через какой промежуток времени скорость лодки уменьшится вдвое и какой путь пройдет лодка за это время?

Решение. 1°. Согласно условию, за функцию можно принять путь s, а за аргумент — время t. Используя второй закон Ньютона $F = ma$, получим уравнение

$$ms''_{(t)} = -\frac{m}{50}(s'_{(t)})^2, \quad \text{или} \quad s''_{(t)} = -\frac{1}{50}(s'_{(t)})^2,$$

где знак минус показывает, что сила сопротивления направлена в сторону, противоположную движению.

2^0. Это — дифференциальное уравнение второго порядка. Понизим его порядок. Так как $s'_{(t)}=v_{(t)}$ и $s''_{(t)}=v'(t)$, то приходим к уравнению первого порядка

$$\frac{dv}{dt}=-\frac{1}{50}v^2.$$

Разделим переменные и проинтегрируем:

$$\frac{dv}{v^2}=-\frac{1}{50}dt;\ \frac{1}{v}=\frac{t}{50}+C_1.$$

3^0. Используя условие $v_0=5$ м/с, находим $C_1=\frac{1}{5}$, откуда $v=$ $=\frac{50}{t+10}$. Тогда получим

$$\frac{ds}{dt}=\frac{50}{t+10};\ ds=\frac{50dt}{t+10};\ s=50\ln(t+10)+C_2.$$

Из условия $s=0$ при $t=0$ находим $C_2=-50\ln 10$, откуда

$$s=50\ln\frac{t+10}{10}.$$

Необходимо определить промежуток времени, в течение которого скорость уменьшится вдвое. Подставляя в формулу для v значение $\frac{1}{2}v_0=2{,}5$, находим $2{,}5=\frac{50}{t+10}$; $t=10$ с. За это время лодка пройдет путь $s=50\ln 2\approx 34{,}5$ (м).

196. Материальная точка массы m притягивается неподвижной точкой O с силой, пропорциональной массе m и расстоянию x от точки O; при этом коэффициент пропорциональности равен ω^2. Найти закон движения.

Решение. 1^0. Из механики известно, что если материальная точка массы m движется прямолинейно под действием силы F, то $F=ma$, т. е. $F=mx''$, где t — время, а x'' — ускорение, вызываемое силой F.

Учитывая, что притягивающая сила F пропорциональна m и x, а также что эта сила при положительном x направлена в сторону его убывания, находим

$$F=-\omega^2 mx.$$

Заменив в этом уравнении F его значением $F=mx''$, получаем уравнение движения:

$$mx''=-\omega^2 mx,\text{ или } x''+\omega^2 x=0.$$

2^0. Решим полученное линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Характеристическое уравнение $k^2+\omega^2=0$ имеет мнимые корни: $k_1=\omega i$, $k_2=$ $=-\omega i$. Общим решением является функция

$$x=C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t.$$

Этой зависимости можно придать более простой вид, полагая $C_1=$ $=R\sin\alpha$, $C_2=R\cos\alpha$, где R и α — постоянные величины. Имеем

$$x = R(\sin\omega t\cos\alpha + \cos\omega t\sin\alpha).$$

В скобках записано развернутое выражение синуса суммы двух углов ωt и α. В результате получим соотношение

$$x = R\sin(\omega t + \alpha),$$

выражающее закон простого гармонического колебательного движения.

197. Гиря, поддерживаемая спиральной пружиной, приподнята на расстояние b и затем освобождена. Она начинает падать, причем ее ускорение определяется уравнением $g = -p^2 s$, где p — постоянная, а s — расстояние от положения равновесия. Найти уравнение движения.

Решение. Запишем дифференциальное уравнение

$$s'' = -ps, \text{ или } s'' + p^2 s = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение и находим его корни: $k^2 + p = 0$, $k = \pm pi$, $a = 0$, $b = p$. Таким образом,

$$s = e^0(A\sin pt + B\cos pt), \text{ т. е. } s = A\sin pt + B\cos pt.$$

Для определения произвольных постоянных A и B воспользуемся начальными условиями. При $t = 0$ имеем $s = b$; следовательно,

$$b = A\sin 0 + B\cos 0 = A\cdot 0 + B\cdot 1, \text{ т. е. } b = B.$$

Найдем скорость в данный момент:

$$v = s' = Ap\cos pt - Bp\sin pt$$

и воспользуемся тем, что $v = 0$ при $t = 0$. Имеем

$$0 = Ap\cos 0 + Bp\sin 0;\ 0 = Ap + 0;\ Ap = 0;$$

так как $p \neq 0$, то $A = 0$.

Итак, уравнение движения имеет вид $s = b\cos pt$. Функция $\cos pt$ — периодическая, поэтому и s является периодической функцией; функция s будет периодически то возрастать, то убывать, т. е. гиря будет совершать колебательное движение то вниз, то вверх.

198. К источнику с э.д.с., равной $e(t)$, подключают контур, состоящий из последовательно соединенных катушки, индуктивности L, омического сопротивления R и емкости C (рис. 206). Найти силу тока i в цепи как функцию времени t, если в начальный момент времени сила тока в контуре и заряд конденсатора равны нулю.

Решение. 1^0. По закону Кирхгофа электродвижущая сила в цепи равна сумме падений напряжения на индуктивности, сопротивления и емкости:

$$e(t) = U_L + U_R + U_C,$$

связанных с силой тока соотношениями

$$U_L = L\frac{di}{dt};\ U_R = Ri;\ U_C = \frac{1}{C}\int_0^t i(t)dt.$$

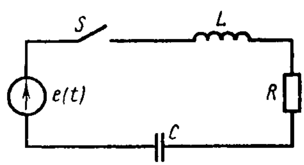

Рис. 206

Заметим, что последнее равенство получается из соотношения между силой тока и зарядом конденсатора: $i = \frac{dq}{dt}$, от

куда $q=\int\limits_0^t i(t)\,dt+q_0$, а так как $U_C=\frac{q}{C}$, то $U_C=\frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)\,dt+\frac{q_0}{C}$.
В данной задаче $q_0=0$ по условию.

Таким образом, получаем уравнение

$$e(t)=L\frac{di}{dt}+R_i+\frac{1}{C}\int\limits_0^t i(t)\,dt.$$

2^0. Это уравнение — интегрально-дифференциальное. Продифференцировав его по t, получим линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$L\frac{d^2i}{dt^2}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=\frac{de}{dt}\left(\frac{di}{dt}=i',\ \frac{d^2i}{dt^2}=i''\right).$$

Здесь возможны два случая: 1) $e(t)=\text{const}$; 2) $e(t)=E\sin\omega t$.

Рассмотрим первый случай. Здесь $\frac{de}{dt}=0$. Тогда получим однородное уравнение

$$\frac{d^2i}{dt^2}+\frac{R}{L}\cdot\frac{di}{dt}+\frac{1}{LC}\cdot i=0.$$

Характеристическое уравнение

$$r^2+\frac{R}{L}r+\frac{1}{LC}=0$$

имеет корни

$$r_{1,2}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\frac{R^2C-4L}{4L^2C}}.$$

Если $R^2C-4L\geqslant 0$, то корни характеристического уравнения — действительные и общее решение есть функция непериодическая. Соответственно апериодической является и сила тока. Никаких электрических колебаний в цепи не произойдет.

Если же $R^2C-4L<0$, то общее решение

$$i=e^{-\delta t}\cdot(C_1\cos\omega t+C_2\sin\omega t),$$

где положено $\delta=\frac{R}{2L}$, $\omega^2=\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}$, определяет электрические колебания.

3^0. Так как $L\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=E$, то $\frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{E}{L}$. Следовательно, начальные условия можно записать в виде

$$i\Big|_{t=0}=0;\ \frac{di}{dt}\Big|_{t=0}=\frac{E}{L}.$$

Дифференцируя i по t, имеем
$$\frac{di}{dt}=e^{-\delta t}\cdot(-\delta(C_1\cos\omega_1 t+C_2\sin\omega_1 t)+\omega(-C_1\sin\omega_1 t+C_2\cos\omega_1 t)).$$

Подставив $t=0$ в выражения для i и $\frac{di}{dt}$, получим $0=C_1$, $\frac{E}{L}=$ $=-\delta C_1+\omega_1 C_2$, откуда $C_1=0$ и $C_2=\frac{E}{L\omega}$.

Итак, частное решение уравнения принимает вид

$$i = \frac{E}{L\omega_1} \cdot e^{-\delta t} \cdot \sin \omega_1 t.$$

Замечание. При рассмотрении второго случая получается линейное неоднородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = E\omega \cos \omega t,$$

которое в данном пособии не рассматривается.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Какое уравнение называется дифференциальным? Приведите примеры.
2. Какие из следующих уравнений являются дифференциальными:
а) $yy' + 2 = 0$; б) $2y^2 + 3y = 0$; в) $3^y + y = 3$;
г) $y^2 + y'' = y$; д) $\frac{dv}{dt} = 3v$; е) $v^3 = 2v + v^2$?
3. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое — частным?
5. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?
6. Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?
7. Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?
8. Определите порядок следующих дифференциальных уравнений:
а) $y'' + 2y' = 0$; б) $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$;
в) $y'' + y''' = y'$; г) $xyy' + x^2 - 2y^2 = 0$.
9. Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого порядка? третьего порядка?
10. Может ли функция $y = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, быть общим решением дифференциального уравнения первого порядка?
11. Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения или нет?
12. Проверьте, является ли решением дифференциального уравнения $y' \operatorname{ctg} x + y = 2$ функция $y = \cos x + 2$.
13. Определите, какие из указанных функций являются решениями, общими решениями уравнения $y' = y$: а) $y = e^{2x}$; б) $y = e^x$; в) $y = e^x + C$; г) $y = Ce^x$.
14. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического уравнения?
15. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
16. Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными и с разделяющимися переменными?
17. Как решается уравнение с разделенными переменными?
18. Чем отличается уравнение с разделяющимися переменными от уравнения с разделенными переменными? Как разделяют переменные?
19. Можно ли считать, что уравнение с разделенными переменными является частным случаем уравнения с разделяющимися переменными?
20. В какой последовательности решают дифференциальное уравнение первого порядка с разделяющимися переменными?
21. Решите уравнения: а) $(x+5)dy = y\,dx$; б) $y' = 2\sqrt{y}$; в) $y' \operatorname{tg} x - y = a$.
22. В чем заключается задача Коши? Каков его геометрический смысл?
23. Найдите уравнение линии, проходящей через точку $M(3;\ 4)$ и такой, что ее угловой коэффициент касательной равен отношению абсциссы к ординате.
24. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка? Как для них формулируется задача Коши?

25. Какие из следующих уравнений являются линейными: а) $yy'' = x$; б) $(t-1) = ss' = 0$; в) $y' - \frac{y}{x} = x$?.

26. Какими величинами являются и от чего зависят коэффициенты p и q в линейном дифференциальном уравнении первого порядка?

27. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

28. Решите уравнение $y' + \frac{2y}{x} = x^3$.

29. Какой вид имеет простейшее дифференциальное уравнение второго порядка? Как оно решается?

30. Определите, какая из указанных функций является общим решением дифференциального уравнения $y'' = 2x$:

а) $y = 2x^3 + C_1x + C_2$; б) $y = x^3 + C_2$;

в) $y = \frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$; г) $y = x^3 + x$.

31. Запишите задачу Коши для уравнения $y'' = f(x)$.

32. Решите уравнения: а) $y'' = -2x$; б) $y'' = \cos 2x$; в) $y'' = e^{-x/2}$.

33. Как определяется и как записывается в общем виде линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами?

34. Что такое характеристическое уравнение?

35. Известно, что $y_1 = e^x$ и $y_2 = 2e^x$ являются решениями уравнения $y'' - 2y' + y = 0$. Можно ли утверждать, что $y = C_1e^x + 2C_2e^x$ — общее решение этого уравнения?

36. Известно, что $y_1 = e^x$ и $y_2 = e^{2x}$ — решения уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$. Можно ли утверждать, что $y = C_1e^x + C_2e^{2x}$ — общее решение данного уравнения?

37. Какой вид имеет общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, если корни характеристического уравнения: а) действительные и различные ($k_2 \neq k_1$); б) действительные и равные ($k_2 = k_1 = k$); в) комплексные сопряженные ($k_{1,2} = \alpha \pm i\beta$)?

38. Решите уравнения: а) $y'' + 4y' + 3y = 0$; б) $y'' + 8y' + 16y = 0$; в) $y'' + 9y = 0$.

39. Решите следующие уравнения. Перед решением следует определить, к какому виду оно относится, и перечислить его отличительные признаки:

а) $(1+x)y\,dx + (1-y)x\,dy = 0$; б) $(x+y)dx + x\,dy = 0$;

в) $y'' - y = 0$; г) $x^2\frac{dy}{dx} = 2xy + 3$;

д) $y'' + y = 0$; е) $y'' - 7y' + 12y = 0$.

40. Каков порядок решения задач на составление дифференциальных уравнений?

41. Тело движется со скоростью $v = \frac{1}{t+2}$. Найдите уравнение движения, если $s = 0$ при $t = 0$.

42. Угловой коэффициент касательной к кривой в каждой ее точке задан функцией $\cos x$. Найдите уравнение кривой, проходящей через точку (0; 0).

43. Ускорение прямолинейного движения материальной точки задано уравнением $a = 6t - 4$. Найдите уравнение движения точки, если $s = 5$ м, $s' = 6$ м/с при $t = 2$с.

44. Составьте уравнение линии, проходящей через точку $A(1; 0)$ и имеющей касательную, угловой коэффициент которой в каждой точке равен 2.

45. Тело, температура которого 25 °С, погружено в термостат, в котором поддерживается температура 0 °С. Зная, что скорость охлаждения тела пропорциональна разности между температурами тела и окружающей среды, определите, за какое время тело охладится до 10 °С, если за 20 мин оно охлаждается до 20 °С.

Ответы

2. Уравнения а) и г). 8. Уравнения б), г) — первый, а) — второй, в) — третий. 10. Нет, так как в общем решении дифференциального уравнения первого порядка содержится одна произвольная постоянная. 12. Да. 13. Функция б) — частное решение, функция в) — общее решение. 21. а) $y = C(x+5)$; б) $y = (x+C)^2$; в) $y = C\sin x - a$. 23. $y^2 - x^2 = 2C$. 25. Уравнения б) и в). 28. $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{C}{x}$. 30. Функция в). 32. а) $y = -\frac{1}{3}x^3 + C_1x + C_2$; б) $y = -\frac{1}{4} \times \cos 2x + C_1x + C_2$; в) $y = 4e^{-x/2} + C_1x + C_2$. 38. а) $y = C_1e^{-3x} + C_2e^{-x}$; б) $y = e^{-4x}(C_1 + C_2x)$; в) $y = C_1\sin 3x + C_2\cos 3x$. 39. а) $\ln xy + x - y = C$; б) $x^2 + 2xy = C$; в) $y = C_1 + C_2e^x$; г) $y = Cx^2 - \frac{1}{x}$; д) $y = C_1\cos x + C_2\sin x$; е) $y = C_1e^{3x} + C_2e^{4x}$ 41. $s = \ln\left(\frac{t}{2} + 1\right)$. 42. $y = \sin x$. 43. $s = t^3 - 2t^2 - 2t + 1$. 44. $y = 2x + 2$. 45. 82 мин.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Решите уравнение $y \operatorname{tg} x + dy = 0$.
2. Найдите общее решение уравнения $xy' = y + 1$.
3. Найдите частное решение уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$, если $y = 2$, $y' = 3$ при $x = 0$.
4. Скорость прямолинейного движения материальной точки выражается формулой $v = 3 + 4t$. Найдите уравнение движения точки, если $s = 10$ м при $t = 1$ с.

Вариант 2

1. Решите уравнение $y' + 2x^2y' + 2xy - 2x = 0$.
2. Найдите общее решение уравнения $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x$.
3. Найдите частное решение уравнения $y'' - 6y' + 13 = 0$, если $y = 0$, $y' = 5$ при $x = 0$.
4. Ускорение прямолинейного движения материальной точки выражается формулой $a = 12t + 4$. Найдите уравнение движения точки, если $s = 1$ м, $v = 4$ м/с при $t = 1$ с.

Ответы

Вариант 1. 1. $y = C\cos x$. 2. $y = Cx - 1$. 3. $y = e^{2x} - 1$. 4. $2t^2 + 3t + 5$.
Вариант 2. 1. $(1-y)\sqrt{1+2x^2}$. 2. $y = (x^2 + C)\sin x$. 3. $y = e^{3x}(\cos 2x + \sin 2x)$. 4. $s = 2t^3 + 2t^2 - 6t + 3$.