Глава V

Интеграл и его приложения

§ 1. Первообразная

Дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные действия
Определение первообразной функции
Неоднозначность нахождения первообразной

1. Дифференцирование и интегрирование — взаимно обратные действия

Из школьного курса математики известно, что каждому математическому действию соответствует обратное ему действие. Так, вычитание есть действие, обратное сложению, деление — умножению и т. д.

В гл. IV было рассмотрено новое действие — дифференцирование. Основной задачей дифференциального исчисления является нахождение производной или дифференциала заданной функции. Для дифференцирования существует обратное действие — интегрирование: нахождение функции по заданной ее производной или дифференциалу. Мы знаем, например, как по заданному закону движения $s=s(x)$ найти его скорость $v=s'$. Это — задача дифференцирования. Обратная задача — нахождение закона движения по заданной скорости — решается интегрированием. Таким образом, если в процессе дифференцирования решается задача об отыскании скорости изменения функции, вызываемого изменением аргумента, то задачей интегрирования является нахождение самой функции по заданной скорости ее изменения.

2. Определение первообразной функции

Функцию, восстанавливаемую по заданной ее производной или дифференциалу, называют *первообразной.*

Определение. Дифференцируемая функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$ на заданном промежутке, если для всех x из этого промежутка справедливо равенство $F'(x)=f(x)$.

Из этого определения вытекает, что всякая функция по отношению к своей производной является первообразной.

Так, функция $F(x)=x^2$ есть первообразная функции $f(x)=2x$ на интервале $(-\infty, \infty)$, поскольку для всех $x \in \mathbf{R}$ имеет место равенство $F'(x)=(x^2)'=2x$.

1. Найти первообразную функции $f(x)=4x^3$.

Решение. Используя правило дифференцирования, можно догадаться, что на интервале $(-\infty, \infty)$ первообразной является $F(x)=x^4$. Действительно, $F'(x)=4x^3$ для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

Замечание. Если сказано, что $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$, но не указано, в каком именно интервале, то под этим интервалом в дальнейшем будет подразумеваться любой интервал, в котором функция $f(x)$ определена.

2. Найти первообразную функции: а) $f(x)=3x^2$; б) $f(x)=8x^7$.

3. Найти первообразную функции $y=x^6$ на множестве $\mathbf{R}$.

Решение. Степень x^6 получается при дифференцировании x^7. Так как $(x^7)'=7x^6$, то, чтобы при дифференцировании x^7 получить перед x^6 коэффициент 1, нужно x^7 взять с коэффициентом 1/7. Следовательно, $F(x)=(1/7)x^7$.

4. Найти первообразную функции $f(x)=x^5$.

5. Показать, что функция $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$ является первообразной функции $f(x)=\cos 2x$.

Решение. Так как $F'(x)=\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)'=\frac{1}{2}\cdot 2\cos 2x=\cos 2x$, то $\frac{1}{2}\sin 2x$ — первообразная функции $\cos 2x$.

6. Проверить, что функция $F(x)=x^5+3x^2-\cos x$ является первообразной функции $f(x)=5x^4+6x+\sin x$ на множестве $\mathbf{R}$.

7. Показать, что функция $F(x)=\sqrt{x}$ есть первообразная функции $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ на промежутке $(0, \infty)$.

8. Найти одну из первообразных следующих функций: а) $f(x)=6$; б) $f(x)=-3$; в) $f(x)=\cos x$.

9. Является ли функция $F(x)=1/x$ первообразной функции $f(x)=-1/x^2$?

10. Даны пары функций, из которых вторая должна быть первообразной для первой: а) x^4 и x^5; б) $5\cos 5x$ и $\sin 5x$; в) $3e^{3x}$ и e^{3x}; г) $-\frac{2}{\sin^2 2x}$ и $\operatorname{ctg} 2x$; д) $\frac{1}{1+9x^2}$ и $\operatorname{arctg} 3x$. В каких примерах допущены ошибки?

11. Для какой из данных функций f_1, f_2, f_3, f_4 функция F является первообразной, если $F(x)=\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}$, $f_1(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}$, $f_2(x)=\cos\frac{x}{2}$, $f_3(x)=\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$, $f_4(x)=-\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$?

12. Какие из данных функций F_1, F_2, F_3, F_4 являются первообразными для функции f, если $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $F_1(x)=-\frac{1}{x}$, $F_2(x)=\frac{1}{x}$, $F_3(x)=-\frac{2}{x^3}$, $F_4(x)=\frac{1}{2x}$?

3. Неоднозначность нахождения первообразной

Как всякое обратное действие, интегрирование вносит некоторое осложнение. Вспомним, как начинается изучение действий над числами. Сначала изучают только целые положительные числа. Наиболее простое действие — сложение — не вносит никаких затруднений. Однако стоит только перейти к обратному действию вычитанию, как встречается первое затруднение: вычесть из меньшего числа большее невозможно. Чтобы преодолеть эту трудность, в алгебре вводят отрицательные числа и вычитание становится возможным, например $1-3=-2$. При умножении целых чисел не встречается никаких затруднений; обратное же действие — деление — сразу вносит трудность. Оказывается, что далеко не все числа делятся друг на друга. Деление становится возможным с введением дробных чисел, например $9:4=2\frac{1}{4}$. Еще большие затруднения появляются при извлечении корня — действии, обратном возведению числа в целую положительную степень; здесь уже появляются затруднения в знаках. Так, корень четной степени из положительного числа имеет два знака, а корень четной степени из отрицательного числа не имеет действительного значения. Чтобы стало возможным извлечение корней целой положительной степени из действительных чисел, требуется ввести понятия об иррациональном числе, о мнимой единице, о мнимом числе и т. д. Интегрирование как действие, обратное дифференцированию, также вносит осложнение.

Дифференцирование функции — однозначная операция, т. е. если функция имеет производную, то только одну. Это утверждение непосредственно следует из определений предела и производной: если функция имеет предел, то только один. Обратная операция — отыскание первообразной — не однозначна.

Так, функции $F_1(x)=x^4$, $F_2(x)=x^4+5$, $F_3(x)=x^4-\sqrt{3}$, $F_4(x)=x^4+C$, где C — любое постоянное действительное число, являются первообразными функции $f(x)=4x^3$, $x\in\mathbf{R}$, поскольку все эти функции имеют одну и ту же производную $4x^3$.

▲ **Теорема.** *Если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных этой функции имеет вид $F(x)+C$, где C — любое действительное число.*

Доказательство. Пусть $F'(x)=f(x)$. Тогда $(F(x)+C)'=F'(x)+C'=F'(x)=f(x)$.

Покажем теперь, что все первообразные функции $f(x)$ отличаются лишь постоянным слагаемым.

Пусть $\Phi(x)$ — другая первообразная функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке, т. е. $\Phi'(x)=f(x)$. Тогда $(\Phi(x)-F(x))'=\Phi'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ при всех x из рассматриваемого промежутка. Следовательно, $\Phi(x)-F(x)=C$, что и требовалось установить.

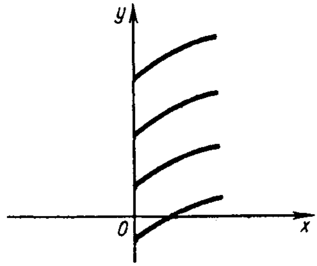

Рис. 136

Таким образом, любые две первообразные данной функции отличаются друг от друга на постоянное слагаемое, а выражение $F(x)+C$ исчерпывает множество всех первообразных заданной функции $f(x)$. Итак, задача нахождения первообразной неоднозначна. Она имеет бесконечное множество решений.

Геометрически выражение $F(x)+C$ представляет собой семейство кривых, получаемых из любой из них параллельным переносом вдоль оси Oy (рис. 136).

§ 2. Неопределенный интеграл и его свойства

Определение интеграла

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Определение интеграла

Как уже было отмечено, первообразную можно находить не только по данной ее производной, но и по ее дифференциалу. В дальнейшем мы будем этим пользоваться.

Определение. Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке называется *неопределенным интегралом* и обозначается символом $\int f(x)dx$, где $f(x)$ — *подынтегральная функция,* $f(x)dx$ — *подынтегральное выражение,* x — *переменная интегрирования.*

Таким образом, если $F(x)$ — какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

где C — любое действительное число.

Замечание. Наличие постоянной C делает задачу нахождения функции по ее производной не вполне определенной; отсюда происходит и само название «неопределенный интеграл».

Так, пользуясь определением неопределенного интеграла, можно записать: $\int 2x\,dx=x^2+C$; $\int \cos x\,dx=\sin x+C$ и т. д.

Значит, чтобы найти неопределенный интеграл от заданной функции, нужно найти какую-нибудь одну ее первообразную и прибавить к ней произвольную постоянную C.

Слово «интеграл» происходит от латинского слова integer, что означает «восстановленный». Интегрируя какую-либо функцию, например $4x^3$, мы как бы восстанавливаем функцию x^4, производная которой равна $4x^3$.

Чтобы проверить, правильно ли найден неопределенный интеграл, необходимо продифференцировать полученную функцию; если при этом получается подынтегральное выражение, то интеграл найден верно.

Например, $y=\int(3x^2+2)dx=x^3+2x+C$. Сделаем проверку: $y'=3x^2+2$ или $dy=(3x^2+2)dx$. Следовательно, интеграл найден верно.

13. Найти $\int 6x^5 dx$.

Решение. Требуется найти такую функцию, производная которой равна $6x^5$. Из дифференциального исчисления известно, что $6x^5=(x^6)'$; значит, $\int 6x^5 dx=x^6+C$.

14. Найти: а) $\int\frac{dx}{x}$; б) $\int\frac{dx}{\cos^2 x}$.

15. Проверить справедливость равенства $\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{1}{2x^2}+C$.

Решение. Имеем $\left(-\frac{1}{2x^2}+C\right)'=\left(-\frac{1}{2}x^{-2}+C\right)'=x^{-3}+0=\frac{1}{x^3}$. Так как получили подынтегральную функцию, то данное равенство справедливо.

16. Проверить справедливость равенств:

а) $\int\frac{dx}{\sqrt{x}}=\sqrt{x}+C$; б) $\int\sqrt[3]{x^2}dx=\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2}+C$.

2. Основные свойства неопределенного интеграла

Из рассмотренных ранее примеров видно, что можно находить интегралы, подбирая первообразные. Однако это не всегда просто. При интегрировании помогает знание некоторых свойств интеграла, формул интегрирования, а также специальных приемов.

Рассмотрим сначала основные свойства неопределенного интеграла.

1. *Производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции,* т. е.

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

Это свойство непосредственно вытекает из определения неопределенного интеграла, поскольку $\int f(x)dx=F(x)+C$, а $(F(x)+C)'=f(x)$.

Так, $\left(\int x^5 dx\right)'=x^5$, $\left(\int\cos 2x\,dx\right)'=\cos 2x$.

На этом свойстве основано доказательство двух следующих свойств.

2. *Постоянный множитель подынтегрального выражения можно вынести за знак интеграла,* т. е.

$$\int mf(x)\,dx = m\int f(x)\,dx,$$

где m — постоянная величина, не равная нулю.

Это свойство доказывается дифференцированием обеих частей приведенного равенства. При этом учитывается свойство 1: производная неопределенного интеграла равна подынтегральной функции.

Действительно,

$$\left(\int mf(x)\,dx\right)' = mf(x), \quad \left(m\int f(x)\,dx\right)' = m\left(\int f(x)\,dx\right)' = mf(x).$$

Например, $\int 2ax\,dx = 2a\int x\,dx$, где a — постоянная, не равная нулю.

17. Найти интеграл $\int 5\cos x\,dx$.

3. *Интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций,* т. е.

$$\int (f(x) \pm \varphi(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx.$$

Для доказательства найдем производные обеих частей равенства и покажем, что они равны между собой. Сначала найдем производную левой части:

$$\left(\int (f(x) \pm \varphi(x)\,dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x);$$

мы воспользовались свойством 1 неопределенного интеграла.

Теперь найдем производную правой части равенства:

$$\left(\int f(x)\,dx \pm \int \varphi(x)\,dx\right)' = \left(\int f(x)\,dx\right)' \pm \left(\int \varphi(x)\,dx\right)' = f(x) \pm \varphi(x).$$

Здесь был использован тот факт, что производная алгебраической суммы функций равна алгебраической сумме производных этих функций, а также свойство 1 неопределенного интеграла.

Итак, производные обеих частей равенства равны между собой, что и доказывает свойство 3.

18. Доказать, что $\int (x^3 + x^2)\,dx = \int x^3\,dx + \int x^2\,dx$.

19. Доказать, что $\int (\sin x + \cos x)\,dx = \int \sin x\,dx + \int \cos x\,dx$.

20. Представить интеграл $\int (5x^2 - 2x^3)\,dx$ как алгебраическую сумму интегралов.

Решение. $\int (5x^2 - 2x^3)\,dx = 5\int x^2\,dx - 2\int x^3\,dx$.

21. Представить интеграл $\int (2e^x + 5)\,dx$ как алгебраическую сумму интегралов.

22. Вычислить интеграл $\int (5\cos x + 2e^x)\,dx$.

Решение. $\int (5\cos x + 2e^x)\,dx = 5\int \cos x\,dx + 2\int e^x\,dx = 5\sin x + C_1 + 2e^x + C_2 = 5\sin x + 2e^x + C$.

Замечание. При интегрировании алгебраической суммы функций принято записывать только одну произвольную постоянную, так как алгебраическая сумма произвольных постоянных есть постоянная.

4. *Дифференциал неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*, т. е.

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx.$$

Это свойство следует из определения неопределенного интеграла. Действительно, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, а $d(F(x) + C) = f(x)\,dx$. Свойство 4 означает, что знак дифференциала аннулирует знак интеграла.

Например, $d\int \cos 2x\,dx = \cos 2x\,dx$, $d\int 3t\,dt = 3t\,dt$ и т. д.

5. *Неопределенный интеграл от дифференциала (производной) некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной C*, т. е.

$$\int dF(x) = F(x) + C \quad \text{или} \quad \int F'(x)\,dx = F(x) + C.$$

Действительно, $dF(x) = f(x)\,dx$. Возьмем интеграл от обеих частей равенства и получим $\int dF(x) = \int f(x)\,dx$. Но, по определению, $\int f(x)\,dx = F(x) + C$, т. е. $\int dF(x) = F(x) + C$.

Например, $\int d(x^3) = x^3 + C$, $\int d(\cos x) = \cos x + C$ и т. д.

На основании этого свойства выводятся формулы интегрирования.

§ 3. Основные табличные интегралы

Основные формулы интегрирования
Интегрирование по формуле I
Интегрирование по формуле II
Интегрирование по формулам III и IV
Интегрирование по формулам V и VI
Интегрирование по формулам VII и VIII
Интегрирование по формулам IX и X

1. Основные формулы интегрирования

Из определения интеграла следует, что для того чтобы проинтегрировать функцию, нужно найти ее первообразную. Для ряда функций это легко сделать, используя соответствующую формулу дифференцирования.

Например, мы знаем, что $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; отсюда следует, что $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

Итак, формулы интегрирования получаются обращением соответствующих формул дифференцирования. Выпишем в таблицу основные интегралы.

I. $\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ при $n \neq -1$.	II. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$.
III. $\int e^x dx = e^x + C$.	IV. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$.
V. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$.	VI. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$.
VII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.	VIII. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$.
IX. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.	X. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$.

Интегралы, приведенные в этой таблице, называются *табличными интегралами*.

Для вывода этих формул, как уже отмечалось, используется свойство 5 неопределенного интеграла, а именно дифференцирование правой части равенства. Производная правой части равенства дает подынтегральную функцию, а дифференциал — подынтегральное выражение.

Формула I справедлива при любом n, кроме $n = -1$, так как в этом случае знаменатель обращается в нуль и выражение теряет смысл. Для доказательства найдем производную правой части равенства:

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right)' = \frac{(n+1)x^n}{n+1} = x^n.$$

Мы получили подынтегральную функцию; следовательно, формула верна.

Случаю $n = -1$ соответствует формула II:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C.$$

Чтобы найти $\int \frac{dx}{x}$, заметим, что функция $\frac{1}{x}$ непрерывна в промежутках $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$, причем в каждом из них она имеет первообразную.

В промежутке $(0, \infty)$ этой первообразной, очевидно, является функция $\ln x$, так как $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, т. е. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ при $x \in \in (0, \infty)$.

В промежутке $(-\infty), 0)$ первообразной по отношению к $\frac{1}{x}$

является $\ln(-x)$, т. е. $\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C$ при $x \in (-\infty, 0)$. Действительно, $\ln(-x)$ существует при $x < 0$ и $(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = = \frac{1}{x}$.

Итак, оба промежутка непрерывности подынтегральной функции объединяются записью $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Справедливость всех остальных табличных интегралов легко проверить, если продифференцировать их правые части.

Вычисление интегралов способом приведения их к табличным с помощью преобразования подынтегрального выражения и применения свойств 2 и 3 неопределенного интеграла называется *непосредственным интегрированием*. При этом полезно запомнить, что $\int dx = x + C$ (формула I при $n=0$).

23. Найти интеграл $\int 3dx$ и сделать проверку.

Решение. Согласно свойству 2 постоянный множитель 3 вынесем за знак интеграла; получим $\int 3dx = 3\int dx = 3x + C$.

Проверка: $d(3x+C) = 3dx$. Так как получено подынтегральное выражение, то интеграл найден правильно.

2. Интегрирование по формуле I

На практике чаще всего приходится интегрировать степенную функцию, т. е. применять формулу I.

24—123. Найти интегралы и проверить результаты дифференцированием.

24. $\int x^4\,dx$.

Решение. Применим формулу I при $n = 4$:

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + C = \frac{1}{5}x^5 + C.$$

Проверка: $d\left(\frac{1}{5}x^5 + C\right) = \frac{1}{5}\cdot 5x^4 dx = x^4 dx$. Получили подынтегральное выражение; следовательно, интеграл найден верно.

25. $\int x^6\,dx$. **26.** $\int x^k\,dx$.

27. $\int \frac{dx}{x^2}$. **28.** $\int \frac{dx}{x^5}$.

29. $\int x^{2/3}dx$.

Решение. $\int x^{2/3}dx = \frac{x^{2/3+1}}{2/3+1} + C = \frac{x^{5/3}}{5/3} + C = \frac{3}{5}x^{5/3} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + + C$.

Проверка: $d\left(\frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + C\right) = d\left(\frac{3}{5}x^{5/3} + C\right) = \frac{3}{5}\cdot\frac{5}{3}x^{5/3-1}dx = = x^{2/3}dx$, т. е. интеграл найден верно.

30. $\int \sqrt{x}\,dx.$ **31.** $\int \sqrt[3]{x^2}\,dx.$

32. $\int 8x^3 dx.$

Решение. Применив свойство 2 и формулу I, получим

$$\int 8x^3 dx = 8\int x^3 dx = 8\cdot\frac{x^4}{4} + C = 2x^4 + C.$$

Проверка: $d(2x^4+C) = 2\cdot 4x^3 dx = 8x^3 dx$. Решение выполнено правильно.

33. $\int 5t^4 dt.$ **34.** $\int 4x^7 dx.$

35. $\int (5x^3 - 2x^2 + 3x - 8)\,dx.$

Решение. Применяя свойства 2 и 3, а затем формулу I, получим

$$\int (5x^3 - 2x^2 + 3x - 8)dx = 5\int x^3 dx - 2\int x^2 dx + 3\int x\,dx - 8\int dx =$$
$$= 5\cdot\frac{x^4}{4} - 2\cdot\frac{x^3}{3} + 3\cdot\frac{x^2}{2} - 8x + C = \frac{5}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 8x + C.$$

Здесь C — алгебраическая сумма четырех произвольных постоянных слагаемых, являющихся составной частью каждого интеграла.

Продифференцировав этот результат, получим подынтегральное выражение, т. е. решение верное.

36. $\int (4x^3 - 15x^2 + 14x - 3)dx.$ **37.** $\int (6x^3 - 3x^2 + 2x - 5)\,dx.$

38. $\int (4ax^3 - 6bx^2 - 4cx + e)\,dx.$ **39.** $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x})\,dx.$

Решение. $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x})dx = \int x^{2/3}dx + \int x^{1/2}dx = \frac{3x^{5/3}}{5} + \frac{2x^{3/2}}{3} + C = \frac{3}{5}x\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C.$

40. $\int \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{5}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{a^3}\right)dx.$

41. $\int \left(x^{-5} + \frac{3}{x^2} - \frac{1}{4x^3} - \frac{2}{a^2}\right)dx.$

42. $\int (2x-1)^3 dx.$

Решение. $\int (2x-1)^3 dx = \int (8x^3 - 12x^2 + 6x - 1)\,dx = 8\int x^3 dx - 12\int x^2 dx + 6\int x\,dx - \int dx = 2x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + C$. Дифференцированием результата легко убедиться, что решение верное.

43. $\int x^3(1+5x)\,dx.$ **44.** $\int (x-2)^3 dx.$

45. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x}dx.$

Решение. $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x}dx = \frac{3}{2}\int x^2 dx - \int x\,dx + \frac{5}{2}\int dx = \frac{3}{2}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{5x}{2} + C = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + C.$

46. $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x}dx.$ **47.** $\int \frac{4x^4 - 2x^3 + x^2}{x^2}dx.$

Замечание. Следует иметь в виду, что разные способы интегрирования одной и той же функции иногда приводят к функциям, различным по своему виду. Это кажущееся противоречие можно устранить, если показать, что разность между полученными функциями есть постоянная величина.

Например,

$$\int(2x+2)\,dx=\int 2x\,dx+2\int dx=x^2+2x+C.$$

Найдем этот интеграл другим способом:

$$\int(2x+2)dx=2\int(x+1)dx=2\int(x+1)\,d(x+1)=(x+1)^2+C.$$

Результаты имеют различный вид, однако легко проверить, что они отличаются на постоянную величину, равную 1, и, значит, оба ответа верны.

3. Интегрирование по формуле II

48. $\int\frac{2dx}{x}$.

Решение. Применяя свойство 2 и формулу II, находим

$$\int\frac{2dx}{x}=2\int\frac{dx}{x}=2\ln|x|+C.$$

Проверка: $d(2\ln x+C)=2\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{2dx}{x}$. Получили подынтегральное выражение; следовательно, интеграл найден верно.

49. $\int 5x^{-1}\,dx$. **50.** $\int\frac{dx}{ax}$.

51. $\int\frac{x^3+1}{x}dx$.

Решение. Разделив числитель почленно на x, представим подынтегральную функцию в виде суммы двух дробей:

$$\int\frac{x^3+1}{x}dx=\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx.$$

Разобьем последний интеграл на сумму двух интегралов и применим формулы I и II. Тогда получим

$$\int\left(x^2+\frac{1}{x}\right)dx=\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx=\frac{x^3}{3}+\ln|x|+C.$$

Продифференцировав результат, легко убедиться, что решение верно.

52. $\int\frac{x^2+x+5}{2x}dx$. **53.** $\int\frac{x^3-2x^2-3x-4}{x^2}dx$.

54. $\int\frac{(3x+1)^2}{x}dx$.

Решение. $\int\frac{(3x+1)^2}{x}dx=\int\frac{9x^2+6x+1}{x}dx=9\int x\,dx+6\int dx+\int\frac{dx}{x}=$
$=9\cdot\frac{x^2}{2}+6x+\ln|x|+C=4{,}5x^2+6x+\ln|x|+C.$

55. $\int\left(\frac{2+x}{x}\right)^2 dx$. 56. $\int\frac{(2x-1)^2}{x}dx$.

57. $\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}$.

Решение. Подынтегральное выражение $\frac{2x}{1+x^2}$ есть дробь, числитель которой является дифференциалом знаменателя: $d(1+x^2)=$ $=2x\,dx$. Тогда получим

$$\int\frac{2x\,dx}{1+x^2}=\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=\ln(1+x^2)+C.$$

Здесь снова использована формула II. Знак абсолютной величины не пишем, так как при любом значении x справедливо неравенство $1+x^2>0$.

58. $\int\frac{dx}{1+x}$. 59. $\int\frac{dx}{x+a}$.

60. $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$. 61. $\int\frac{2x}{x^2+5}dx$.

62. $\int\frac{x^2dx}{x^3+5}$. 63. $\int\frac{x^3dx}{x^4+2}$.

Замечание. При выполнении интегрирования нужно твердо помнить, что применение табличных интегралов возможно только тогда, когда под знаком дифференциала стоит выражение, отвечающее определенным требованиям. Так, при использовании формулы I под знаком дифференциала должно быть основание степени, при применении формулы II в числителе должен находиться дифференциал знаменателя и т. д.

Например:

$$\int(5-x^3)x^2dx=-\frac{1}{3}\int(5-x^3)d(5-x^3)=-\frac{(5-x^3)^2}{6}+C;$$

$$\int \operatorname{tg}x\,dx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

4. Интегрирование по формулам III и IV

Справедливость формул III и IV, т. е.

$$\int e^x dx=e^x+C \quad \text{и} \quad \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C,$$

легко проверяется дифференцированием их правых частей:

$$d(e^x+C)=e^x dx;\quad d\left(\frac{a^x}{\ln a}+C\right)=\frac{a^x\ln a}{\ln a}dx=a^x dx.$$

Отметим, что формула III является частным случаем формулы IV при $a=e$.

64. $\int(x^5+3e^x)dx$.

Решение. $\int(x^5+3e^x)dx=\int x^5dx+3\int e^x dx=\frac{1}{6}x^6+3e^x+C$.

Здесь были применены свойства 3 и 2 (разложение на сумму интегралов и вынесение постоянного множителя за знак интеграла), а затем для первого интеграла формула I, для второго — формула III.

Проверка: $d\left(\frac{1}{6}x^6+3e^x+C\right)=(x^5+3e^x)dx.$

65. $\int(e^x+5x)dx.$ **66.** $\int(2e^x+4x^3)dx.$

67. $\int(x^3+2^x)dx.$

Решение. $\int(x^3+2^x)dx=\int x^3dx+\int 2^xdx=\frac{1}{4}x^4+\frac{2^x}{\ln 2}+C.$ Так как продифференцировав результат, получим подынтегральное выражение, то решение верное.

68. $\int(2x-4^x)dx.$ **69.** $\int(7x^6+5^x+4e^x)dx.$

70. $\int b^xdx.$ **71.** $\int\left(\frac{2}{x}+8e^x+5^x-x^{-3/5}\right)dx.$

72. $\int e^{3x}dx.$

Решение. Согласно сделанному ранее замечанию, под знаком дифференциала должен стоять показатель степени, но $d(3x)=3dx$. Следовательно, необходимо добавить множитель $1/3$. Тогда получим

$$\int e^{3x}dx=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}+C.$$

73. $\int e^{-x}dx.$ **74.** $\int xe^{-x^2}dx.$

5. Интегрирование по формулам V и VI

Справедливость формул V и VI, т. е.

$$\int\sin x\,dx=-\cos x+C \quad \text{и} \quad \int\cos x\,dx=\sin x+C,$$

также проверяется дифференцированием их правых частей:

$$d(-\cos x+C)=-(-\sin x)dx=\sin x\,dx,\quad d(\sin x+C)=\cos x\,dx.$$

75. $\int 2\sin x\,dx.$

Решение. Непосредственно по формуле V находим

$$\int 2\sin x\,dx=2\int\sin x\,dx=-2\cos x+C.$$

76. $\int\left(5x^3-\frac{8}{x}-\sin x\right)dx.$ **77.** $\int(3e^u-2\sin u)du.$

78. $\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx.$

Решение. Применяя формулу $\sin 2x=2\sin x\cos x$, получим

$$\int\frac{\sin 2x}{\cos x}dx=\int\frac{2\sin x\cos x}{\cos x}dx=2\int\sin x\,dx=-2\cos x+C.$$

79. $\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2dx.$

Решение. Имеем

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$=\int(1+\sin x)dx=\int dx+\int\sin x\,dx=x-\cos x+C.$$

Здесь мы применили формулы $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; $2\sin\alpha\cos\alpha=\sin 2\alpha$.

80. $\int 5\cos x\,dx$.

Решение. Используя формулу VI, находим

$$\int 5\cos x\,dx=5\int\cos x\,dx=5\sin x+C.$$

81. $\int(7x^2+3\cos x-\sqrt[3]{x})dx$.

Решение. $\int(7x^2+3\cos x-\sqrt[3]{x})dx=7\int x^2\,dx+3\int\cos x\,dx-\int x^{1/3}dx=$ $=\frac{7x^3}{3}+3\sin x-\frac{3x^{4/3}}{4}+C=\frac{7}{3}x^3+3\sin x-\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}+C.$

82. $\int\frac{\sin 2x}{\sin x}dx$.

83. $\int\left(\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}\right)dx$.

84. $\int\sin^2\frac{x}{2}dx$.

85. $\int(\sin x+\cos x+e^x)dx$.

86. $\int(2\sin x+3\cos x)dx$.

87. $\int(x^3+2^x+3\sin x+3\cos x)dx$.

88. $\int\cos 5x\,dx$.

Решение. Согласно сделанному ранее замечанию, под знаком дифференциала должен находиться аргумент подынтегральной функции. Следовательно,

$$\int\cos 5x\,dx=\frac{1}{5}\int\cos 5x\;d(5x)=\frac{1}{5}\sin 5x+C.$$

89. $\int\sin\frac{x}{2}dx$.

Решение. $\int\sin\frac{x}{2}dx=2\int\sin\frac{x}{2}d\left(\frac{x}{2}\right)=-2\cos\frac{x}{2}+C.$

90. $\int\sin(-4x)dx$. **91.** $\int\cos 3x\,dx$.

92. $\int\cos(5-2x)dx$. **93.** $\int x\sin x^2\,dx$.

6. Интегрирование по формулам VII и VIII

Справедливость формул VII и VIII, а именно

$$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+C \quad\text{и}\quad \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+C,$$

проверяется дифференцированием их правых частей:

$$d(\operatorname{tg}x+C)=\frac{1}{\cos^2 x}dx;\quad d(-\operatorname{ctg}x+C)=\frac{1}{\sin^2 x}dx.$$

94. $\int\frac{3dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Непосредственно по формуле VII находим

$$\int \frac{3dx}{\cos^2 x} = 3\int \frac{dx}{\cos^2 x} = 3\operatorname{tg} x + C.$$

95. $\int \frac{dx}{5\cos^2 x}$. 96. $\int \frac{du}{3\sin^2 u}$.

97. $\int \frac{\cos^2 x + 3}{\cos^2 x} dx$. 98. $\int \frac{4 + \cos^3 x}{\cos^2 x} dx$.

99. $\int \operatorname{tg}^2 x\, dx$. 100. $\int \left(5^x - \frac{1}{x^5} + \frac{3}{\cos^2 x}\right) dx$.

101. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx$.

Решение. Применяя формулу $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$, получим

$$\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx =$$

$$= \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int \frac{dx}{\cos^2 x} = -\operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x + C.$$

102. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x}$ · 103. $\int \frac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x} dx$.

104. $\int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx$.

Решение. $\int \frac{3 - 2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{3}{\cos^2 x} - \frac{2}{\sin^2 x}\right) dx = 3\operatorname{tg} x + 2\operatorname{ctg} x + C$.

105. $\int \frac{2\sin^3 x + 3}{\sin^2 x} dx$. 106. $\int \frac{\sin^4 x}{\sin^2 2x} dx$.

107. $\int \frac{dx}{\cos^2(2x+1)}$.

Решение. В силу сделанного ранее замечания под знаком дифференциала должен стоять аргумент. Так как $d(2x+1) = 2dx$, то $dx = \frac{1}{2} d(2x+1)$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\cos^2(2x+1)} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x+1)}{\cos^2(2x+1)} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}(2x+1) + C.$$

108. $\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{1}{5}x - 4\right)}$.

Решение. Так как $d\left(\frac{1}{5}x - 4\right) = \frac{1}{5}dx$, то $dx = 5d\left(\frac{1}{5}x - 4\right)$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{\sin^2\left(\frac{1}{5}x - 4\right)} = 5\int \frac{d\left(\frac{1}{5}x - 4\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{5}x - 4\right)} = -5\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{5}x - 4\right) + C.$$

109. $\int \frac{dx}{\sin^2 6x}$. 110. $\int \frac{dx}{2\cos^2 5x}$.

111. $\int \frac{x^2 dx}{\cos^2 x^3}$. **112.** $\int \frac{dx}{\cos^2(1-x)}$.

113. $\int \frac{x\,dx}{\sin^2(x^2+1)}$. **114.** $\int \frac{x^4 dx}{\cos^2(x^5+2)}$.

115. $\int \sin x \cos x\, dx$.

Решение. Проинтегрируем, применяя различные приемы преобразования подынтегрального выражения:

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2} 2\sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \sin 2x\, d(2x) =$$

$$= -\frac{1}{4}\cos 2x + C;$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int \sin x\, d(\sin x) = \frac{1}{2}\sin^2 x + C;$$

$$\int \sin x \cos x\, dx = -\int \cos x\, d(\cos x) = -\frac{1}{2}\cos^2 x + C.$$

Может показаться, что для одного и того же интеграла получено три различных ответа: $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$; $\frac{1}{2}\sin^2 x + C$; $-\frac{1}{2}\cos^2 x + C$. Однако это не так. Легко убедиться в том, что любые из ответов отличаются друг от друга только на постоянную величину. Проверьте это самостоятельно.

7. Интегрирование по формулам IX и X

Справедливость формул IX и X, т. е.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C \quad \text{и} \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C,$$

проверяется дифференцированием их правых частей:

$$d(\arcsin x + C) = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}; \quad d(\operatorname{arctg} x + C) = \frac{dx}{1+x^2}.$$

116. $\int \frac{2dx}{3\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Применяя свойство 2 и формулу X, находим

$$\int \frac{2dx}{3\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2}{3}\arcsin x + C.$$

Продифференцировав результат, получим подынтегральное выражение. Следовательно, решение верное.

117. $\int \frac{2\sqrt{1-x^2}}{3-3x^2}dx$. **118.** $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{(1-x)(1+x)}dx$.

119. $\int \frac{x^2 dx}{x^2+1}$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{x^2dx}{x^2+1} = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int \frac{x^2+1}{x^2+1}dx - \int \frac{dx}{x^2+1} =$$
$$= \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \operatorname{arctg} x + C.$$

Здесь мы преобразовали числитель: $x^2 = x^2 + 1 - 1$, а затем использовали свойство 3 и формулы I и X.

120. $\int\left(\frac{2}{1+x^2} - \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx.$ **121.** $\int \frac{(1+2x^2)dx}{x^2(1+x^2)}.$

122. $\int \frac{1+x^2+3\cos^2 x}{(1+x^2)\cos^2 x}dx.$ **123.** $\int \frac{x^4dx}{1+x^2}.$

§ 4. Приложения неопределенного интеграла

Нахождение первообразной по начальным условиям

Выделение из семейства кривых с одинаковым наклоном линии, проходящей через конкретную точку

Составление уравнения движения тела по заданному уравнению скорости или ускорения его движения

1. Нахождение первообразной по начальным условиям

Как известно, при интегрировании функции получается совокупность ее первообразных. Для выделения из всей совокупности конкретной первообразной задают дополнительные данные, так называемые начальные условия.

При решении таких задач используют следующий алгоритм:

1^0. Находят неопределенный интеграл от заданной функции.

2^0. Вычисляют величину C, подставляя начальные условия в полученную совокупность первообразных для заданной функции.

3^0. Находят искомую первообразную, заменяя в совокупности первообразных постоянную интегрирования ее вычисленным значением.

124. Найти функцию, производная которой равна $3t^2-2t+1$, если известно, что при $t=2$ функция принимает значение, равное 25.

Решение. 1^0. Из условия следует, что искомая функция является первообразной функции $3t^2-2t+1$; поэтому, взяв неопределенный интеграл от $3t^2-2t+1$, найдем все первообразные указанной функции:

$$\int(3t^2-2t+1)dt = 3\int t^2dt - 2\int t\,dt + \int dt = t^3 - t^2 + t + C.$$

2^0. Из полученного выражения t^3-t^2+t+C, определяющего все первообразные функции $3t^2-2t+1$, найдем теперь искомую первообразную функцию. Используя дополнительное условие (значение искомой функции равно 25 при $t=2$), найдем определенное значение постоянной интегрирования C; имеем $2^3-2^2+2+C=25$, откуда $C=19$.

3^0. Итак, искомая функция имеет вид $y=t^3-t^2+t+19$.

125. Найти функцию $F(x)$, производная которой $F'(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}$, а $F(0)=1$.

126. Найти функцию, обращающуюся в нуль при $x=0$, если производная этой функции имеет вид $y'=3x^2-4x+5$.

127. Найти функцию, дифференциал которой равен $(5x+2)dx$, зная, что при $x=2$ функция принимает значение, равное 20.

128. Найти $\int(\cos x-\sin x)dx$, если при $x=\pi/2$ первообразная равна 6.

2. Выделение из семейства кривых с одинаковым наклоном линии, проходящей через конкретную точку

Под наклоном кривой понимают тангенс угла наклона касательной к этой кривой в данной точке.

Из дифференциального исчисления известно, что наклон k кривой $y=f(x)$ (угловой коэффициент касательной) в точке с абсциссой x равен значению производной в этой точке, т. е. $k=y'$.

Рассмотрим теперь обратную задачу: зная наклон k кривой в любой ее точке как функцию абсциссы этой точки, т. е. зная, что $k=f(x)$, найти уравнение кривой.

Так как $k=y'=\frac{dy}{dx}$, то $\frac{dy}{dx}=f(x)$, т. е. $dy=f(x)dx$, откуда интегрированием найдем $y=\int f(x)dx$. Вычислив этот неопределенный интеграл, получим уравнение $y=F(x)+C$, содержащее произвольную постоянную C. Очевидно, этому уравнению на плоскости соответствует бесконечное множество кривых (семейство кривых), уравнения которых отличаются друг от друга только постоянными слагаемыми.

Графики функций, получающихся в результате интегрирования, называются *интегральными кривыми*. Каждый интеграл дает семейство интегральных кривых. Интегральные кривые одного семейства имеют одну и ту же форму и смещены друг относительно друга по вертикали. Сдвиг кривой определяется постоянной C. Из семейства этих кривых, имеющих один и тот же наклон, нам нужно уметь выделять ту, которая проходит через данную точку (рис. 137).

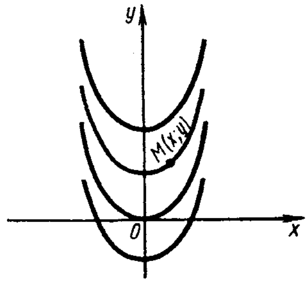

Рис. 137

129. Составить уравнение кривой, проходящей через точку (3; 4), если угловой коэффициент касательной к этой кривой в любой ее точке $(x;\ y)$ равен x^2-2x.

Решение. 1^0. Нам известно, что

$k=\operatorname{tg}\alpha=\frac{dy}{dx}$. В данном случае имеем $\frac{dy}{dx}=x^2-2x$; $dy=(x^2-2x)dx$.

В результате интегрирования получаем $y=\int(x^2-2x)dx$, т. е.

$$y=\frac{1}{3}x^3-x^2+C. \qquad (1)$$

2^0. Теперь из найденного семейства кривых выделим ту кривую, которая проходит через данную точку (3; 4). Для этого подставим в уравнение (1) вместо x и y координаты данной точки. Имеем $4=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2+C$, т. е. $C=4$.

3^0. Через данную точку проходит та из кривых семейства (1), для которой $C=4$, т. е. $y=\frac{1}{3}x^3-x^2+4$.

130. Из семейства кривых, имеющих наклон, равный $2x$, выделить ту, которая проходит через точку (3; 5).

131. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (1; 4), если угловой коэффициент касательной в каждой точке кривой задается функцией $3x^2$.

132. Найти уравнение кривой, проходящей через точку (2; 3), зная, что угловой коэффициент касательной к кривой, проведенной в любой ее точке, равен x^2-1.

133. Из семейства кривых, имеющих наклон, равный $3x^2-2x$, выделить ту, которая проходит через точку (1; 4).

134. На промежутке $(0, \infty)$ найти такую первообразную функции $f(x)=1/x^2$, график которой проходит через точку (1; 3).

3. Составление уравнения движения тела по заданному уравнению скорости или ускорения его движения

Из дифференциального исчисления известно, что $v=s'(t)$ и $a(t)=v'(t)=s''(t)$, где $s(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ — соответственно путь, скорость и ускорение движущегося тела. Тогда закон движения тела по заданной скорости можно найти интегрированием, а по заданному ускорению — двукратным интегрированием.

135. Скорость прямолинейного движения точки задана уравнением $v=t^2-8t+3$. Найти уравнение движения точки.

Решение. 1^0. Известно, что скорость прямолинейного движения тела равна производной пути s по времени t, т. е. $v=\frac{ds}{dt}$, откуда $ds=v\,dt$. Тогда имеем $ds=(t^2-8t+3)dt$.

2^0. Чтобы найти уравнение движения, проинтегрируем обе части полученного равенства:

$$\int ds=\int(t^2-8t+3)dt;\quad s=\frac{1}{3}t^3-4t^2+3t+C.$$

Это искомое уравнение.

В следующих задачах данного раздела рассматривается прямолинейное движение.

136. Скорость тела задана уравнением $v=6t^2+1$. Найти уравнение движения, если за время $t=3$ с тело прошло путь $s=60$ м.

Решение. 1^0. Имеем $ds=v\,dt=(6t^2+1)dt$; тогда $s=\int(6t^2+1)dt=$ $=2t^3+t+C$.

2^0. Подставив в найденное уравнение начальные условия $s=60$ м, $t=3$ с, получим $60=2\cdot3^3+3+C$, откуда $C=3$.

3^0. Искомое уравнение примет вид $s=2t^3+t+3$.

137. Тело движется со скоростью $v=(3t^2-1)$ м/с. Найти закон движения $s(t)$, если в начальный момент тело находилось на расстоянии 5 см от начала отсчета.

Решение. 1^0. Так как $ds=v\,dt=(3t^2-1)dt$, то $s=\int(3t^2-1)dt=$ $=t^3-t+C$.

2^0. Из условия следует, что если $t=0$, то $s=5$ см $=0{,}05$ м. Подставив эти данные в полученное уравнение, имеем $s=t^3-t+C$, откуда $0{,}05=C$.

3^0. Тогда искомое уравнение примет вид $s=t^3-t+0{,}05$.

138. Уравнение скорости движущейся точки имеет вид $v=$ $=2t-3$. Найти уравнение движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь 6 м.

139. Скорость движения тела задана уравнением $v=t^2-t+3$. Найти уравнение движения, если в начальный момент времени $s_0=3$ м.

140. Найти уравнение движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь $s_0=4$ м, а ее скорость задана уравнением $v=t^2-6t+7$.

141. Скорость движения тела пропорциональна квадрату времени. Найти уравнение движения тела, если известно, что за 3 с оно прошло 18 м.

142. Тело, находившееся в начальный момент в покое, падает с постоянным ускорением g. Найти закон движения.

Решение. 1^0. Известно, что ускорение прямолинейно движущегося тела есть производная скорости v по времени t. Следовательно, $g=\frac{dv}{dt}$, т. е. $dv=g\,dt$. Отсюда после интегрирования находим

$$v=\int g\,dt=g\int dt=gt+C.$$

2^0. Используя начальные условия $v=0$ при $t=0$, находим $C_1=0$.

3^0. Таким образом, уравнение скорости движения имеет вид $v=gt$.

4^0. Теперь воспользуемся тем, что скорость тела есть производная пути s по времени t, т. е. $v=\frac{ds}{dt}$. Так как $v=gt$, то $\frac{ds}{dt}=gt$ или $ds=gt\,dt$. Интегрируя, находим

$$\int ds=\int gt\,dt,\quad s=\frac{gt^2}{2}+C_2.$$

5^0. Используя начальные условия $s=0$ при $t=0$, получим $C_2=0$.

6^0. Итак, уравнение движения свободно падающего тела имеет вид $s=\frac{gt^2}{2}$.

143. Тело движется с ускорением $a=(t^2+1)$ м/с². Найти закон движения тела, если в момент $t=1$ с скорость $v=2$ м/с, а путь $s=4$ м.

Решение. Эта задача также решается в два этапа. Сначала нужно найти $v(t)$, зная, что $a=v'(t)$, а затем найти $s(t)$, зная, что $v=s'(t)$.

1^0. Имеем $dv=a\,dt=(t^2+1)dt$, откуда

$$v=\int(t^2+1)dt=\frac{1}{3}t^3+t+C_1.$$

2^0. Используя начальные условия $v=2$ при $t=1$, получим $2=$ $=\frac{1}{3}+1+C_1$, откуда $C_1=\frac{2}{3}$.

3^0. Следовательно, $v=\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}$.

4^0. Имеем $ds=v\,dt=\left(\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}\right)dt$, откуда

$$s=\int\left(\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}\right)dt=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{3}t+C_2.$$

5^0. Используя начальные условия $s=4$ при $t=1$, получим $4=$ $=\frac{1}{12}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+C_2$, откуда $C_2=\frac{11}{4}$.

6^0. Итак, $s=\frac{1}{12}t^4+\frac{1}{2}t^2+\frac{2}{3}t+\frac{11}{4}$.

144. Ускорение движения тела задано уравнением $a=24t^2+8$. Найти закон движения тела, если в момент $t=1$ с скорость тела $v=10$ м/с, а путь $s=12$ м.

145. Тело движется с ускорением $a=12t^2+6t$. Найти уравнение скорости движения и уравнение движения, если в момент $t=1$ с скорость тела $v=8$ м/с, а путь $s=6$ м.

§ 5. Интегрирование подстановкой и по частям

Способ подстановки (замены переменной)
Примеры интегрирования подстановкой
Способ интегрирования по частям

1. Способ подстановки (замены переменной)

Если заданный интеграл с помощью алгебраических преобразований трудно или невозможно свести к одному или нескольким табличным интегралам, то для его отыскания применяют особые способы, одним из которых является способ подстановки (замены переменной).

Заметим, что все способы интегрирования имеют целью свести данный интеграл к табличному с помощью тех или иных искусственных приемов.

Способ подстановки заключается в следующем: заменяют новой переменной такую часть подынтегральной функции, при дифференцировании которой получается оставшаяся часть подынтегрального выражения (не считая постоянного множителя, на который всегда можно умножить и разделить подынтегральное выражение).

Например, в интеграле $\int \sin x \cos x\, dx$ удобно произвести замену $t=\sin x$, так как оставшаяся часть подынтегрального выражения равна $\cos x\, dx = dt$. Тогда перепишем данный интеграл в виде

$$\int \sin x \cos x\, dx = \int t\, dt.$$

Полученный интеграл является табличным; он находится по формуле I:

$$\int t\, dt = \frac{1}{2}t^2 + C.$$

Далее, произведя обратную замену $t=\sin x$, получим ответ:

$$\frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

Решение этого примера можно кратко оформить так:

$$\int \sin x \cos x\, dx = \left| \begin{matrix} t=\sin x \\ dt=\cos x\, dx \end{matrix} \right| = \int t\, dt = \frac{1}{2}t^2 + C = \frac{1}{2}\sin^2 x + C.$$

Напомним, что если при интегрировании одной и той же функции разными способами получили различные результаты, то необходимо показать, что они отличаются на постоянную величину.

Так, рассмотренный выше пример можно решить иначе, если применить формулу $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$. Тогда получим

$$\int \sin x \cos x\, dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Результат по виду отличается от найденного ранее; однако, преобразуя первый результат, имеем

$$\frac{1}{2}\sin^2 x + C = \frac{1}{4}(1-\cos 2x) + C = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 2x + C.$$

Отсюда видно, что разность функций равна $\frac{1}{4}$, т. е. постоянному числу.

Следует иметь в виду, что мы уже встречались с простейшими случаями подстановок, только выполняли их в другом оформлении записи (см. примеры 88, 89, 107, 108).

2. Примеры интегрирования подстановкой

Естественно возникает вопрос: как правильно выбрать подстановку? Это достигается практикой в интегрировании. Все же можно установить ряд общих правил и некоторых приемов для частных случаев интегрирования.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1°. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2°. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3°. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4°. Производят замену под интегралом.

5°. Находят полученный интеграл.

6°. В результате производят обратную замену, т. е. переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

Частные приемы будут рассмотрены по ходу решения примеров.

146—206. Найти неопределенные интегралы способом подстановки:

146. $\int(2x+3)^4dx$.

Решение. $\int(2x+3)^4dx=\left|\begin{array}{l} z=2x+3, \\ dz=2dx, \\ dx=\frac{1}{2}dz \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int z^4dz=0{,}1z^5+C=$

$=0{,}1(2x+3)^5+C$.

Проверка: $d(0{,}1(2x+3)^5+C)=0{,}5(2x+3)^4(2x)'dx=(2x+3)^4dx$.

147. $\int(7-2t)^3dt$. **148.** $\int(5u-1)^3du$.

149. $\int(1+x^5)^7x^4dx$. **150.** $\int(9-2x^3)^4x^2dx$.

151. $\int\sqrt{x+1}\,dx$.

Решение. $\int\sqrt{x+1}\,dx=\left|\begin{array}{l} z=x+1, \\ dz=dx \end{array}\right|=\int\sqrt{z}dz=\int z^{1/2}dz=\frac{2}{3}z^{3/2}+$

$+C=\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C$.

Проверка: $d\left(\frac{2}{3}(x+1)\sqrt{x+1}+C\right)=d\left(\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C\right)=\frac{2}{3}\times$

$\times\frac{3}{2}(x+1)^{1/2}dx=\sqrt{x+1}\,dx$.

152. $\int\sqrt[3]{(3x+1)^2}\,dx$. **153.** $\int\sqrt[4]{5u+6}\,du$.

154. $\int\sqrt[3]{3x+5}\,dx$. **155.** $\int\frac{dx}{(3t-1)^3}$.

156. $\int\sqrt{1+x^3}\,x^2dx$.

Решение. $\int\sqrt{1+x^3}\,x^2dx=\left|\begin{array}{l}1+x^3=z,\\ x^2dx=\frac{1}{3}dz\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int z^{1/2}dz=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}z^{3/2}+$
$+C=\frac{2}{9}z^{3/2}+C=\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}+C=\frac{2}{9}(1+x^3)\sqrt{1+x^3}+C.$

Проверка: $d\left(\frac{2}{9}(1+x^3)^{3/2}+C\right)=\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{2}(1+x^3)^{1/2}\cdot 3x^2dx=$
$=\sqrt{1+x^3}\,x^2dx.$

157. $\int(2x^3+1)^4x^2\,dx$. **158.** $\int 4(t^4+5)^2t^3\,dt$.

159. $\int\sqrt{2x^2+1}\,x\,dx$. **160.** $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx$.

161. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{l}t=1-x^2,\\ dt=-2x\,dx,\\ x\,dx=-\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}=-\frac{1}{2}\int t^{-1/2}dt=$

$=-\frac{1}{2}\cdot 2t^{1/2}+C=-\sqrt{t}+C=-\sqrt{1-x^2}+C.$

162. $\int 3\sqrt{u^3-1}\,u^2du$. **163.** $\int 2\sqrt{t^4-3}\,t^3dt$.

164. $\int\frac{t\,dt}{\sqrt{t^2+1}}$. **165.** $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$.

166. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

Решение. $\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\left|\begin{array}{l}1+\ln x=t,\\ \frac{1}{x}dx=dx\end{array}\right|=\int\sqrt{t}\,dt=\frac{2}{3}t^{3/2}+C=$

$=\frac{2}{3}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C.$

167. $\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{x-1}}$. **168.** $\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^3}}$.

169. $\int\sin^2x\cos x\,dx$. **170.** $\int e^{\sin^2x}\sin 2x\,dx$.

171. $\int\cos^3x\,dx$.

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию: $\cos^3x=\cos^2x\cdot\cos x=(1-\sin^2x)\cos x$. Далее находим

$$\int\cos^3x\,dx=\int(1-\sin^2x)\cos x\,dx=\left|\begin{array}{l}\sin x=t,\\ \cos x\,dx=dt\end{array}\right|=\int(1-t^2)dt=$$
$$=\int dt-\int t^2dt=t-\frac{1}{3}t^3+C=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3x+C.$$

172. $\int(\cos^3x+1)^2\sin x\,dx$. **173.** $\int 4\sin^3x\,dx$.

174. $\int x^2\cos(4-x^3)dx.$ **175.** $\int x^3\sin 3x^4\,dx.$

176. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$

Решение. $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{array}{l} \sqrt{x}=t, \\ \frac{dx}{2\sqrt{x}}=dt, \\ \frac{dx}{\sqrt{x}}=2dt \end{array} \right| = 2\int \sin t\,dt = -2\cos t + C =$

$= -2\cos\sqrt{x}+C.$

Этот интеграл можно также найти подведением $\sqrt{x}$ под знак дифференциала:

$$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx = 2\int \sin\sqrt{x}\,d(\sqrt{x}) = -2\cos\sqrt{x}+C.$$

177. $\int \sin nx\,dx.$

Решение. $\int \sin nx\,dx = \left| \begin{array}{l} t=nx, \\ dt=ndx, \\ dx=\frac{1}{n}dt \end{array} \right| = \frac{1}{n}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{n}\cos t + C =$

$= -\frac{1}{n}\cos nx + C.$

Итак,

$$\int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx + C. \qquad (1)$$

178. $\int \cos nx\,dx.$

Решение. $\int \cos nx\,dx = \left| \begin{array}{l} t=nx, \\ dt=ndx, \\ dx=\frac{1}{n}dt \end{array} \right| = \frac{1}{n}\int \cos t\,dt = \frac{1}{n}\sin t + C =$

$= \frac{1}{n}\sin nx + C.$

Итак,

$$\int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx + C. \qquad (2)$$

Формулы (1) и (2) полезно запомнить и пользоваться ими как табличными интегралами.

179. $\int \sin 3x\,dx.$

Решение. Имеем $\int \sin 3x\,dx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$

180. $\int \sin^2 x\,dx.$ **181.** $\int \frac{\sqrt{\ln x}\,dx}{x}.$

182. $\int \operatorname{tg} x\,dx.$

Решение. Сначала преобразуем подынтегральную функцию: $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Далее, находим

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \int \frac{\sin x\,dx}{\cos x} = \left| \begin{array}{l} \cos x = z, \\ -\sin x\,dx = dz, \\ \sin x\,dx = -dz \end{array} \right| =$$

$$=-\int\frac{dz}{z}=-\ln|z|+C=-\ln|\cos x|+C.$$

183. $\int\frac{dx}{2x-1}$. **184.** $\int\frac{2dt}{4t-6}$.

185. $\int\frac{x\,dx}{x^2+1}$. **186.** $\int\frac{x^2dx}{1+x^3}$.

187. $\int\frac{dx}{ax+b}$. **188.** $\int\operatorname{ctg}x\,dx$.

189. $\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$. **190.** $\int\frac{\sin 3x\,dx}{2+\cos 3x}$.

191. $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int\frac{dx}{(\arcsin x)^5\sqrt{1-x^2}}=\left|\begin{array}{l}\arcsin x=t,\\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=dt\end{array}\right|=\int\frac{dt}{t^5}=\int t^{-5}dt=$

$=-\frac{1}{4}t^{-4}+C=-\frac{1}{4(\arcsin x)^4}+C.$

192. $\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx$.

Решение. $\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l}\operatorname{arctg}x=t,\\ \frac{1}{1+x^2}dx=dt\end{array}\right|=\int t\,dt=\frac{1}{2}t^2+C=$

$=\frac{1}{2}(\operatorname{arctg}x)^2+C.$

193. $\int\sqrt{\operatorname{arctg}^3x}\frac{dx}{1+x^2}$. **194.** $\int\arcsin^2x\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

195. $\int\frac{e^xdx}{1+e^{2x}}$. **196.** $\int\frac{x^2dx}{1+x^6}$.

197. $\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2x}}$. **198.** $\int\frac{(\arcsin x)^3dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

199. $\int\frac{dx}{a^2+x^2}$.

Решение. Приведем данный интеграл к табличному виду X:

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\int\frac{dx}{a^2\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)}=\frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}.$$

Воспользуемся подстановкой $x=at$; $dx=adt$. Тогда получим

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{a\,dt}{1+t^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}t+C=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$$

Итак,

$$\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}. \qquad (3)$$

200. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Решение. Приведем данный интеграл к табличному виду IX:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}.$$

Используем подстановку $x = at$; $dx = a\,dt$. Следовательно,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{1}{a}\int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

Итак,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) полезно запомнить и пользоваться ими как табличными интегралами.

201. $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$. **202.** $\int \frac{dt}{9+t^2}$.

203. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-x^2}}$. **204.** $\int \frac{dx}{5+x^2}$.

205. $\int \frac{dx}{25+36x^2}$. **206.** $\int \frac{dx}{\sqrt{16-25x^2}}$.

3. Способ интегрирования по частям

При интегрировании функций, содержащих произведения, логарифмы и обратные тригонометрические функции, бывает удобно воспользоваться способом интегрирования по частям.

Выведем формулу интегрирования по частям.

Интегрируя обе части равенства $d(uv) = u\,dv + v\,du$, получим

$$\int d(uv) = \int u\,dv + \int v\,du \quad \text{или} \quad uv = \int u\,dv + \int v\,du,$$

откуда

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du. \qquad (5)$$

С помощью формулы (5) нахождение интеграла $\int u\,dv$ сводится к нахождению интеграла $\int v\,du$, который может оказаться или проще данного, или даже известным.

При практическом использовании формулы интегрирования по частям данное подынтегральное выражение представляют в виде произведения двух сомножителей, которые обозначают u и dv. Множитель u стараются выбрать так, чтобы u' было проще, чем u.

207—220. Применяя формулу интегрирования по частям, найти интегралы:

207. $\int x\cos x\,dx$.

Решение. Интеграл содержит произведение двух функций x и $\cos x$. Способ подстановки не дает возможности найти этот интеграл. Обозначим $x=u$, $\cos x\,dx=dv$; тогда $dx=du$; $v=\sin x$. Применим формулу интегрирования по частям:

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int \sin x\,dx=x\sin x+\cos x+C.$$

Приняв $x=u$, мы получили $u'=1$ и интеграл $\int v\,du$ оказался проще, чем $\int u\,dv$.

Если же в этом интеграле сделать другую замену: $\cos x=u$, $x\,dx=dv$, то легко убедиться, что полученный интеграл окажется сложнее исходного, т. е. замена окажется неудачной. Умение определить целесообразность той или иной замены приходит с приобретением навыка.

208. $\int xe^x dx$.

Решение. $\int xe^x dx=\left|\begin{matrix} u=x, & dv=e^x dx; \\ du=dx, & v=e^x \end{matrix}\right|=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x+C.$

209. $\int x^5\ln x\,dx$. **210.** $\int xe^{2x}dx$.

Иногда формулу интегрирования по частям приходится применять дважды.

211. $\int x^2\sin x\,dx$.

Решение. Имеем

$$\int x^2\sin x\,dx=\left|\begin{matrix} u=x^2, & dv=\sin x\,dx \\ du=2x\,dx, & v=-\cos x \end{matrix}\right|=-x^2\cos x+2\int x\cos x\,dx.$$

Для нахождения полученного в правой части равенства интеграла снова интегрируем по частям:

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x+\cos x+C$$

(см. решение примера 207). В результате получаем окончательный ответ:

$$\int x^2\sin x\,dx=-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x+C.$$

212. $\int \operatorname{arctg} x\,dx$.

Решение. $\int \operatorname{arctg} x\,dx=\left|\begin{matrix} u=\operatorname{arctg} x, & dv=dx; \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2}, & v=x \end{matrix}\right|=x\operatorname{arctg} x-\int\dfrac{x\,dx}{1+x^2}=$

$$=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{1+x^2}=x\operatorname{arctg} x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.$$

213. $\int x\sin x\,dx$. **214.** $\int x\ln x\,dx$.

215. $\int (4x^3+6x-7)\ln x\,dx$. **216.** $\int x\sin 2x\,dx$.

217. $\int x\cos 3x\,dx$. **218.** $\int \ln x\,dx$.

219. $\int \dfrac{\ln x\,dx}{x^2}$. **220.** $\int \dfrac{\ln x\,dx}{x^3}$.

§ 6. Определенный интеграл и его геометрический смысл

Криволинейная трапеция и ее площадь
Вычисление площади криволинейной трапеции
Определение определенного интеграла

1. Криволинейная трапеция и ее площадь

Пусть на отрезке $[a, b]$ дана непрерывная неотрицательная функция $y=f(x)$ (рис. 138). Проведем вертикальные прямые $x=a$, $x=b$ до пересечения с графиком функции $f(x)$.

Определение 1. *Криволинейной трапецией* называется фигура, ограниченная графиком непрерывной неотрицательной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, прямыми $x=a$, $x=b$ и отрезком оси Ox.

Как вычислить площадь криволинейной трапеции? Рассмотрим криволинейную трапецию $CHKD$ (рис. 139), у которой абсцисса точки C равна x, а абсцисса точки D равна $x+\Delta x$. Пусть график функции $f(x)$ пересекает ось ординат в точке A. Тогда площадь криволинейной трапеции $CHKD$ равна разности площадей криволинейных трапеций $OAKD$ и $OAHC$. Так как площадь криволинейной трапеции $OAHC$ зависит от x, то ее можно обозначить символом $S(x)$. Аналогично, площадь криволинейной трапеции $OAKD$ есть функция от $x+\Delta x$ и ее можно обозначить символом $S(x+\Delta x)$. Поэтому площадь криволинейной трапеции $CHKD$ равна разности $S(x+\Delta x)$ и $S(x)$ и может быть обозначена символом $\Delta S(x)$.

Построим два прямоугольника $CHED$ и $CMKD$. Площадь первого из них равна $f(x)\Delta x$, а площадь второго равна $f(x+\Delta x)\Delta x$. Поскольку площадь криволинейной трапеции $CHKD$ не меньше площади прямоугольника $CHED$ и не больше площади прямоугольника $CMKD$, можно записать неравенство

$$f(x)\Delta x \leqslant \Delta S(x) \leqslant f(x+\Delta x)\Delta x.$$

Разделим обе части этого неравенства на Δx и найдем пре-

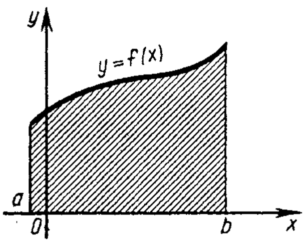

Рис. 138

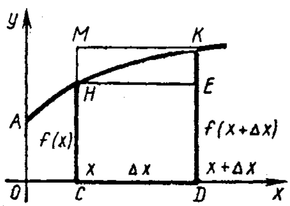

Рис. 139

делы всех выражений при $\Delta x \to 0$. Но $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x}$ есть производная функции $S(x)$, а в силу непрерывности функции $f(x)$ имеем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x+\Delta x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x)$. Следовательно, $S' = f(x)$.

Итак, производная площади криволинейной трапеции равна функции, задающей верхнюю границу трапеции.

Поэтому площадь криволинейной трапеции есть одна из первообразных функции, задающей верхнюю границу трапеции, и может быть вычислена с помощью интегрирования:

$$S = \int f(x)\,dx.$$

Пусть $x \in [a, b]$. Площадь криволинейной трапеции, заштрихованной на рис. 140, есть функция от x. Обозначим ее через $S(x)$. Очевидно, что $S(a) = 0$, так как при $x = a$ заштрихованная фигура превращается в отрезок, а $S(b) = S$ есть площадь рассматриваемой криволинейной трапеции.

Замечание. Когда говорят о непрерывности функции $f(x)$ на промежутке $[a, b]$, то под этим понимают непрерывность ее в каждой точке этого промежутка, в том числе в точках a и b, т. е. что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ при стремлении x к a и $\lim\limits_{x \to b} f(x) = f(b)$ при стремлении x к b.

221. Используя равенство $S'(x) = f(x)$, вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = x^2$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$.

Решение. Пусть $x \in [1, 2]$ (рис. 141). Так как $S'(x) = f(x)$, то $S'(x) = x^2$. Тогда $S(x)$ есть первообразная функции $f(x) = x^2$.

Найдем множество всех первообразных: $S(x) = \frac{x^3}{3} + C$. Значение C можно найти из условия $S(1) = 0$; имеем $0 = \frac{1}{3} + C$, откуда $C = -\frac{1}{3}$.

Таким образом, $S(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3}$.

Полагая $x = 2$, получим площадь данной трапеции:

$$S(2) = \frac{2^3}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

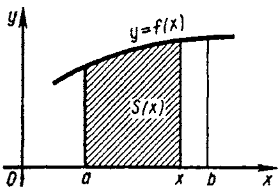

Рис. 140

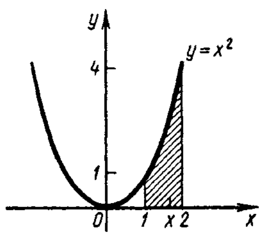

Рис. 141

2. Вычисление площади криволинейной трапеции

Используя равенство $S'(x)=f(x)$, где $f(x)\geqslant 0$ на промежутке $[a, b]$, выведем формулу для вычисления площади криволинейной трапеции (см. рис. 140). Из этого равенства видно, что $S(x)$ есть первообразная для $f(x)$ на промежутке $[a, b]$. Пусть $F(x)$ — другая первообразная для $f(x)$ на этом же промежутке. В силу основного свойства первообразной имеем $S(x)=F(x)+C$.

Последнее равенство верно при всех $x\in[a, b]$, так как функции $S(x)$ и $F(x)$ определены в точках a и b. Подставив вместо x число a, получим $S(a)=F(a)+C$. Но $S(a)=0$, поэтому $0=F(a)+$ $+C$, откуда $C=-F(a)$. Таким образом, $S(x)=F(x)-F(a)$.

Подставив в последнее равенство $x=b$, найдем искомую площадь:

$$S=F(b)-F(a). \qquad (1)$$

222. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x)=1/x$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

Решение. Построим трапецию (рис. 142). Определим первообразную функции $f(x)=1/x$:

$$\int \frac{1}{x}dx=\ln x+C.$$

Одна из первообразных при $C=0$ есть $F(x)=\ln x$. Тогда искомую площадь найдем по формуле (1):

$$S=F(2)-F(1)=\ln 2-\ln 1=\ln 2\approx 0{,}7 \text{ (кв. ед)}.$$

223. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=$ $=2x-x^2$ и $y=0$ (рис. 143).

Решение. Найдем точки пересечения кривой $2x-x^2$ с осью абсцисс: $2x-x^2=0$; $x(2-x)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$. Следовательно, $a=0$, $b=2$.

Найдем первообразную функции $f(x)=2x-x^2$; имеем $F(x)=$ $=\int(2x-x^2)dx=x^2-\frac{1}{3}x^3+C$. При $C=0$ получим $F(x)=x^2-\frac{1}{3}x^3$.

Искомую площадь находим по формуле (1):

$$S=F(b)-F(a)=F(2)-F(0)=4-\frac{8}{3}-0+0=\frac{4}{3} \text{ (кв. ед)}.$$

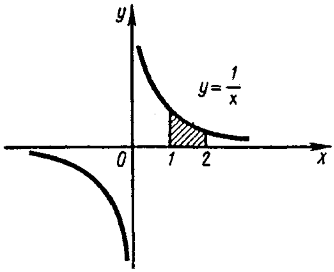

Рис. 142

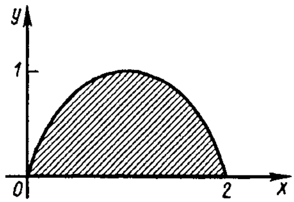

Рис. 143

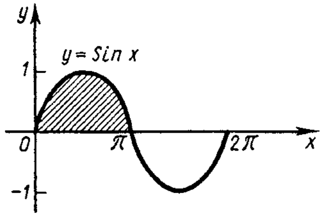

Рис. 144

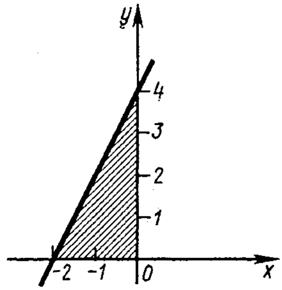

Рис. 145

224. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x$, $x=1$, $x=2$, $y=0$.

225. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями $f(x)=x^2$, $x=1$, $x=3$ и $y=0$.

226. Определить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$ и $y=0$, если x изменяется от 0 до π (рис. 144).

227. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осями координат и прямой $y=2x+4$ (рис. 145).

3. Определение определенного интеграла

Напомним, что приращением аргумента x при его изменении от $x=a$ до $x=b$ называется разность $b-a$, а приращением функции $F(x)$ при изменении аргумента от $x=a$ до $x=b$ называется разность $F(b)-F(a)$.

228. Дана функция $f(x)=2x+4$. Найти приращение любой ее первообразной при изменении x от -2 до 0.

Решение. Найдем первообразную данной функции:

$$F=\int(2x+4)\,dx=x^2+4x+C.$$

Рассмотрим, например, первообразные $F_1=x^2+4x$, $F_2=x^2+4x+2$, $F_3=x^2+4x-1$, вычислив приращение каждой из них на отрезке $[-2, 0]$: $F_1(0)-F_1(-2)=0-(-4)=4$; $F_2(0)-F_2(-2)=2-(-2)=4$; $F_3(0)-F_3(-2)=1-(-5)=4$. Таким образом, приращения этих первообразных равны между собой.

Рассмотрим теперь приращение любой первообразной $F=x^2+4x+C$ на отрезке $[-2, 0]$. Имеем

$$(x^2+4x+C)_{x=0}-(x^2+4x+C)_{x=-2}=4.$$

Следовательно, приращение любой первообразной функции $f(x)=2x+4$ при изменении x от -2 до 0 равно 4, т. е. приращения всех первообразных этой функции равны между собой и не зависят от C.

Найдем приращение любой первообразной функции $f(x)$ при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$:

$$(F(x)+C)_{x=b}-(F(x)+C)_{x=a}=F(b)-F(a).$$

Полученный результат означает, что при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$ все первообразные для данной функции имеют одно и то же приращение, равное $F(b)-F(a)$.

Это приращение принято называть *определенным интегралом*.

Определение 2. Если $F(x)+C$ — первообразная функция для $f(x)$, то приращение $F(b)-F(a)$ первообразных функций при изменении аргумента x от $x=a$ до $x=b$ называется *определенным интегралом* и обозначается символом $\int\limits_a^b f(x)dx$, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a),$$

где a — нижний предел, а b — верхний предел определенного интеграла.

Символ $\int\limits_a^b f(x)dx$ читается так: «определенный интеграл от a до b эф от икс дэ икс».

Функция $f(x)$ предполагается непрерывной в промежутке изменения аргумента x от a до b.

Для вычисления определенного интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ находят:

1) неопределенный интеграл $\int f(x)dx=F(x)+C$;

2) значение интеграла $F(x)+C$ при $x=b$, $C=0$, т. е. вычисляют $F(b)$;

3) значение интеграла $F(x)+C$ при $x=a$, $C=0$, т. е. вычисляют $F(a)$;

4) разность $F(b)-F(a)$.

Процесс вычисления виден из формулы

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a). \tag{2}$$

Равенство (2) называется *формулой Ньютона—Лейбница*.

Замечания. 1. Под $F(x)$ в формуле (2) понимают простейшую из первообразных функций, у которой $C=0$.

2. Так как приращение $F(b)-F(a)$ равно некоторому числу, то определенный интеграл есть число (в отличие от неопределенного интеграла, который, как известно, есть совокупность функций).

Все методы интегрирования, используемые при нахождении неопределенных интегралов, применяются и при вычислении определенных интегралов. Числовое значение определенного интеграла зависит от вида функции, стоящей под знаком интеграла, и от значений верхнего и нижнего пределов и не зависит от обозначения переменной.

229—237. Вычислить определенные интегралы:

229. $\int\limits_3^5 dz.$

Решение. $\int\limits_3^5 dz = z|_3^5 = 5-3=2.$

230. $\int\limits_0^1 x\,dx.$ **231.** $\int\limits_0^2 3x^2 dx.$

232. $\int\limits_{-1}^4 (2x+1)dx.$

Решение. $\int\limits_{-1}^1 (2x+1)dx = (x^2+x)|_{-1}^1 = (1^2+1)-((-1)^2-1)=0.$

233. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos x\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos x\,dx = \sin x|_0^{\pi/4} = \sin\frac{\pi}{4} - \sin 0 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

234. $\int\limits_0^{\pi} \sin x\,dx.$ **235.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

236. $\int\limits_1^2 \frac{dx}{x}.$ **237.** $\int\limits_{-1}^2 x^3 dx.$

Если формулу Ньютона — Лейбница сравнить с формулой (1), то очевидно, что $\int\limits_a^b f(x)dx$ и есть площадь криволинейной трапеции, определяемой графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Таким образом, если функция $f(x)$ положительна, то определенный интеграл представляет собой площадь криволинейной трапеции. В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла.

Тогда площадь криволинейной трапеции можно вычислить по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{3}$$

238. Вычислить площадь криволинейной трапеции, ограниченной осью Ox, прямыми $x=-1$, $x=2$ и параболой $y=9-x^2$ (рис. 146).

Решение. Так как на отрезке $[-1, 2]$ функция $y=9-x^2$ принимает положительные значения, то для вычисления искомой площади S

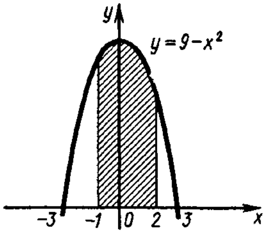

Рис. 146

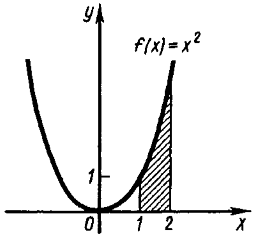

Рис. 147

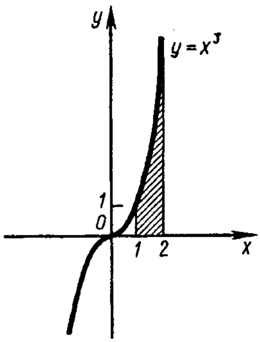

Рис. 148

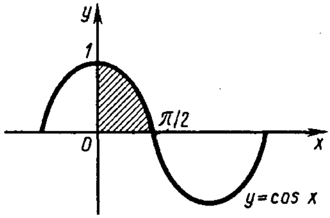

Рис. 149

воспользуемся формулой (3):

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)dx.$$

Применяя формулу Ньютона — Лейбница, находим

$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-$$
$$-\left(9\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=24\frac{2}{3}\ \text{(кв. ед.)}.$$

239. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $f(x)=x^2$, $x=1$, $x=2$, $y=0$ (рис. 147).

240. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=0$, $x=1$, $x=2$ (рис. 148).

241. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезком $[0, \pi/2]$ оси Ox и графиком функции $y=\cos x$ на этом отрезке (рис. 149).

§ 7. Основные свойства и вычисление определенного интеграла

Простейшие свойства определенного интеграла
Подстановка в определенном интеграле
Вычисление определенных интегралов

1. Простейшие свойства определенного интеграла

Рассмотрим основные свойства определенного интеграла. При этом будем предполагать, что функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

1. *При перестановке пределов интегрирования знак интеграла меняется на противоположный:*

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть $f(x) = F'(x)$ и, значит, $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a); \qquad (2)$$

$$-\int_b^a f(x)dx = -F(x)\Big|_b^a = -(F(a) - F(b)) = F(b) - F(a). \qquad (3)$$

Правые части равенств (2) и (3) равны; следовательно, должны быть равны и левые части, т. е. справедливо соотношение (1).

Это свойство позволяет рассматривать интегралы, в которых верхний предел меньше нижнего.

242. Найти $\int_3^1 x^2 dx$.

Решение. $\int_3^1 x^2 dx = -\int_1^3 x^2 dx = -\frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \left(-\frac{27}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{26}{3} = -8\frac{2}{3}$.

2. *Постоянный множитель можно вынести за знак определенного интеграла,* т. е.

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx, \qquad (4)$$

где k — постоянная величина.

Доказательство. Пусть $f(x) = F'(x)$ и, следовательно, $\int f(x)dx = F(x) + C$. Тогда

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a), \tag{5}$$

$$kf(x) = kF'(x). \tag{6}$$

Из равенства (6) получим $kf(x) = (kF(x))'$, откуда

$$\int_a^b kf(x)dx = \int_a^b kF(x))'dx = (kF(x)\Big|_a^b = kF(b) - kF(a) = k(F(b) - F(a)).$$

Но из равенства (5) следует $k(F(b) - F(a)) = k\int_a^b f(x)dx$ и значит, справедливо соотношение (4).

243. Найти а) $\int_0^1 5dx$; б) $\int_2^3 6x^2dx$.

Решение. а) $\int_0^1 5dx = 5\int_0^1 dx = 5x\Big|_0^1 = 5\cdot(1-0) = 5$;

б) $\int_2^3 6x^2dx = 2\int_2^3 3x^2dx = 2x^3\Big|_2^3 = 2(3^3 - 2^3) = 2\cdot 19 = 38$.

3. *Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций*, т. е.

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx. \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $f(x) = F'(x)$ и $\varphi(x) = \Phi'(x)$. Тогда

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x)\,dx = \int_a^b (F'(x) \pm \Phi'(x))\,dx = \int_a^b (F(x) \pm \Phi(x))'dx =$$
$$= (F(x) \pm \Phi(x))\Big|_a^b = (F(b) \pm \Phi(b)) - (F(a) \pm \Phi(a)) =$$
$$= (F(b) - F(a)) \pm (\Phi(b) - \Phi(a))$$

или

$$\int_a^b (f(x) \pm \varphi(x))dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b \varphi(x)\,dx.$$

Аналогично можно доказать справедливость этого свойства для любого конечного числа слагаемых.

244. Найти $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)dx$.

Решение. $\int_1^2 (5x^4 + 2x - 8)\,dx = \int_1^2 5x^4\,dx + \int_1^2 2x\,dx - \int_1^2 8dx = x^5\Big|_1^2 + x^2\Big|_1^2 - 8x\Big|_1^2 = (2^5 - 1^5) + (2^2 - 1^2) - 8(2-1) = 26.$

4. *Если a, b, c принадлежат интервалу, на котором функция $f(x)$ непрерывна, то*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть $F(x)$ — первообразная функция для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx=F(c)-F(a)+F(b)-F(c)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx.$$

2. Подстановка в определенном интеграле

Для вычисления определенного интеграла с помощью подстановки поступают так же, как и при вычислении неопределенного интеграла этим способом (см. § 5). Однако в случае определенного интеграла имеется одна особенность, на которую следует обратить внимание.

Как мы отмечали, метод подстановки заключается в том, что для приведения заданного неопределенного интеграла к табличному выражают аргумент через новую переменную, а затем находят неопределенный интеграл и полученный результат снова выражают через первоначальную переменную. В случае же определенного интеграла нет необходимости возвращаться к первоначальной переменной, однако нужно помнить, что, заменяя переменную под знаком интеграла, следует изменить и пределы интегрирования.

245. Найти $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}$.

Решение. Воспользуемся подстановкой $u=1-\cos x$, откуда $du=\sin x\,dx$. Затем найдем новые пределы интегрирования; подставляя в равенство $u=1-\cos x$ значения $x_1=\pi/2$ и $x_2=\pi$, соответственно получим $u_1=1-\cos(\pi/2)=1$ и $u_2=1-\cos\pi=2$. Запись решения выглядит так:

$$\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{2\sin x\,dx}{(1-\cos x)^2}=\left|\begin{matrix} u=1-\cos x, & u_1=1-\cos(\pi/2)=1, \\ du=\sin x\,dx; & u_2=1-\cos\pi=2\end{matrix}\right|=2\int\limits_{u_1}^{u_2}\frac{du}{u^2}=2\int\limits_1^2 u^{-2}\,du=$$

$$=-2u^{-1}\Big|_1^2=-1+2=1.$$

3. Вычисление определенных интегралов

246—306. Вычислить определенные интегралы, используя определение, их свойства и метод подстановки:

246. $\int\limits_1^3 8x^3dx$.

Решение. $\int\limits_1^3 8x^3dx=8\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=2x^4\Big|_1^3=2(3^4-1^4)=160.$

247. $\int\limits_0^2 3x^4\,dx.$ **248.** $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}} 4t^3\,dt.$ **249.** $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx = \int\limits_0^1 x^{1/3}dx = \frac{3}{4}x^{4/3}\Big|_0^1 = \frac{3}{4}(1^{4/3} - 0^{4/3}) = \frac{3}{4}.$

250. $\int\limits_1^4 \sqrt{x}\,dx.$ **251.** $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx.$

252. $\int\limits_{-1}^1 (2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4)\,dx.$

Решение. $\int\limits_{-1}^1 (2x+3x^2+4x^3+5x^4)\,dx = (x^2+x^3+x^4+x^5)\Big|_{-1}^1 =$
$= (1^2+1^3+1^4+1^5) - ((-1)^2+(-1)^3+(-1)^4+(-1)^5) = 4.$

253. $\int\limits_{-1}^2 (2x+3x^2+4x^3)\,dx.$ **254.** $\int\limits_1^5 ((x-3)^2 - 4)\,dx.$

255. $\int\limits_0^9 (3\sqrt{x} - x)\,dx.$ **256.** $\int\limits_1^4 \frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx.$

257. $\int\limits_0^1 e^{2x}\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(e^2 - 1) = 0{,}5(7{,}36 - 1) \approx 3{,}18.$

258. $\int\limits_{-1}^1 e^x\,dx.$ **259.** $\int\limits_0^2 3e^{3x}\,dx.$ **260.** $\int\limits_0^1 \frac{du}{u+1}.$

Решение. $\int\limits_0^1 \frac{du}{u+1} = \ln(u+1)\Big|_0^1 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 \approx 0{,}69.$

261. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x}.$ **262.** $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x+2}.$ **263.** $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\pi/2} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1.$

264. $\int\limits_0^{\pi/3} \sin x\,dx.$ **265.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx.$ **266.** $\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx.$

Решение. $\int\limits_0^{\pi/4} \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\sin 2x\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\Big(\sin 2\cdot\frac{\pi}{4} - \sin 2\cdot 0\Big) =$
$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$

267. $\int\limits_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\,dx.$ **268.** $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 4x\,dx.$

269. $\int\limits_0^{\pi/4} \sin 8x\,dx$. **270.** $\int\limits_0^{3\pi/2} 3\cos\frac{t}{3}dt$.

271. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

Решение. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x\Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}\right) =$
$= -\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1\right) = \frac{3-\sqrt{3}}{3}$.

272. $\int\limits_0^{\pi/4} \frac{4dx}{\cos^2 x}$. **273.** $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/3} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$.

274. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^{1/2} = \frac{\pi}{6}$.

275. $\int\limits_{-1}^{\sqrt{3}/2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ **276.** $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}$ **277.** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

Решение. $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x\Big|_0^{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg}\sqrt{3} - \operatorname{arctg} 0 = \pi/3 - 0 =$
$= \pi/3$.

278. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. **279.** $\int\limits_0^2 \frac{2x}{1+x^4}dx$. **280.** $\int\limits_1^2 (2u+1)^3 du$.

Решение. $\int\limits_1^2 (2u+1)^3 du = \left| \begin{array}{l} x = 2u+1,\ x_1 = 2\cdot 1+1 = 3, \\ dx = 2du,\ x_2 = 2\cdot 2+1 = 5 \\ du = \frac{1}{2}dx; \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int\limits_3^5 x^3 dx =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_3^5 = \frac{1}{8}x^4\Big|_3^5 = \frac{1}{8}(5^4 - 3^4) = \frac{1}{8}(625-81) = 68.$

281. $\int\limits_2^3 (2x-1)^3 dx$. **282.** $\int\limits_1^2 \frac{5dx}{\sqrt{5x-1}}$.

283. $\int\limits_1^5 \sqrt{(2x-1)^3}\,dx$. **284.** $\int\limits_0^2 5\sqrt[3]{(x-2)^2}\,dx$.

285. $\int\limits_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 (4x^3+1)^5 x^2 dx = \left| \begin{array}{l} t = 4x^3+1,\ t_1 = 4\cdot 0^3+1 = 1, \\ dt = 12x^2dx,\ t_2 = 4\cdot 1^3+1 = 5 \\ x^2dx = \frac{1}{12}dt; \end{array} \right| =$

$$=\frac{1}{12}\int_1^5 t^5dt=\frac{1}{12}\cdot\frac{t^6}{6}\Big|_1^5=\frac{1}{72}(5^6-1^6)=217.$$

286. $\int_0^1(2x^3+1)^4x^2dx.$ **287.** $\int_0^3 6x^3(3x^4-1)^2dx.$

288. $\int_0^1\frac{x^3\,dx}{5x^4+1}.$

Решение. $\int_0^1\frac{x^3\,dx}{5x^4+1}=\left|\begin{array}{l} t=5x^4+1,\ t_1=5\cdot0^4+1=1,\\ dt=20x^3dx,\ t_2=5\cdot1^4+1=6\\ x^3dx=\frac{1}{20}dt;\end{array}\right|=\frac{1}{20}\int_1^6\frac{dt}{t}=$

$$=\frac{1}{20}\ln t\Big|_1^6=\frac{1}{20}(\ln 6-\ln 1)=\frac{1}{20}\ln 6.$$

Теперь вычислим этот интеграл иначе, а именно, найдем первообразную функцию и возвратимся к старой переменной, не меняя пределов интегрирования:

$$\int_0^1\frac{x^3dx}{5x^4+1}=\left|\begin{array}{l} t=5x^4+1,\\ dt=20x^3dx,\\ x^3dx=\frac{1}{20}dt\end{array}\right|=\frac{1}{20}\ln t=\frac{1}{20}\ln(5x^4+1)\Big|_0^1=\frac{1}{20}(\ln 6-\ln 1)=$$

$$=\frac{1}{20}\ln 6.$$

289. $\int_0^{1/2}\frac{(x+1)dx}{1+4x^2}.$ **290.** $\int_{2\sqrt{2}}^4 3x\sqrt{x^2-7}\,dx.$

291. $\int_0^1\sqrt{1+x}\,dx.$ **292.** $\int_0^4 6x^2\sqrt{x^3-1}\,dx.$

293. $\int_0^1(e^x-1)^4e^x\,dx.$

Решение. $\int_0^1(e^x-1)^4e^x\,dx=\left|\begin{array}{l} e^x-1=t,\ t_1=0,\\ e^xdx=dt;\ t_2=e-1\end{array}\right|=\int_0^{e-1}t^4dt=\frac{1}{5}t^5\Big|_0^{e-1}=$

$$=\frac{1}{5}(e-1)^5.$$

294. $\int_1^e\frac{3\ln^2x\,dx}{x}.$

Решение. $\int_1^e\frac{3\ln^2x\,dx}{x}=\left|\begin{array}{l} \ln x=t,\ t_1=\ln 1=0,\\ \frac{dx}{x}=dt;\ t_2=\ln e=1\end{array}\right|=3\int_0^1 t^2dt=t^3\Big|_0^1=1.$

295. $\int_0^1\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}.$ **296.** $\int_{-1}^2\frac{6x^2\,dx}{(x^3-5)^2}.$

297. $\int\limits_1^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$ **298.** $\int\limits_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$.

299. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 z \cos z\, dz$.

Решение. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \sin^3 z \cos z\, dz = \left| \begin{matrix} \sin z = u, & u_1 = \sqrt{2}/2, \\ \cos z\, dz = du; & u_2 = 1 \end{matrix} \right| = \int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} u^3 du =$
$= \frac{u^4}{4}\Big|_{\sqrt{2}/2}^{1} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$.

300. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{1-2\cos\varphi}$. **301.** $\int\limits_0^{\pi/2} \sin\varphi \cos^2\varphi\, d\varphi$.

302. $\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{2-\sin x}$. **303.** $\int\limits_0^{\pi/3} \frac{\sin x\, dx}{3-\cos x}$.

304. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. $\int\limits_0^{1/2} \frac{\arcsin x\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| \begin{matrix} \arcsin x = t, & t_1 = 0, \\ \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = dt; & t_2 = \pi/6 \end{matrix} \right| = \int\limits_0^{\pi/6} t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^{\pi/6} =$
$= \frac{\pi^2}{72}$.

305. $\int\limits_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$. **306.** $\int\limits_0^{\pi/6} e^{\sin x} \cos x\, dx$.

§ 8. Вычисление площадей фигур с помощью определенного интеграла

Правило вычисления площадей плоских фигур
Площади фигур, расположенных над осью *Ox*
Площади фигур, расположенных полностью или частично под осью *Ox*
Площади фигур, прилегающих к оси *Oy*
Симметрично расположенные плоские фигуры

1. Правило вычисления площадей плоских фигур

Как известно, определенный интеграл от непрерывной неотрицательной функции равен площади соответствующей криволинейной трапеции (геометрический смысл определенного интеграла):

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

С помощью определенного интеграла можно также вычислять площади плоских фигур, так как эта задача всегда сводится к вычислению площадей криволинейных трапеций.

Площадь всякой плоской фигуры в прямоугольной системе координат может быть составлена из площадей криволинейных трапеций, прилегающих к оси Ox или к оси Oy.

Задачи на вычисление площадей плоских фигур удобно решать по следующему плану:

1°. По условию задачи делают схематический чертеж.

2°. Представляют искомую площадь как сумму или разность площадей криволинейных трапеций. Из условия задачи и чертежа определяют пределы интегрирования для каждой составляющей криволинейной трапеции.

3°. Записывают каждую функцию в виде $y=f(x)$.

4°. Вычисляют площади каждой криволинейной трапеции и площадь искомой фигуры.

2. Площади фигур, расположенных над осью Ox

Пусть на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ принимает неотрицательные значения, т. е. $f(x)\geqslant 0$ для любого $x\in[a, b]$. Тогда график функции $y=f(x)$ расположен над осью Ox.

Если фигура, расположенная над осью Ox, является криволинейной трапецией (см. рис. 140), то ее площадь вычисляется по известной формуле

$$S=\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad S=\int_a^b y\,dx, \qquad (1)$$

где y находится из уравнения кривой.

307—341. Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

307. $y^2=9x$, $x=16$, $x=25$ и $y=0$ (рис. 150).

Решение. Для любого $x\in[16, 25]$ функция $y=\sqrt{9x}$ принимает положительные значения; поэтому для вычисления площади данной криволинейной трапеции следует воспользоваться формулой (1):

$$S=\int_{16}^{25}\sqrt{9x}\,dx=\int_{16}^{25}3x^{1/2}dx=3\frac{x^{3/2}}{3/2}\Big|_{16}^{25}=2x\sqrt{x}\,\Big|_{16}^{25}=2(125-64)=2\cdot 61=$$

$$=122 \text{ (кв. ед.)}.$$

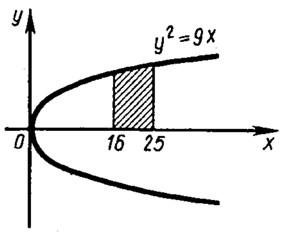

Рис. 150

308. $f(x)=x^2-2x+2$, $x=-1$, $x=2$ и отрезком $[-1, 2]$ оси Ox (рис. 151).

309. $y=-x^2+4$ и $y=0$ (рис. 152).

310. $y=1/x$, $y=0$, $x=1$ и $x=3$ (рис. 153).

311. $y=2\sin x$, $y=0$, $x=0$ и $x=\pi/2$ (рис. 154).

Если рассматриваемая фигура не

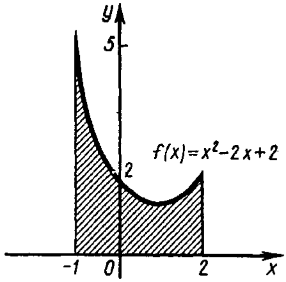

Рис. 151

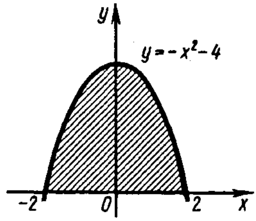

Рис. 152

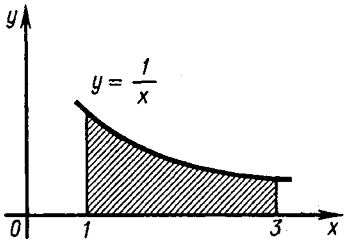

Рис. 153

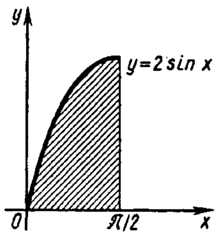

Рис. 154

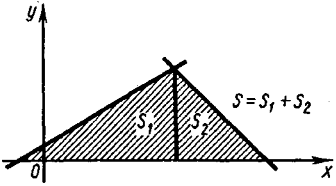

Рис. 155

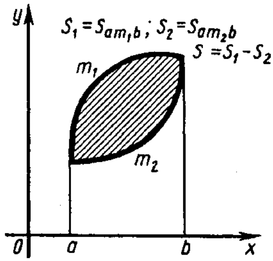

Рис. 156

является криволинейной трапецией, то искомую площадь следует представить как сумму (рис. 155) или разность (рис. 156) площадей криволинейных трапеций S_1 и S_2 и находить по общему правилу, рассмотренному в п. 1.

312. $xy=6$ и $x+y-7=0$.

Решение. Изобразим фигуру, площадь которой нужно определить (рис. 157). Найдем абсциссы точек пересечения равносторонней гиперболы и прямой, для чего решим систему уравнений $\begin{cases} xy=6, \\ x+y-7=0. \end{cases}$

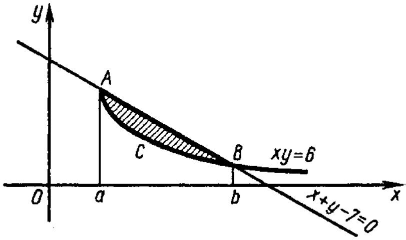

Рис. 157

Имеем $x(7-x)=6$; $7x-x^2=6$; $x^2-7x+6=0$, откуда $x_1=6$, $x_2=1$. Таким образом, $a=1$, $b=6$.

Итак, для вычисления искомой площади нужно из площади трапеции $aABb$ вычесть площадь криволинейной трапеции $aACBb$. Находим

$$S_{aABb}=\int\limits_1^6(7-x)dx=\left(7x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^6=\left(7\cdot 6-\frac{36}{2}\right)-\left(7\cdot 1-\frac{1}{2}\right)=$$

$$=17{,}5 \text{ (кв. ед.)}; \quad S_{aACBb}=\int\limits_1^6\frac{6dx}{x}=6\ln x\Big|_1^6=6\ln 6 \text{ (кв. ед.)},$$

т. е. $S=(17{,}5-6\ln 6)$ кв.ед.

313. $x-2y+4=0$, $x+y-5=0$ и $y=0$.

Решение. 1^0. Выполним построение фигуры (рис. 158).

Построим прямую $x-2y+4=0$: $y=0$, $x=-4$, $A(-4; 0)$; $x=0$, $y=2$, $B(0; 2)$. Построим прямую $x+y-5=0$: $y=0$, $x=5$, $C(5; 0)$; $x=0$, $y=5$, $D(0; 5)$.

2^0. Найдем точку пересечения прямых, для чего решим систему

$$\begin{cases} x-2y+4=0, \\ x+y-5=0. \end{cases}$$

Отсюда $x=2$, $y=3$, т. е. $M(2; 3)$.

Для вычисления искомой площади разобьем треугольник AMC на два треугольника AMN и NMC, так как при изменении x от A до N площадь ограничена прямой $x-2y+4=0$, а при изменении x от N до C — прямой $x+y-5=0$.

3^0. Для треугольника AMN имеем $x-2y+4=0$; $y=\frac{1}{2}x+2$; $f(x)=$ $=\frac{1}{2}x+2$; $a=-4$; $b=2$. Для треугольника NMC получим $x+y-5=0$; $y=-x+5$; $f(x)=-x+5$; $a=2$; $b=5$.

4^0. Вычислим площадь каждого из этих треугольников:

$$S_{AMN}=\int\limits_{-4}^{2}\left(\frac{1}{2}x+2\right)dx=\left(\frac{x^2}{4}+2x\right)\Big|_{-4}^{2}=9 \text{ (кв. ед.)};$$

$$S_{NMC}=\int\limits_2^5(-x+5)dx=\left(-\frac{x^2}{2}+5x\right)\Big|_2^5=4{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

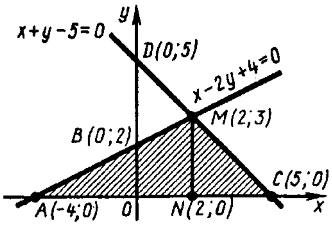

Рис. 158

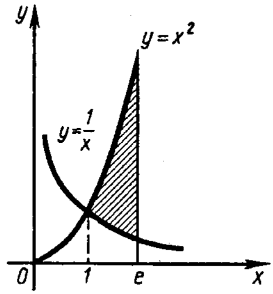

Рис. 159

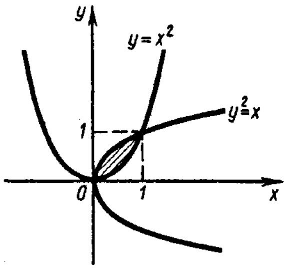

Рис. 160

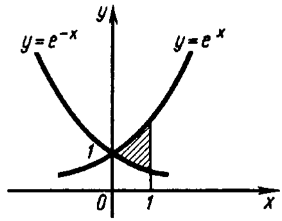

Рис. 161

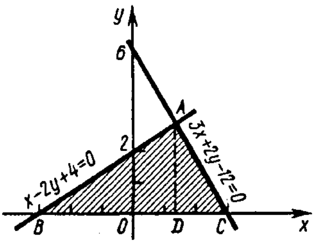

Рис. 162

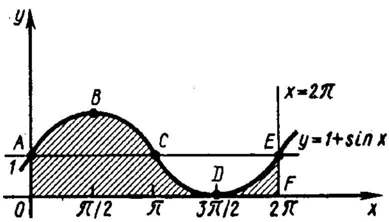

Рис. 163

Следовательно,

$$S = S_{AMN} + S_{NMC} = 9 + 4{,}5 = 13{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Проверка: $S\Delta_{AMC} = \frac{1}{2} AC \cdot NM = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 3 = 13{,}5$ (кв. ед.).

314. $y = x^2$, $y = 1/x$, если $1 \leqslant x \leqslant e$. (рис. 159).

315. $y^2 = x$ и $y = x^2$ (рис. 160).

316. $y = e^x$, $y = e^{-x}$ и $x = 1$ (рис. 161).

317. $x - 2y + 4 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$ и $y = 0$ (рис. 162).

318. $y = 1 + \sin x$, $y = 0$, $x = 0$ и $x = 2\pi$ (рис. 163).

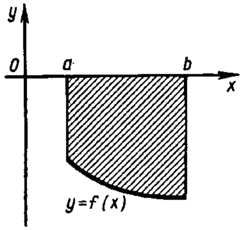

Рис. 164

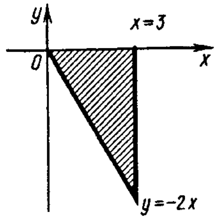

Рис. 165

3. Площади фигур, расположенных полностью или частично под осью Ox

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана неположительная непрерывная функция $y=f(x)$, т. е. $f(x)\leqslant 0$ для любого $x\in[a, b]$. Тогда график функции $y=f(x)$ расположен под осью Ox.

Если фигура, расположенная под осью Ox, является криволинейной трапецией (рис. 164), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \quad \text{или} \quad S=\left|\int_a^b y\,dx\right|, \qquad (2)$$

где y находится из уравнения кривой.

319. $y=-2x$, $y=0$ и $x=3$ (рис. 165).

Решение. На отрезке $[0, 3]$ функция $f(x)=-2x$ отрицательна; поэтому для вычисления площади искомой фигуры воспользуемся формулой (2):

$$S=\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=\left|\int_0^3 (-2x)\,dx\right|=\left|-x^2\right|_0^3=9 \text{ (кв. ед.)}.$$

Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на этом отрезке как положительные, так и отрицательные значения. Тогда нужно разбить отрезок $[a, b]$ на такие части, в каждой из которых функция не изменяет знак, затем по приведенным выше формулам вычислить соответствующие этим частям площади и найденные площади сложить. Например, площадь фигуры, изображенной на рис. 166, такова:

$$S=\left|\int_a^c f(x)\,dx\right|+\int_c^b f(x)\,dx.$$

320. $y=4x-x^2$, $y=0$ и $x=5$.

Решение. Парабола $y=4x-x^2$ пересекает ось абсцисс в точках $x=0$ и $x=4$. Фигура, площадь которой требуется найти, отмечена цветом на рис. 167. Пусть S_1 и S_2 — площади частей этой фигуры, соответствующих отрезкам $[0, 4]$ и $[4, 5]$, а S — искомая площадь; тогда $S=S_1+S_2$. Используя формулу (1), получим

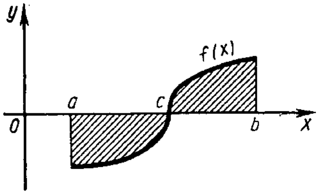

Рис. 166

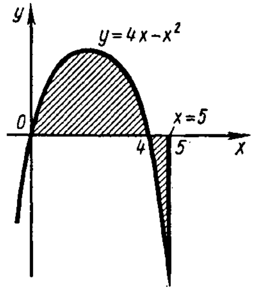

Рис. 167

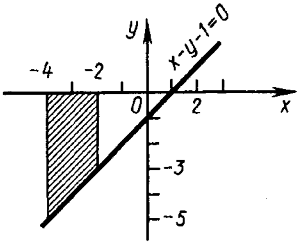

Рис. 168

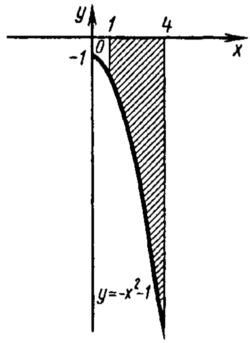

Рис. 169

$$S_1=\int_0^4(4x-x^2)\,dx=\left(2x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^4=32-\frac{64}{3}=\frac{32}{3}\ (\text{кв. ед.}),$$

а по формуле (2) находим

$$S_2=\left|\int_4^5(4x-x^2)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\right|_4^5=\left(\frac{125}{3}-50\right)-\left(\frac{64}{3}-32\right)=$$

$$=\frac{7}{3}\ (\text{кв. ед.}).$$

Следовательно, $S=S_1+S_2=32/3+7/3=13$ (кв. ед.)

321. $x-y-1=0$, $x=-4$, $x=-2$ и $y=0$ (рис. 168).

322. $y=-x^2-1$, $x=1$, $x=4$ и $x=0$ (рис. 169).

323. $y=x^2-6x$ и $x=0$.

Решение. Точки пересечения параболы $y=x^2-6x$ с осью Ox имеют абсциссы $x=0$ и $x=6$, так как $x^2-6x=x(x-6)$, где $x_1=0$, $x_2=6$. На отрезке $[0, 6]$ график функции $y=x^2-6x$ расположен ниже оси Ox (рис. 170). Следовательно,

$$S=\left|\int_0^6(x^2-6x)dx\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-3x^2\right)\right|_0^6=36\ (\text{кв. ед.}):$$

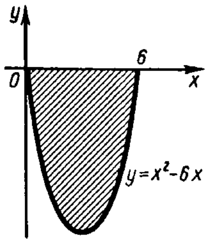

Рис. 170

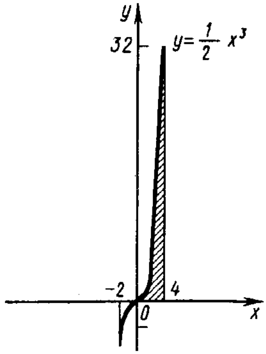

Рис. 171

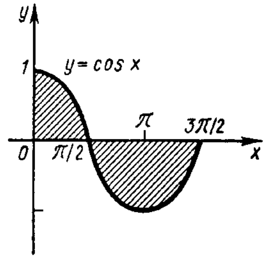

Рис. 172

324. $y=\frac{1}{2}x^3$, $x=-2$, $x=4$ и $y=0$.

Решение. График функции $y=\frac{1}{2}x^3$ на отрезке $[-2, 0]$ лежит ниже оси Ox, а на отрезке $[0, 4]$ — выше оси Ox (рис. 171). Поэтому

$$S=\left|\int_{-2}^{0}\frac{1}{2}x^3dx\right|+\int_{0}^{4}\frac{1}{2}x^3dx=\left|\frac{1}{8}x^4\right|_{-2}^{0}+\frac{1}{8}x^4\Big|_0^4=2+32=34 \text{ (кв. ед.)}.$$

325. $y=\cos x$, $x=3\pi/2$ и осями координат (рис. 172).

326. $y=-x^2+5$ и $y=x+3$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения параболы $y=-x^2+5$ и прямой $y=x+3$. Для этого решим систему $\begin{cases} y=-x^2+5, \\ y=x+3, \end{cases}$ откуда $x_1=-2$, $x_2=1$.

Найдем площадь S_1 фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+5$, прямыми $x=-2$, $x=1$ и $y=0$ (рис. 173). Получим

$$S_1=\int_{-2}^{1}(-x^2+5)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+5x\right)\Big|_{-2}^{1}=12 \text{ (кв. ед.)}.$$

Найдем площадь S_2 фигуры, ограниченной прямыми $y=x+3$, $x=-2$, $x=1$ и $y=0$:

$$S_2=\int_{-2}^{1}(x+3)dx=\left(\frac{x^2}{2}+3x\right)\Big|_{-2}^{1}=7{,}5 \text{ (кв. ед.)}.$$

Площадь искомой фигуры есть $S=S_1-S_2=12-7{,}5=4{,}5$ (кв. ед.).

327. $y=x^2$ и $y=2x$.

328. $y=\sin x$ и $y=0$, если $\pi\leqslant x\leqslant 3\pi/2$ (рис. 174).

329. $y=8+2x-x^2$ и $y=x+6$ (рис. 175).

330. $y=x^2$ и $y=2x^2-1$ (рис. 176).

Если $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ меняет знак конечное число раз, то этот отрезок следует разбить на части (рис. 177), на каждой из которых функция знакопостоянна. Интеграл по всему отрезку

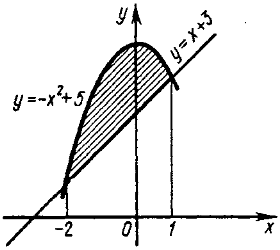

Рис. 173

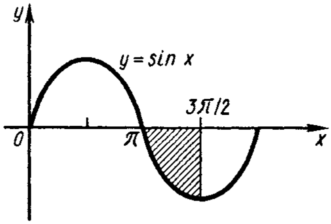

Рис. 174

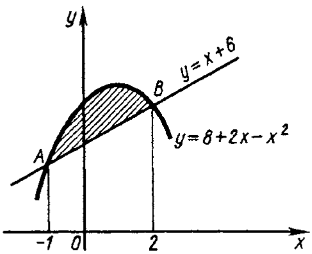

Рис. 175

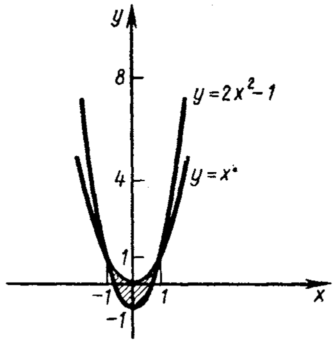

Рис. 176

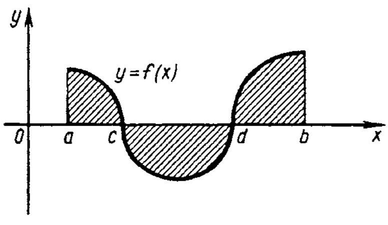

Рис. 177

$[a, b]$ разбивают на сумму интегралов по полученным частичным отрезкам.

Для вычисления суммы площадей нужно найти сумму абсолютных величин интегралов по указанным выше отрезкам, т. е.

$$S = S_1 + S_2 + S_3,$$

где $S=\int_a^b f(x)dx$, $S_1=\int_a^c f(x)dx$, $S_2=\left|\int_c^d f(x)dx\right|$, $S_3=\int_d^b f(x)dx$.

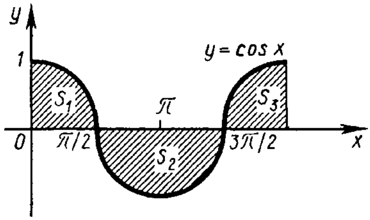

Рис. 178

331. Вычислить площадь фигуры, ограниченной волной косинусоиды и осью Ox, т. е. $f(x)=\cos x$, $x=0$, $x=2\pi$ и $y=0$ (рис. 178).

Решение. Искомая площадь состоит из площадей трех фигур. Находим:

$$S_1=\int_0^{\pi/2}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}=\left(\sin\frac{\pi}{2}-\sin 0\right)=1 \text{ (кв. ед)};$$

$$S_2=\left|\int_{\pi/2}^{3\pi/2}\cos x\,dx\right|=\left|\sin x\Big|_{\pi/2}^{3\pi/2}\right|=\left|\sin\frac{3\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{2}\right|=2 \text{ (кв. ед.)},$$

где при вычислении S_2 использован знак модуля, так как $\cos x<0$ для любого $x\in[\pi/2, 3\pi/2]$;

$$S_3=\int_{3\pi/2}^{2\pi}\cos x\,dx=\sin x\Big|_{3\pi/2}^{2\pi}=\left(\sin 2\pi-\sin\frac{3\pi}{2}\right)=1 \text{ (кв. ед.)}.$$

Итак, $S=S_1+S_2+S_3=1+2+1=4$ (кв. ед.)

4. Площади фигур, прилегающих к оси Oy

Если криволинейная трапеция прилегает к оси ординат и ограничена непрерывной кривой $x=f(y)$, прямыми $y=a$, $y=b$ и осью Oy (рис. 179), то ее площадь вычисляется по формуле

$$S=\int_a^b f(y)\,dy. \qquad (3)$$

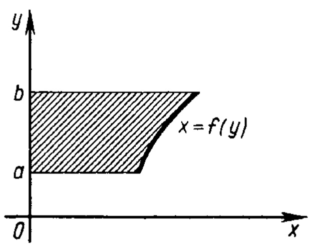

Рис. 179

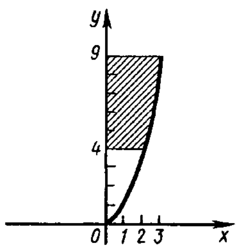

Рис. 180

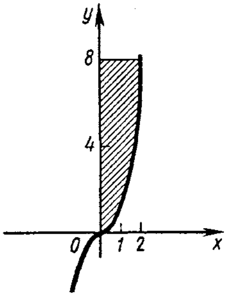

Рис. 181

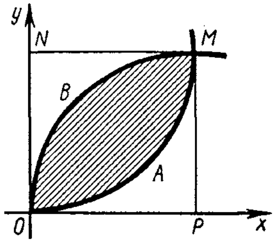

Рис. 182

332. $y=x^2$, $y=4$, $y=9$ и $x=0$ (рис. 180).

Решение. Данная фигура есть криволинейная трапеция, прилегающая к оси Oy. Пределами интегрирования по y являются значения $a=4$, $b=9$. Запишем данную функцию в виде $x=f(y)$, т. е. $x=\sqrt{y}$. Теперь искомую площадь найдем по формуле (3):

$$S=\int_4^9 \sqrt{y}\,dy=\frac{2}{3}y\sqrt{y}\,\Big|_4^9=12\frac{2}{3}\text{ (кв. ед.)}.$$

333. Найти площадь, ограниченную осью ординат, кубической параболой $y=x^3$ и прямой $y=8$ (рис. 181).

334. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y^2=4x$ и $x^2=4y$.

Решение. На рис. 182 изображена фигура, площадь которой мы должны вычислить. Как видно из рисунка, площадь фигуры $OBMAO$ можно представить как разность площадей фигур $OBMPO$ и $OAMPO$, где MP — перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Ox.

Найдем координаты точки M. Решив систему уравнений $\begin{cases} y^2=4x \\ y=x^2/4, \end{cases}$ получим $x=4$, $y=4$, т. е. $M(4;4)$.

Следовательно,

$$S=\int_0^4 \sqrt{4x}\,dx-\int_0^4 \frac{x^2}{4}\,dx=\frac{4}{3}x^{3/2}\Big|_0^4-\frac{x^3}{12}\Big|_0^4=\frac{16}{3}\text{ (кв. ед.)}.$$

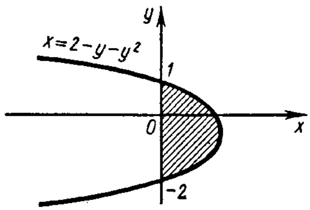

Рис. 183

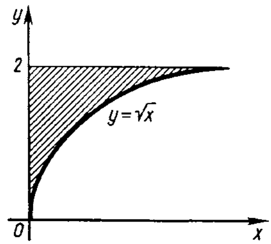

Рис. 184

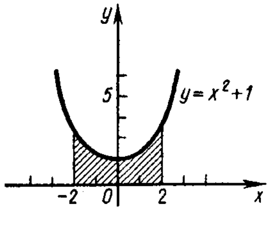

Рис. 185

Данную задачу можно решить и другим способом. Представим искомую площадь в виде разности площадей фигур $OAMNO$ и $OBMNO$ (MN — перпендикуляр, опущенный из точки M на ось Oy), т. е. $S = S_{OAMNO} - S_{OBMNO}$. Тогда

$$S = \int_0^4 \sqrt{4y}\,dy - \int_0^4 \frac{y^2}{4}\,dy = \frac{4}{3} y^{3/2} \Big|_0^4 - \frac{y^3}{12} \Big|_0^4 = \frac{16}{3} \text{ (кв. ед.)}.$$

335. $x = 2 - y - y^2$ и $x = 0$ (рис. 183).

336. $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ и $x = 0$ (рис. 184).

5. Симметрично расположенные плоские фигуры

Если кривая расположена симметрично относительно оси координат или начала координат, то можно упростить вычисления, определив половину площади и затем удвоив результат.

337. $y = x^2 + 1$, $x = -2$, $x = 2$ и $y = 0$ (рис. 185).

Решение. $S = \int_{-2}^{2} (x^2+1)\,dx = 2\int_0^2 (x^2+1)\,dx = 2\left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2 = 9\frac{1}{3}$ (кв. ед.).

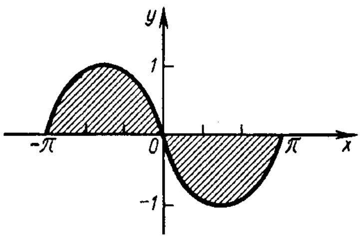

Рис. 186

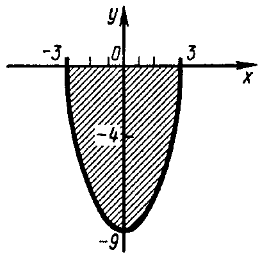

Рис. 187

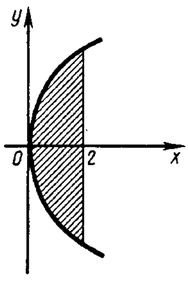

Рис. 188

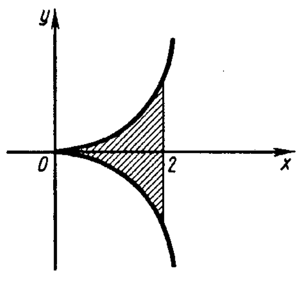

Рис. 189

338. $y=\sin x$ от $x=-\pi$ до $x=\pi$ и осью Ox (рис. 186).
339. $y=x^2-9$ и $y=0$ (рис. 187).
340. $y^2=4x$ и $x=2$ (рис. 188).
341. $y^2=x^3$ и $x=2$ (рис. 189).

§ 9. Приближенное вычисление определенного интеграла

«Неберущиеся» интегралы
Определенный интеграл как предел суммы
Метод прямоугольников
Метод трапеций
Метод парабол

1. «Неберущиеся» интегралы

При нахождении первообразных различных функций возникает следующий вопрос: всякая ли функция $f(x)$ имеет первообразную, т. е. всегда ли выполнима операция интегрирования?

Из курса дифференциального исчисления известно, что любая элементарная функция имеет производную, которая, в свою очередь, является элементарной функцией. Иначе говоря, прямое действие — дифференцирование — не выводит за пределы класса элементарных функций.

Иначе обстоит дело с интегрированием. Операция интегрирования, как обратное действие, не всегда осуществима, если ограничиться классом элементарных функций. Не для всякой элементарной функции существует элементарная первообразная.

Существуют очень простые на вид элементарные функции, первообразные которых существуют, но не выражаются никакой конечной комбинацией элементарных функций. Таковы, например, функции $\int\frac{\sin x}{x}dx$, $\int e^{-x^2}dx$, $\int\sqrt{1+x^3}\,dx$, $\int\frac{dx}{\ln x}$, $\int\sin x^2\,dx$, $\int\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$. Про такие интегралы принято говорить, что они «неберущиеся».

Так, теоретически должен существовать интеграл

$$\int\frac{\sin x}{x}dx=F(x)+C, \qquad (1)$$

т. е. функция $F(x)$ должна существовать и притом быть непрерывной на всей числовой оси, за исключением точки $x=0$. Однако эту функцию нельзя выразить как конечную комбинацию элементарных функций.

Пусть требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b\frac{\sin x}{x}dx. \qquad (2)$$

Не умея найти неопределенный интеграл (1), мы не сможем применить формулу Ньютона—Лейбница для вычисления интеграла (2). Тем не менее этот интеграл можно вычислить приближенно.

Таким образом, «приближенно» вычисляют те определенные интегралы, которые не поддаются обычному методу вычислений.

Слово «приближенно» взято в кавычки, чтобы подчеркнуть некоторую его условность. В самом деле, мы можем, например, «совершенно точно» вычислить следующий интеграл:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2, \qquad (3)$$

однако для практических целей придется дополнительно отыскивать $\ln 2$ с помощью таблицы натуральных логарифмов, а это неизбежно приведет к некоторой погрешности окончательного результата. Более того, в реальных задачах пределы интегрирования (и даже сама подынтегральная функция) часто бывают известны лишь с определенной точностью, т. е. приближенно.

Уже эти простейшие соображения показывают, что «абсолютная точность» вряд ли достижима и что цель состоит здесь не в том, чтобы ограничиваться «точными» методами вычислений, а в том, чтобы проводя приближенные вычисления, уметь оценивать надежность полученного результата.

Приближенные вычисления применяются не только тогда, когда «точные» методы либо невозможны, либо слишком сложны. Оказывается, что при использовании вычислительных машин «приближенные» методы вычислений просто необходимы даже в простейших случаях. Например, равенство (3), прочитанное справа налево, позволяет заменить $\ln 2$ через определенный интеграл (значение которого может быть вычислено приближенным методом).

С развитием электронно-вычислительных машин в настоящее время широко используют приближенные методы, в том числе и при вычислении интегралов.

Пусть требуется вычислить определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке $[a, b]$.

Если функция $f(x)$ задана аналитически и ее первообразная на этом отрезке может быть выражена в виде конечной комбинации элементарных функций, то для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$ используют формулу Ньютона—Лейбница. Если же функция задана аналитически, но ее первообразная не выражается в элементарных функциях, то значение определенного интеграла находят приближенными методами. Принцип построения приближенных методов интегрирования основан на замене определенного интеграла соответствующей интегральной суммой.

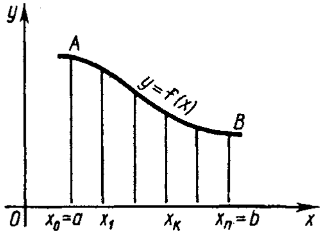

Рис. 190

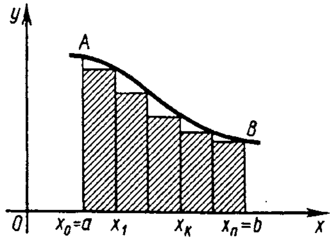

Рис. 191

2. Определенный интеграл как предел суммы

Рассмотрим криволинейную трапецию, заданную непрерывной неотрицательной функцией $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Разобьем этот отрезок на n равных частей точками $x_0=a$, x_1, x_2, ..., $x_n=b$ и проведем через эти точки прямые, параллельные оси ординат (рис. 190). Тогда данная криволинейная трапеция разобьется на n полос, также представляющих собой криволинейные трапеции. Заменим каждую из этих полос прямоугольником, основание которого то же, что у соответствующей полосы, и равно Δx, а высота совпадает с одной из ее ординат — левой $f(x_{k-1})$ (рис. 191) или правой $f(x_k)$ (рис. 192), где k — порядковый номер полосы ($k=1, 2, ..., n$)

Будем увеличивать число точек разбиения отрезка $[a, b]$ так, чтобы $\Delta x \to 0$. При этом длины ординат $f(x_{k-1})$ и $f(x_k)$ будут отличаться друг от друга тем меньше, чем больше n. Таким образом, площадь k-го прямоугольника равна $f(x_k)\Delta x$ (для определенности в качестве высоты прямоугольника мы выбрали правую ординату).

Рассмотрим сумму площадей всех таких прямоугольников:

$$f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+...+f(x_k)\Delta x+...+f(x_n)\Delta x=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x. \qquad (4)$$

Эта сумма называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Используя непрерывность функции $f(x)$, можно показать, что при достаточно большом n сумма площадей всех прямоугольников приближается к площади рассматриваемой криволинейной трапеции и тем ближе, чем больше n. Поэтому интегральная сумма (4) при $n \to \infty$ ($\Delta x \to 0$) имеет предел, который совпадает с площадью данной криволинейной трапеции:

$$S=\lim_{\Delta x \to 0}(f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+...$$
$$...+f(x_k)\Delta x+...+f(x_n)\Delta x)$$

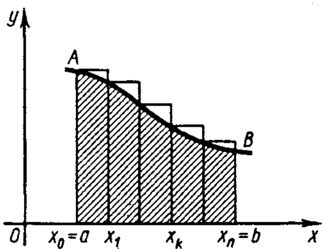

Рис. 192

или, короче,

$$S=\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x. \qquad (5)$$

Так как $\Delta x \to 0$ при $n\to\infty$, то равенство (5) можно записать в виде

$$S=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x.$$

Мы знаем, что площадь S криволинейной трапеции есть определенный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$. Следовательно,

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x. \qquad (6)$$

342. Найти значение интегральной суммы для функции $y=x^2+1$ при делении отрезка $[1, 3]$ на четыре части.

Решение. Здесь $x_0=1$, $x_1=1{,}5$, $x_2=2$, $x_3=2{,}5$, $\Delta x=0{,}5$. Построим криволинейную трапецию и соответствующую ступенчатую фигуру (рис. 193).

Определяем значения функции в точках разбиения: $f(x_0)=f(1)=2$; $f(x_1)=f(1{,}5)=3{,}25$; $f(x_2)=f(2)=5$; $f(x_3)=f(2{,}5)=7{,}25$.

Найдем сумму произведений значений функции на величину $\Delta x=0{,}5$:

$$S=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+f(x_2)\Delta x+f(x_3)\Delta x=2\cdot 0{,}5+3{,}25\cdot 0{,}5+5\cdot 0{,}5+$$
$$+7{,}25\cdot 0{,}5=8{,}75.$$

343. Найти значение интегральной суммы для функции $y=x^2+1$ при делении отрезка $[1, 3]$ на две части.

344. Найти значение $\int_1^3 (x^2+1)\,dx$ и сравнить с результатами задач 342, 343.

345. Найти значение интеграла $\int_0^1 x\,dx$, рассматривая его как предел интегральных сумм.

Решение. Разобьем отрезок $[0, 1]$ (рис. 194) на n равных частей; при этом длина каждой части равна $1/n$. Проведем через точки деле-

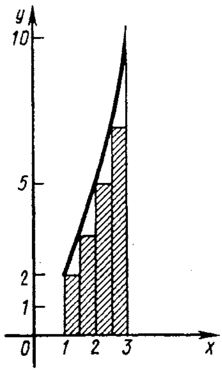

Рис. 193

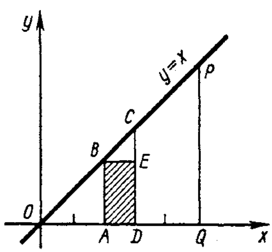

Рис. 194

ния прямые, параллельные оси ординат. Тогда каждая из полос, например $ABCD$, будет представлять собой трапецию. Для каждой трапеции построим прямоугольник $ABED$. Если A есть k-я точка деления отрезка OQ, то длина отрезка OA равна длине отрезка AB и равна k/n. Поэтому площадь прямоугольника $ABED$ равна k/n^2.

Тогда согласно изложенному выше способу вычисления площади фигуры OPQ имеем

$$\int_0^1 x\,dx = \lim_{n\to\infty} S_{OPQ} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\frac{3}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}(1+2+3+\cdots n)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1+n}{2}\cdot n\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1+n}{2n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2n}+\frac{n}{2n}\right)=\frac{1}{2}.$$

346. Вычислить $\int_0^1 x\,dx$ и сравнить с результатом задачи 345.

3. Метод прямоугольников

Решение многих задач сводится к вычислению определенных интегралов, точное выражение которых сложно, требует длительных вычислений и не всегда оправдано практически. В этом случае часто бывает вполне достаточно найти их приближенное значение.

Пусть, например, необходимо вычислить площадь, ограниченную линией, уравнение которой неизвестно. В этом случае можно заменить данную линию более простой, уравнение которой известно. Площадь полученной таким образом криволинейной трапеции принимается за приближенное значение искомого интеграла.

Простейшим приближенным методом является метод прямоугольников. Пусть требуется вычислить интеграл $\int_a^b f(x)dx$ от непрерывной функции $y=f(x)$. Как и при рассмотрении интегральной суммы, разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0=a$, $x_1, \ldots, x_n=b$ и проведем через эти точки прямые, параллельные оси ординат.

Заменим дугу AB кривой $y=f(x)$ ломаной ступенчатой линией (см. рис. 191). Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей заштрихованных прямоугольников и соответственно интеграл заменится суммой

$$S_1=f(x_0)\Delta x+f(x_1)\Delta x+\cdots+f(x_{n-1})\Delta x=\Delta x(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})). \tag{7}$$

Учитывая, что отрезок $[a, b]$ разделен на n равных частей, получим $\Delta x=(b-a)/n$. Тогда сумму (7) можно записать в виде

$$S_1=\frac{b-a}{n}\,(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})). \qquad (8)$$

При $n\to\infty$ сумма (8) приближенно равна данному интегралу и является интегральной суммой: ее предел при $n\to\infty$ $(\Delta x\to 0)$ и есть интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Какова же погрешность, возникающая при замене интеграла его интегральной суммой? Не останавливаясь на отыскании этой погрешности, заметим, что если функция $y=f(x)$ монотонна, то точное значение интеграла заключено между суммой (8) и суммой

$$S_2=\frac{b-a}{n}\,(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)), \qquad (9)$$

которая получается, если в криволинейной трапеции дугу AB кривой $y=f(x)$ заменить ломаной ступенчатой фигурой, изображенной на рис. 192. Следовательно,

$$S_1<\int\limits_a^b f(x)dx<S_2.$$

Итак, чтобы найти приближенное значение интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, нужно:

1) разделить отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частей точками $x_0=a,\ x_1,\ x_2, \ldots, x_{n-1},\ x_n=b$;

2) вычислить значения подынтегральной функции $y=f(x)$ в точках деления, т. е. найти $y_0=f(x_0)$, $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, ..., $y_{n-1}=f(x_{n-1})$, $y_n=f(x_n)$;

3) воспользоваться одной из следующих приближенных формул:

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\,(f(x_0)+f(x_1)+\cdots+f(x_{n-1})), \qquad (10)$$

$$\int\limits_a^b f(x)dx\approx\frac{b-a}{n}\,(f(x_1)+f(x_2)+\cdots+f(x_n)). \qquad (11)$$

Соотношения (10) и (11) называются *формулами прямоугольников.*

Замечания. 1. Имеет смысл считать, что искомый интеграл приближенно равен не суммам (8) или (9), а сумме

$$S=\frac{b-a}{n}(y_{1/2}+y_{3/2}+\cdots y_{(2n-1)/2}),$$

где $y_{1/2}=f\left(\frac{x_0+x_1}{2}\right)$, $y_{3/2}=f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$, ..., $y_{(2n-1)/2}=f\left(\frac{x_{n-1}+x_n}{2}\right)$.

2. Отрезок $[a, b]$ можно делить и на неравные части, но это усложняет вычисления.

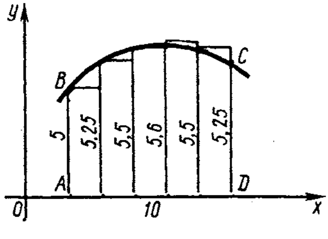

Рис. 195

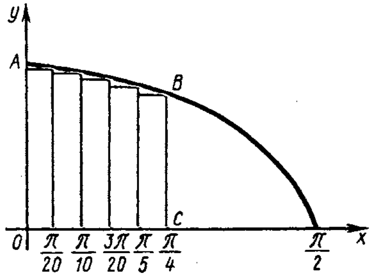

Рис. 196

3. Чем больше n (т. е. чем меньше Δx), тем точнее окончательный результат, но вместе с ростом n возрастает и объем вычислений.

4. С помощью приближенного интегрирования обычно находят интегралы, не поддающиеся точному вычислению. Однако мы ограничимся решением примеров, где точное значение интеграла находится легко, для того чтобы сравнить полученное приближенное значение с точным.

347. Вычислить площадь фигуры $ABCD$ по данным, представленным на рис. 195.

Решение. Разобьем основание AD, равное 10 см, на 5 равных частей и проведем через точки деления прямые, параллельные оси ординат. Применяя формулу (10), получим приближенное значение искомой площади:

$$S_{ABCD}=2(5+5{,}25+5{,}5+5{,}6+5{,}5)\approx 53{,}7 \text{ (кв. ед.)}$$

348. Используя метод прямоугольников, вычислить $\int\limits_0^{\pi/4}\cos x\,dx$.

Решение. Разделим промежуток интегрирования на 5 частей (рис. 196). Тогда $n=5$; $b-a=\pi/4$; $\Delta x=(b-a)/n=\pi/20\approx 0{,}1571$. Соответствующие значения подынтегральной функции найдем с помощью таблиц: $y_0=\cos 0°=1$; $y_1=\cos(\pi/20)=\cos 9°=0{,}9877$; $y_2=\cos(\pi/10)=\cos 18°=0{,}9511$; $y_3=\cos(3\pi/20)=\cos 27°=0{,}8910$; $y_4=\cos(\pi/5)=\cos 36°=0{,}8090$; $y_5=\cos(\pi/4)=\cos 45°=0{,}7071$.

По формуле прямоугольников (с недостатком) имеем

$$A_{\text{прибл}}=\int\limits_0^{\pi/4}\cos x\,dx\approx 0{,}1571(1+0{,}9877+0{,}9511+0{,}8910+0{,}8090)=0{,}7288.$$

С другой стороны, по формуле Ньютона—Лейбница

$$A_{\text{точн}}=\int\limits_0^{\pi/4}\cos x\,dx=\sin x\Big|_0^{\pi/4}=\sin(\pi/4)-\sin 0=0{,}5\sqrt{2}.$$

Найдем относительную погрешность вычисления:

$$\delta=\frac{|A_{\text{прибл}}-A_{\text{точн}}|}{A_{\text{точн}}}100\,\%=\frac{|0{,}7288-0{,}5\sqrt{2}|}{0{,}5\sqrt{2}}\cdot 100\,\%\approx 3{,}06\,\%.$$

349. Вычислить интеграл $\int\limits_2^5 x^2\,dx$ методом прямоугольников. Найти относительную погрешность вычисления.

350. Вычислить $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x\, dx$ методом прямоугольников, разделив промежуток $[0, \pi]$ на 10 равных частей. Найти точное значение интеграла по формуле Ньютона—Лейбница и относительную погрешность приближенного вычисления.

351. Вычислить $\int\limits_0^1 e^x\, dx$ методом прямоугольников, разделив отрезок $[0, 1]$ на 8 частей.

4. Метод трапеций

Этот метод приближенного интегрирования обычно дает более точное значение интеграла, чем метод прямоугольников.

Заменим дугу AB кривой $y=f(x)$ ломаной линией, вписанной в эту дугу (рис. 197). Тогда площадь криволинейной трапеции заменится суммой площадей обычных (т. е. прямолинейных) трапеций. Площади этих трапеций определяются по формулам

$$S_1=\frac{y_0+y_1}{2}\Delta x,\quad S_2=\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x,\quad \ldots,\quad S_n=\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x,$$

где $y_0, y_1, \ldots, y_n$ — ординаты, соответствующие значениям функции $y=f(x)$ в точках деления. Сумму площадей всех элементарных трапеций можно принять за приближенное значение площади криволинейной трапеции, а следовательно, и за приближенное значение определенного интеграла, т. е.

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{y_0+y_1}{2}\Delta x+\frac{y_1+y_2}{2}\Delta x+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\Delta x=$$

$$=\Delta x\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right)$$

или

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right). \qquad (12)$$

Формула (12) называется *формулой трапеций.*

352. Найти приближенно $\int\limits_0^4 x^2 dx$ методом трапеций, разделив промежуток интегрирования на 10 равных частей. Вычислить погрешность приближения.

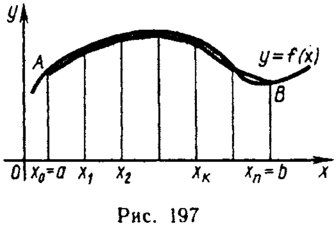

Рис. 197

Решение. Здесь $n=10$; тогда $\Delta x=(b-a)/n=0{,}4$. Точками деления являются: $x_0=0$; $x_1=0{,}4$; $x_2=0{,}8$; $x_3=1{,}2$; $x_4=1{,}6$; $x_5=2$; $x_6=2{,}4$; $x_7=2{,}8$; $x_8=3{,}2$; $x_9=3{,}6$; $x_{10}=4$.

Найдем значения функции в точках

деления: $y_0=0$; $y_1=0{,}16$; $y_2=0{,}64$; $y_3=1{,}44$; $y_4=2{,}56$; $y_5=4$; $y_6=5{,}76$; $y_7=7{,}84$; $y_8=10{,}24$; $y_9=12{,}96$; $y_{10}=16$.

Используя формулу (12), получим

$$\int_0^4 x^2dx\approx 0{,}4\left(\frac{0+16}{2}+0{,}16+0{,}64+1{,}44+2{,}56+4{,}0+5{,}76+7{,}84+\right.$$
$$\left.+10{,}24+12{,}96\right)=21{,}44.$$

Точное значение интеграла определяем по формуле Ньютона—Лейбница:

$$\int_0^4 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right|_0^4=\frac{64}{3}=21{,}33.$$

Найдем относительную погрешность приближенного вычисления:

$$\delta=\frac{21{,}44-21{,}33}{21{,}33}\cdot 100\,\%\approx 0{,}5\,\%.$$

353. Вычислить по формуле трапеций площадь фигуры $ABCD$ по данным, представленным на рис. 196.

354. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int_2^5 x^2dx$. Сравнить с результатом решения этой же задачи методом прямоугольников (см. пример 349).

355. Вычислить $\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx$ методом трапеций и сравнить с результатом решения этой же задачи методом прямоугольников (см. пример 350).

356. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int_0^5\frac{dx}{\sqrt{x+4}}$, разбив промежуток интегрирования на 5 равных частей.

Решение. Здесь $n=5$; $\Delta x=1$; $x_0=0$; $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$; $x_4=4$; $x_5=5$. Далее, находим $y_0=\frac{1}{\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$; $y_1=\frac{1}{\sqrt{1+4}}\approx 0{,}447$; $y_2=\frac{1}{\sqrt{2+4}}\approx$ $\approx 0{,}409$; $y_3=\frac{1}{\sqrt{3+4}}\approx 0{,}377$; $y_4=\frac{1}{\sqrt{4+4}}\approx 0{,}353$; $y_5=\frac{1}{\sqrt{5+4}}=\frac{1}{3}$.

По формуле (12) получим

$$\int_0^5\frac{dx}{\sqrt{x+4}}\approx 1(0{,}416+0{,}447+0{,}409+0{,}377+0{,}353)=2{,}002.$$

357. Вычислить по формуле трапеций интеграл $\int_2^{12}\frac{dx}{x}$, разбивая промежуток интегрирования на 10 равных частей. Оценить погрешность.

Решение. По условию, $a=2$, $b=12$, $n=10$, $\Delta x=1$. Вычислим значения подынтегральной функции $y=1/x$ в соответствующих точках деления: $x_0=2$, $y_0=1/2=0{,}5$; $x_1=3$, $y_1=1/3\approx 0{,}3333$; $x_2=4$, $y_2=$

$=1/4=0{,}25$; $x_3=5$, $y_3=1/5=0{,}2$; $x_4=6$, $y_4=1/6\approx 0{,}1667$; $x_5=7$, $y_5=$ $=1/7\approx 0{,}1429$; $x_6=8$, $y_6=0{,}125$; $x_7=9$, $y_7\approx 0{,}1111$; $x_8=10$, $y_8=0{,}1$; $x_9=11$, $y_9\approx 0{,}0909$; $x_{10}=12$, $y_{10}\approx 0{,}0833$.

Подставив найденные значения в формулу (12), получим

$$\int_2^{12}\frac{dx}{x}\approx 1\left(\frac{0{,}5+0{,}0833}{2}+0{,}3333+0{,}25+0{,}2+0{,}1667+0{,}1429+0{,}125+\right.$$

$$\left.+0{,}1111+0{,}1+0{,}0909\right)\approx 1{,}812.$$

Вычислим данный интеграл по формуле Ньютона — Лейбница:

$$\int_2^{12}\frac{dx}{x}=\ln x\Big|_2^{12}=\ln 12-\ln 2=\ln 6\approx 1{,}792.$$

Найдем погрешность приближенного вычисления:

$$\delta=\frac{1{,}812-1{,}792}{1{,}792}\cdot 100\ \%\approx 1{,}1\ \%.$$

358. Вычислить интеграл $\int_1^9\sqrt{6x-5}\,dx$ по формуле Ньютона — Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 8 равных частей. Оценить погрешность результатов.

Решение. Согласно формуле Ньютона — Лейбница, находим

$$I=\int_1^9\sqrt{6x-5}\,dx=\frac{1}{6}\int_1^9(6x-5)^{1/2}d(6x-5)=\frac{1}{9}(6x-5)^{3/2}\Big|_1^9=\frac{7^3-1}{9}=38.$$

Так как промежуток $[1, 9]$ разбит на 8 равных частей, то $\Delta x=1$. Найдем значения y_i ($i=1, 2, \ldots, 8$) подынтегральной функции $y=$ $=\sqrt{6x-5}$ в точках деления x_i: $x_0=1$, $y_0=\sqrt{1}=1{,}0000$; $x_1=2$, $y_1=\sqrt{7}=$ $=2{,}6458$; $x_2=3$, $y_2=\sqrt{13}=3{,}6056$; $x_3=4$, $y_3=\sqrt{19}=4{,}3589$; $x_4=5$, $y_4=\sqrt{25}=5{,}0000$; $x_5=6$, $y_5=\sqrt{31}=5{,}5678$; $x_6=7$, $y_6=\sqrt{37}=6{,}0828$; $x_7=8$, $y_7=\sqrt{43}=6{,}5574$; $x_8=9$, $y=\sqrt{49}=7{,}0000$.

Вычислим данный интеграл по приближенным формулам. Используя формулу прямоугольников (10), находим

$$I=\sum_{i=0}^{7}y_i=34{,}8183.$$

Абсолютная погрешность этого приближенного значения (по недостатку) равна 3,1817, а относительная $\frac{3{,}1817\cdot 100\ \%}{38}\approx 8{,}37\ \%$.

Согласно формуле прямоугольников (11), получим

$$I=\sum_{i=1}^{8}y_i=40{,}8183.$$

Здесь абсолютная погрешность (по избытку) равна 2,8183, а относительная $\frac{2{,}8183\cdot 100\ \%}{38}\approx 7{,}42\ \%$.

По формуле трапеций (12) находим

$$I \approx 4 + \sum_{i=1}^{7} y_i = 37{,}8183.$$

Абсолютная погрешность этого результата составляет 0,1817, а относительная $\frac{0{,}1817 \cdot 100\ \%}{38} \approx 0{,}48\ \%$.

359. Применяя формулу Ньютона—Лейбница и приближенные формулы прямоугольников и трапеций, вычислить интеграл $I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей.

360. Вычислить интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле Ньютона—Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей.

361. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$ по формуле Ньютона—Лейбница и по приближенным формулам прямоугольников и трапеций, разбив промежуток интегрирования на 10 равных частей.

5. Метод парабол

Из других методов приближенного интегрирования следует отметить *метод парабол* (который также называют *методом Симпсона*).

Его сущность заключается в том, что отрезки прямых, ограничивающих элементарные трапеции сверху, заменяют дугами парабол, оси которых параллельны оси Oy.

Из школьного курса алгебры известно, что уравнения таких парабол имеют вид

$$y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \tag{13}$$

где α, β, γ — параметры. Эти параметры можно однозначно определить по трем точкам (если абсциссы всех этих точек различны). Иными словами, зная, например, координаты точек A, M, N (рис. 198), можно провести через эти точки дугу параболы вида (13) и притом только одну.

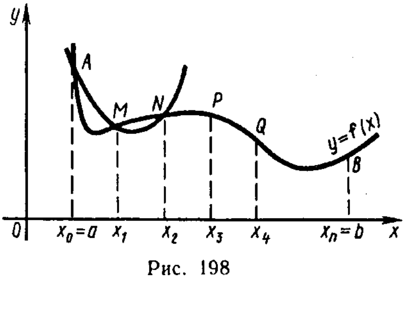

Рис. 198

В методе парабол отрезок $[a, b]$ делят на четное число равных частей и проводят дуги парабол указанного вида через каждую тройку точек (дуга первой параболы пройдет через точки A, M, N, дуга второй параболы — через точки N, P и Q и т. д.). Соответственно криволинейную трапецию под кривой $y=f(x)$ заменяют не суммой площадей прямолинейных фигур, как в предыдущих методах, а суммой криволинейных трапеций, ограниченных дугами парабол. Площади таких криволинейных трапеций легко вычисляются.

В курсе математического анализа выводится формула

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{3n}\,(y_0+y_n+2(y_2+y_4+\cdots+y_{n-2})+$$
$$+4(y_1+y_3+\cdots y_{n-1})), \qquad (14)$$

где n — четное число. Она называется *формулой парабол* (*формулой Симпсона*).

Применение этой формулы значительно повышает точность вычисления определенного интеграла.

Например, если по формуле Симпсона вычислить интеграл $I=\int_0^1 x^4dx$ при $n=10$, то получим $I\approx 0{,}200013$. Точное значение интеграла $I=\frac{x^5}{4}\Big|_0^1=0{,}2$, а относительная погрешность $\delta=$ $=\frac{0{,}200013-0{,}2}{0{,}2}\cdot 100\,\%\approx 0{,}01\,\%$.

362. Вычислить по формуле Симпсона интеграл $\int_1^4 x^2dx$.

Решение. Разобьем отрезок интегрирования на 10 равных частей. Тогда $(b-a)/3n=3/30=1/10=0{,}1$. Подставляя в подынтегральную функцию $y=x^2$ значения аргумента $x_0=1$, $x_1=1{,}3$; $x_2=1{,}6$, ..., $x_{10}=4$, найдем соответствующие значения ординат: $y_0=1$; $y_1=1{,}69$; $y_2=2{,}56$; $y_3=3{,}61$; $y_4=4{,}84$; $y_5=6{,}25$; $y_6=7{,}84$; $y_7=9{,}61$; $y_8=11{,}56$; $y_9=13{,}69$; $y_{10}=16$.

Применяя формулу (14), получим

$$\int_1^4 x^2dx=0{,}1((1+16)+2(2{,}56+4{,}84+7{,}84+11{,}56)+4(1{,}69+3{,}61+6{,}25+$$
$$+9{,}61+13{,}69))=21.$$

Вычисление интеграла по формуле Ньютона—Лейбница дает

$$\int_1^4 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_1^4=\frac{64}{3}-\frac{1}{3}=21.$$

Таким образом, применяя формулу Симпсона, в данном случае мы получили точное значение интеграла.

Заметим, что хотя метод прямоугольников является наиболее простым методом приближенного вычисления определенных интегралов, он дает наименее точные результаты. Выбор метода приближенного интегрирования зависит от подынтегральной функции и требуемой точности расчета.

§ 10. Применение определенного интеграла к решению физических задач

Схема решения задач на приложения определенного интеграла
Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении
Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела
Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины
Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку

1. Схема решения задач на приложения определенного интеграла

С помощью определенного интеграла можно решать различные задачи физики, механики и т. д., которые трудно или невозможно решить методами элементарной математики.

Так, понятие определенного интеграла применяется при решении задач на вычисление работы переменной силы, давления жидкости на вертикальную поверхность, пути, пройденного телом, имеющим переменную скорость, и ряд других.

Несмотря на разнообразие этих задач, они объединяются одной и той же схемой рассуждений при их решении. Искомая величина (путь, работа, давление и т. д.) соответствует некоторому промежутку изменения переменной величины, которая является переменной интегрирования. Эту переменную величину обозначают через x, а промежуток ее изменения — через $[a, b]$.

Отрезок $[a, b]$ разбивают на n равных частей, в каждой из которых можно пренебречь изменением переменной величины. Этого можно добиться при увеличении числа разбиений отрезка. На каждой такой части задачу решают по формулам для постоянных величин.

Далее составляют сумму (интегральную сумму), выражающую приближенное значение искомой величины. Переходя к пределу при $n \to \infty$, находят искомую величину I в виде интеграла $I = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ — данная по условиям задачи функция (сила, скорость и т. д.).

2. Нахождение пути, пройденного телом при прямолинейном движении

Как известно, путь, пройденный телом при равномерном движении за время t, вычисляется по формуле $S = vt$.

Если тело движется неравномерно в одном направлении и скорость его меняется в зависимости от времени t, т. е. $v = f(t)$, то для нахождения пути, пройденного телом за время от t_1 до t_2, разделим этот промежуток времени на n равных частей Δt. В каждой из таких частей скорость можно считать постоянной и равной значению скорости в конце этого промежутка. Тогда пройденный телом путь будет приближенно равен сумме $\sum_{k=1}^{n} v(t)\Delta t$, т. е.

$$s \approx \sum_{k=1}^{n} v(t)\Delta t.$$

Если функция $v(t)$ непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} v(t_k)\Delta t = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt.$$

Итак,

$$s = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt. \qquad (1)$$

363. Скорость движения материальной точки задается формулой $v=(4t^3-2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 4 с от начала движения.

Решение. Согласно формуле (1), имеем

$$s=\int_0^4 (4t^3-2t+1)\,dt=(t^4-t^2+t)\Big|_0^4=256-16+4=244 \text{ (м)}.$$

Итак, за 4 с точка прошла 244 м.

364. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=$ $=(3+3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за первые 5 с от начала движения.

365. Скорость движения тела изменяется по закону $v(t)=$ $=(3t^2+t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 4 с от начала движения.

366. Скорость движения изменяется по закону $v(t)=2t$ м/с. Найти длину пути, пройденного телом за 3-ю секунду его движения.

Решение. $s=\int_2^3 2t\,dt=t^2\Big|_2^3=9-4=5$ (м).

367. Найти путь, пройденный телом за 10-ю секунду, зная, что скорость его прямолинейного движения выражается формулой $v=(t^2+4t-2)$ м/с.

368. Найти путь, пройденный телом за 4-ю секунду, если скорость его прямолинейного движения изменяется по закону $v=$ $=(3t^2-2t-3)$ м/с.

369. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=$ $=(t+6t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за 2-ю секунду.

370. Скорость движения тела задана уравнением $v=(12t-3t^2)$ м/с. Определить путь, пройденный телом от начала движения до остановки.

Решение. Скорость движения тела равна нулю в моменты начала его движения и остановки. Найдем момент остановки тела, для чего приравняем скорость нулю и решим уравнение относительно t; получим $12t-3t^2=0$; $3t(4-t)=0$; $t_1=0$, $t_2=4$. Следовательно,

$$s=\int_0^4(12t-3t^2)dt=(6t^2-t^3)\Big|_0^4=6\cdot4^2-4^3=32\ (\text{м}).$$

371. Тело брошено вертикально вверх со скоростью, которая изменяется по закону $v=(29{,}4-9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема.

Решение. Найдем время, в течение которого тело поднималось вверх: $29{,}4-9{,}8t=0$ (в момент наибольшего подъема скорость равна нулю); $t=3$ (с). Поэтому

$$s=\int_0^3(29{,}4-9{,}8t)dt=9{,}8\left(3t-\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^3=44{,}1\ (\text{м}).$$

372. Скорость движения точки выражается формулой $v=(18t-3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.

373. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки, если скорость ее прямолинейного движения изменяется по закону $v=(15t-5t^2)$ м/с.

374. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v=(49-9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту его подъема.

375. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v=(39{,}2-9{,}8)$ м/с. Найти наибольшую высоту его подъема.

376. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=(2t+a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что за промежуток времени от $t_1=0$ до $t_2=2$ с тело прошло путь 40 м.

377. Тело движется прямолинейно со скоростью $v(t)=(4t+a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что путь, пройденный телом за 2 с от начала движения, равен 48 м.

378. Два тела одновременно выходят из одной точки: одно — со скоростью $v_1=5t$ м/с, другое — со скоростью $v_2=3t^2$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 20 с, если движутся по прямой в одном направлении?

Решение. $s_1=\int_0^{20}5t\,dt=5\cdot\frac{t^2}{2}\Big|_0^{20}=5\cdot200=1000$ (м);

$$s_2=\int_0^{20}3t^2dt=t^3\Big|_0^{20}=8000\ (\text{м});\quad s=s_2-s_1=8000-1000=7000\ (\text{м}).$$

379. Два тела одновременно начали прямолинейное движение из некоторой точки в одном направлении. Первое тело движется со скоростью $v_1=(6t^2+2t)$ м/с, второе — со скоростью

$v_2=(4t+5)$ м/с. На каком расстоянии друг от друга они окажутся через 5 с?

380. Два тела одновременно начали прямолинейное движение из некоторой точки в одном направлении со скоростями $v_1=(6t^2+4t)$ м/с и $v_2=4t$ м/с. Через сколько секунд расстояние между ними будет равно 250 м?

Решение. Пусть t_1 — момент встречи. Тогда

$$s_1=\int_0^{t_1}(6t^2+4t)=(2t^3+2t^2)\Big|_0^{t_1}=2t_1^3+2t_1^2;\quad s_2=\int_0^{t_1}4t\,dt=2t^2\Big|_0^{t_1}=2t_1^2.$$

Так как $s_1-s_2=250$, то получаем уравнение $2t_1^3+2t_1^2-2t_1^2=250$ или $2t_1^3=250$, откуда $t_1^3=125$, т. е. $t=5$ (с).

3. Вычисление работы силы, произведенной при прямолинейном движении тела

Пусть тело под действием силы F движется по прямой s, а направление силы совпадает с направлением движения. Необходимо найти работу, произведенную силой F при перемещении тела из положения a в положение b.

Если сила F постоянна, то работа находится по формуле $A=F(b-a)$ (произведение силы на длину пути).

Пусть на тело, движущееся по прямой Ox, действует сила F, которая изменяется в зависимости от пройденного пути, т. е. $F=f(x)$. Для того чтобы найти работу, совершаемую силой F на отрезке пути от a до b, разделим этот отрезок на n равных частей Δx. Предположим, что на каждой части Δx сила сохраняет постоянное значение $F(x_1)$, $F(x_2)$, ..., $F(x_k)$, ..., $F(x_n)$.

Составим интегральную сумму, которая приближенно равна значению произведенной работы:

$$A\approx F(x_1)\Delta x+F(x_2)\Delta x+\dots+F(x_k)\Delta x+\dots+F(x_n)\Delta x,$$

т. е. работа, совершенная этой силой на участке от a до b, приближенно равна сумме $\sum\limits_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x_k$:

$$A\approx\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x.$$

Если функция $f(x)$ непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f(x_k)\Delta x=\int_a^b f(x)dx.$$

Итак, работа переменной силы вычисляется по формуле

$$A=\int_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

4. Вычисление работы, затраченной на растяжение или сжатие пружины

Согласно закону Гука, сила F, необходимая для растяжения или сжатия пружины, пропорциональна величине растяжения или сжатия.

Пусть x — величина растяжения или сжатия пружины. Тогда $F = kx$, где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от свойства пружины.

Работа на участке Δx выразится формулой $\Delta A \approx F\Delta x$, а вся затраченная работа — формулой $A \approx \sum\limits_{x_0}^{x_1} F\Delta x$ или $A \approx \sum\limits_{x_0}^{x_1} kx\Delta x$. Если $\Delta x \to 0$, то погрешность величины работы стремится к нулю.

Для нахождения истинной величины работы следует перейти к пределу:

$$A = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} F\Delta x = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{x_0}^{x_1} kx\Delta x = \int_{x_0}^{x_1} kx\,dx.$$

Итак,

$$A = k\int_{x_0}^{x_1} x\,dx. \tag{3}$$

381. Какую работу совершает сила в 10 Н при растяжении пружины на 2 см?

Решение. По закону Гука сила F, растягивающая пружину, пропорциональна растяжению пружины, т. е. $F = kx$. Используя условие, находим $k = \frac{10}{0{,}02} = 500$ (Н/м), т. е. $F = 500x$. Согласно формуле (3), получим

$$A = \int_0^{0{,}02} 500x\,dx = \frac{500x^2}{2}\Big|_0^{0{,}02} = 0{,}1 \ \text{(Дж)}.$$

382. Сила в 60 Н растягивает пружину на 2 см. Первоначальная длина пружины равна 14 см. Какую работу нужно совершить, чтобы растянуть ее до 20 см?

Решение. Имеем $k = \frac{60}{0{,}02} = 3000$ (Н/м) и, следовательно, $F = 3000x$. Так как пружину требуется растянуть на 0,06 (м), то

$$A = \int_0^{0{,}06} 3000x\,dx = 1500x^2\Big|_0^{0{,}06} = 1500 \cdot 0{,}06^2 = 5{,}4 \ \text{(Дж)}.$$

383. Какую работу совершает сила в 8 Н при растяжении пружины на 6 см?

384. Сила в 40 Н растягивает пружину на 0,04 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 0,02 м?

385. При растяжении пружины на 5 см затрачивается работа 29,43 Дж. На сколько растянется пружина, если затратить работу 9,81 Дж?

Решение. Здесь $A_1 = 29{,}4$ Дж, $x_0 = 0$, $x_1 = 0{,}05$ м. Так как $A_1 = k\int\limits_{x_0}^{x_1} x\,dx$, то получаем уравнение $29{,}43 = k\int\limits_0^{0{,}05} x\,dx$ или $29{,}43 = k \times \dfrac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}05}$, откуда $k = \dfrac{29{,}43\cdot 2}{0{,}0025} = 23\,544$.

Далее, из уравнения $A_2 = k\int\limits_{x_0}^{x_2} x\,dx$, где $A_2 = 9{,}81$ Дж, $x_0 = 0$, $k = 23\,544$, найдем x_2. Имеем $9{,}81 = 23\,544\dfrac{x^2}{2}\Big|_0^{x_2}$, откуда $x_2^2 = \dfrac{9{,}81\cdot 2}{23\,544} = 0{,}00083$, т. е. $x_2 = \sqrt{0{,}00083} \approx 0{,}029$ (м).

386. Для сжатия пружины на 3 см необходимо совершить работу в 16 Дж. На какую длину можно сжать пружину, совершив работу в 144 Дж?

387. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 20 см. Сила в 9,8 Н растягивает ее на 2 см. Определить работу, затраченную на растяжение пружины от 25 до 35 см.

388. Пружина в спокойном состоянии имеет длину 20 см. Сила в 50 Н растягивает ее на 1 см. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину от 22 до 32 см?

5. Определение силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку

Из физики известно, что сила P давления жидкости на горизонтально расположенную площадку S, глубина погружения которой равна h, определяется по формуле

$$P = 9{,}81\gamma h S, \tag{4}$$

где γ — плотность жидкости.

Выведем формулу для вычисления силы давления жидкости на вертикально расположенную пластинку произвольной формы, если ее верхний край погружен на глубину a, а нижний — на глубину b.

Так как различные части вертикальной пластинки находятся на разной глубине, то сила давления жидкости на них неодинакова. Для вывода формулы нужно разделить пластинку на n горизонтальных полос одинаковой высоты Δx. Каждую полосу приближенно можно считать прямоугольником (рис. 199).

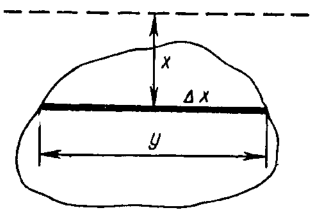

Рис. 199

По закону Паскаля сила давления жидкости на такую полосу равна силе движения жидкости на горизонтально расположенную пластинку той же площади, погруженной на ту же глубину.

Тогда согласно формуле (4) сила давления на полосу, находящуюся на расстоянии x от поверхности, составит

$$\Delta P \approx 9{,}81\gamma xy\Delta x,$$

где $y\Delta x$ — площадь полосы.

Составим интегральную сумму и найдем ее предел, равный силе давления жидкости на всю пластинку:

$$P = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_a^b 9{,}81\gamma xy\Delta x = \int_a^b 9{,}81\gamma xy\, dx,$$

т. е.

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\, dx. \qquad (5)$$

Если верхний край пластинки совпадает с поверхностью жидкости, то $a = 0$ и формула (5) примет вид

$$P = 9{,}81\gamma \int_0^b xy\, dx.$$

Ширина каждой полосы зависит от формы пластинки и является функцией глубины x погружения данной полосы.

Для пластинки постоянной ширины формула (5) упрощается, так как эту постоянную можно вынести за знак интеграла:

$$P = 9{,}81\gamma \int_a^b xy\, dx = 9{,}81\gamma y \int_a^b x\, dx = 9{,}81\gamma y \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = 9{,}81\gamma y \frac{b^2 - a^2}{2}.$$

389. Определить силу давления воды на стенку шлюза, длина которого 20 м, а высота 5 м (считая шлюз доверху заполненным водой).

Решение. Здесь $y = f(x) = 20$, $a = 0$, $b = 5$ (м), $\gamma = 1000$ кг/м^3. Используя формулу (5), находим

$$P = 9810 \int_0^5 20x\, dx = 9810 \cdot 20 \frac{x^2}{2}\Big|_0^5 = 9810 \cdot 10 \cdot 25 = 2{,}45 \cdot 10^6 \text{ (Н)}.$$

390. Вычислить силу давления воды на вертикальную прямоугольную пластинку, основание которой 30 м, а высота 10 м, причем верхний конец пластинки совпадает с уровнем воды.

391. Вычислить силу давления воды на одну из стенок аквариума, имеющего длину 30 см и высоту 20 см.

392. В воду опущена прямоугольная пластинка, расположенная вертикально. Ее горизонтальная сторона равна 1 м, вертикальная 2 м. Верхняя сторона находится на глубине 0,5 м. Определить силу давления воды на пластинку.

Решение. Здесь $y = 1$, $a = 0{,}5$, $b = 2 + 0{,}5 = 2{,}5$ (м), $\gamma =$ $= 1000$ кг/м^3. Следовательно,

$$P = 9810\int_a^b xy\,dx = 9810\int_a^b x\,dx = 9810\frac{x^2}{2}\Big|_{0,5}^{2,5} = 9810\frac{2,5^2-0,5^2}{2} =$$
$$= 29\,430 \text{ (Н)}.$$

393. Вычислить силу давления на прямоугольную пластинку с основанием 16 см и высотой 24 см, погруженную вертикально в воду так, что верхнее основание пластинки находится на 10 см ниже свободной поверхности воды.

394. Вычислить силу давления на прямоугольную пластинку с основанием 8 см и высотой 10 см, погруженную вертикально в воду так, что верхнее основание пластинки находится на 2 см ниже поверхности воды.

395. Пластинка в виде треугольника, основание которого равно 4 см, а высота 3 см, погружена вертикально в воду. Найти силу давления воды на эту пластинку, если ее вершина лежит на поверхности воды (рис. 200).

Решение. Снова воспользуемся формулой (5). Здесь $a=0$, $b=3$ см $=0{,}03$ м, $|AC|=4$ см $=0{,}04$ м, $\gamma=1000$ кг/м^3.

Из подобия треугольников DBE и ABC (рис. 200) имеем $\frac{|DF|}{|AC|} = \frac{|BK|}{|BE|}$, или $\frac{y}{0{,}04}=\frac{x}{0{,}03}$. Следовательно, $y=\frac{0{,}04x}{0{,}03}$, или $y=\frac{4}{3}x$.

Подставляя все данные в расчетную формулу, получим

$$P = 9810\int_0^{0,03} x\cdot\frac{4}{3}x\,dx = 9810\cdot\frac{4}{3}\int_0^{0,03} x^2dx = \frac{9810\cdot 4}{3}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,03} =$$
$$= \frac{9810\cdot 4}{9}\cdot 0{,}03^3 \approx 0{,}117 \text{ (Н)}.$$

396. Треугольник ABC погружен вертикально в бак с бензином (вершиной кверху), так, что его основание расположено горизонтально, а вершина лежит на поверхности жидкости (рис. 201). Вычислить силу давления на треугольник, если его основание $|AC|=10$ см, высота $h=8$ см, плотность $\gamma=0{,}7$ г/см^3.

397. Вычислить силу давления на треугольник с основанием 10 см и высотой 4 см, погруженный вертикально в воду так, что его вершина лежит на поверхности воды.

398. Треугольная пластинка с основанием 0,2 м и высотой 0,4 м погружена вертикально в воду так, что вершина лежит на

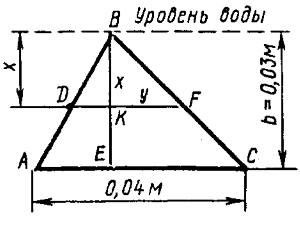

Рис. 200

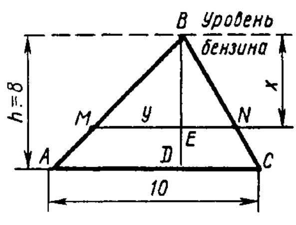

Рис. 201

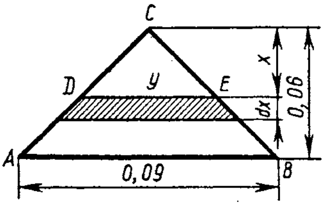

Рис. 202

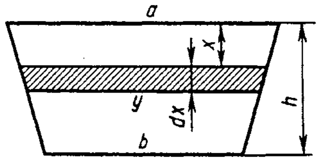

Рис. 203

поверхности воды, а основание параллельно ей. Вычислить силу давления воды на пластинку.

399. Треугольник с основанием 9 см и высотой 6 см полностью погружен вертикально в воду (вершиной кверху) так, что его основание параллельно свободной поверхности воды, а вершина отстоит от этой поверхности на 4 см. Найти силу давления воды на треугольник (рис. 202).

Пусть плотина имеет вид трапеции с высотой h, верхним основанием a и нижним основанием b. Найдем силу давления воды на эту плотину, если вода доходит до ее верхнего края.

Рассмотрим элементарный слой, находящийся на глубине x и имеющий высоту dx (рис. 203). Легко установить, что длина y этого слоя равна $a-\frac{(a-b)x}{h}$, а его площадь составляет $\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)dx$. Сила давления dP на этот слой равна $9{,}81\gamma x\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)dx$, а сила давления воды на всю плотину выражается интегралом:

$$P=9{,}81\gamma\int_0^h\left(a-\frac{(a-b)x}{h}\right)x\,dx=\frac{9{,}81\gamma(a+2b)h^2}{6}. \qquad (6)$$

400. Вычислить силу давления воды на плотину, имеющую форму трапеции, у которой верхнее основание, совпадающее с поверхностью воды, имеет длину 10 м, нижнее основание — 20 м, а высота 3 м.

Решение. Используя формулу (6), находим

$$P=9810\frac{(10+2\cdot20)3^2}{6}=9810\cdot\frac{450}{6}=735\,750 \text{ (Н)}.$$

401. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой 38 м, нижнее — 20 м и высота 12 м. Уровень воды доходит до верха плотины.

402. Вычислить силу давления воды на вертикальную плотину, имеющую форму равнобочной трапеции, верхнее основание которой равно 4,5 м, а нижнее основание — 3 м. Высота трапеции равна 2 м.

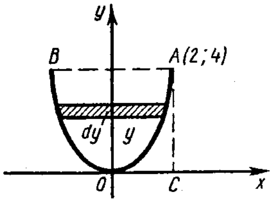

Рис. 204

403. Определить силу давления воды на вертикальный параболический сегмент, основание которого равно 4 м и расположено на поверхности воды, а вершина находится на глубине 4 м (рис. 204).

Решение. Имеем $|BA|=2x=4$ (м). Точка A в выбранной системе координат имеет координаты (2; 4). Уравнение параболы относительно этой системы есть $y=ax^2$ или $4=a\cdot 2^2$, откуда $a=1$, т. е. $y=x^2$.

Рассмотрим элементарную площадку dS на расстоянии y от начала координат. Длина этой площадки равна $2x$, а ее площадь $dS=2x\,dy$, где dy — ширина площадки. Эта площадка будет испытывать силу давления

$$dP=9{,}81\gamma(4-y)dS=9{,}81\gamma(4-y)2x\,dy.$$

Просуммируем все элементарные силы давления при изменении от 0 до 4 и перейдем к пределу при $\Delta y\to 0$. Тогда сила давления на весь сегмент выразится следующим интегралом:

$$P=9{,}81\gamma\int_0^4(4-y)2x\,dy.$$

Для нахождения этого интеграла выразим x через y; так как $y=x^2$, то $x=\sqrt{y}$. Тогда получим

$$P=19{,}62\cdot 1000\int_0^4(4-y)\sqrt{y}dy=19\,620\left(\int_0^4 4\sqrt{y}dy-\int_0^4 y\sqrt{y}dy\right)=$$

$$=19\,620\left(4\int_0^4 y^{1/2}dy-\int_0^4 y^{3/2}dy\right)=19\,620\left(\frac{4y^{3/2}}{3/2}-\frac{y^{5/2}}{5/2}\right)\Big|_0^4=$$

$$=19\,620\left(\frac{8}{3}y^{3/2}-\frac{2}{5}y^{5/2}\right)\Big|_0^4=19\,620\left(\frac{8\cdot 2}{3}-\frac{2\cdot 32}{5}\right)=$$

$$=\frac{19\,620\cdot 128}{15}=167\,424\ \text{(Н)}.$$

404. Цилиндрический стакан наполнен ртутью. Вычислить силу давления ртути на боковую поверхность стакана, если его высота 0,1 м, а радиус основания 0,04 м. Плотность ртути равна 13 600 кг/м^3.

Решение. Вычислим площадь круглой полоски:

$$\Delta S=2\pi r\,dx=0{,}08\pi\,dx.$$

Элементарная сила давления составляет

$$\Delta P=9{,}81\cdot 136{,}00\cdot 0{,}08\pi dx=10\,673\pi dx.$$

Следовательно,

$$P=\int_0^{0,1}10\,673\pi x\,dx=10\,673\pi\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0,1}=53{,}37\pi\approx 167{,}6\ \text{(Н)}.$$

405. Вычислить силу давления бензина на стенки цилиндрического бака высотой 3 м и радиусом основания 1 м.

406. Горизонтально расположенная цилиндрическая цистерна наполнена до половины керосином. Найти силу давления на каждую из боковых стенок, если радиус дна цистерны равен 2 м, плотность керосина $\gamma = 0{,}8$ г/см^3 (рис. 205).

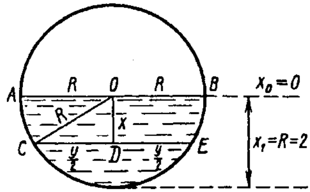

Рис. 205

407. В воду опущен полукруглый диск радиуса 2 м. Верхний край диска (горизонтальный диаметр) находится на поверхности воды. Определить силу давления воды на диск.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Что является основной задачей интегрального исчисления?
2. Какая функция называется первообразной для заданной функции?
3. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то каким равенством связаны они между собой?
4. Запишите первообразные для функций: 3, $4x^3$, $\cos x$, $2/x$.
5. Какая из двух функций $5x^4$ и x^5+4 является первообразной для другой?
6. Докажите, что функция $F(x)$ есть первообразная для функции $f(x)$ на указанном промежутке, если: а) $F(x)=3\sqrt[3]{x}$, $f(x)=1/\sqrt[3]{x^2}$, $x\in(0;\ \infty)$; б) $F(x)=\sin x+5$, $f(x)=\cos x$, $x\in(-\infty,\ \infty)$.
7. Первообразная определяется неоднозначно. Как это нужно понимать?
8. Почему при интегрировании функций появляется произвольная постоянная?
9. Почему одна функция имеет целую совокупность первообразных?
10. Как записать всю совокупность первообразных функций?
11. Что называется неопределенным интегралом?
12. Чем отличается неопределенный интеграл от первообразной функции?
13. Почему интеграл называется неопределенным?
14. Как называются все элементы равенства $\int f(x)dx = F(x)+C$?
15. Чем отличаются друг от друга подынтегральная функция и подынтегральное выражение?
16. Что означает постоянная C в определении неопределенного интеграла?
17. Чему равны производная и дифференциал неопределенного интеграла?
18. В чем заключается правило интегрирования выражения, содержащего постоянный множитель?
19. В чем заключается правило интегрирования алгебраической суммы функций?
20. Чему равен интеграл от дифференциала некоторой функции?
21. Напишите основные формулы интегрирования.
22. Как доказать справедливость каждой формулы интегрирования?
23. Почему $n \neq -1$ для интеграла $\int x^n dx$? В какой формуле рассматривается этот случай?
24. Запишите неопределенные интегралы для выражений: а) $3\sin x\,dx$; б) x^2dx; в) $\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
25. Как проверить результат интегрирования?

26. Какие из следующих равенств записаны верно, а какие нет: а) $\int x^3dx = 3x^2+C$; б) $\frac{dx}{x} = \ln x + C$; в) $\int (1+x)dx = x + \frac{x^2}{2} + C$?

27. В чем состоит геометрический смысл неопределенного интеграла?

28. Что такое интегральные кривые? Как они расположены друг относительно друга? Могут ли они пересекаться?

29. Как расположены касательные к интегральным кривым в точках, имеющих одну и ту же абсциссу?

30. Как из семейства интегральных кривых выделить одну из них?

31. Как определить постоянную интегрирования по начальным данным?

32. В семействе кривых $y = \int x\,dx$ найдите кривую, проходящую через точку $(2; 3)$.

33. Для функции $f(x) = 1/\sqrt{x}$ найдите первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $M(4; 5)$.

34. Скорость прямолинейно движущейся точки меняется по закону $v = 3t^2 + 1$. Найдите закон движения.

35. Укажите целесообразные подстановки для нахождения следующих интегралов: а) $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}dx$; в) $\int x^3\sqrt[5]{1-3x^4}dx$.

36. Укажите, какие из следующих интегралов целесообразно интегрировать по частям: а) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$; б) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; в) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{4-x^2}}$; г) $\int \frac{\arcsin x\,dx}{x^2}$; д) $\int \cos x \ln(\sin x)dx$.

37. Что такое определенный интеграл?

38. Что в записи $\int_a^b f(x)dx$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)$; г) $f(x)dx$? Может ли быть $a = b$; $a > b$?

39. Зависит ли приращение $F(b) - F(a)$ от выбора первообразной?

40. Вычислите: а) $\int_{-1}^{2} x^3dx$; б) $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos x\,dx$.

41. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

42. Вычислите интегралы: а) $\int_1^4 \left(x^2 - \frac{3}{4} + \frac{5}{x\sqrt{x}}\right)dx$; б) $\int_0^{\pi/2} \sqrt[3]{\cos x}\sin x\,dx$.

43. В чем заключается геометрический смысл определенного интеграла?

44. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?

45. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

46. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = \frac{1}{2}x + 3$, $x = 4$ и осью абсцисс.

47. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \frac{1}{2}x^2$, $x + y - 4 = 0$.

48. Вычислите приближенные значения интеграла $\int_0^5 (3x^2 + 2x)dx$ по формулам прямоугольников и трапеций, полагая $n = 10$. Найдите относительные погрешности результатов.

49. Скорость движения точки меняется по закону $v = 4t - t^2$. Найдите путь, пройденный точкой за первые 3 с движения.

50. Найдите работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого $l = 20$ м, а радиус основания $r = 20$ м.

51. Треугольник ABC, основание которого $|AC| = 12$ дм, а высота равна 9 дм, погружен вертикально (вершиной вниз) в воду так, что основание треугольника параллельно свободной поверхности воды и находится от нее на глубине 1 дм. Определите силу давления на треугольник.

Ответы

4. $3x$; x^4; $\sin x$; $2\ln x$. **5.** $x^5 + 4$ является первообразной функции $5x^4$. **6.** а) $(3\sqrt[3]{x})' = (3x^{1/3})' = x^{-2/3} = 1/\sqrt[3]{x^2}$; б) $(\sin x + 5)' = (\sin x)' + (5)' = \cos x$. **24.** а) $\int 3\sin x\,dx = -3\cos x + C$; б) $\int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 + C$; в) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$. **26.** а), б) Неверно; в) верно. **32.** $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$. **33.** $F(x) = 2\sqrt{x} + 1$. **34.** $s = t^3 + t + C$. **35.** а) $t = \operatorname{arctg} x$; б) $u = 1 + \ln x$; в) $z = 1 - 3x^4$. **40.** а) 3,75; б) 0,5. **42.** а) 23,75; б) 0,75. **46.** 21 кв. ед. **47.** $17\frac{2}{3}$ кв. ед. **48.** 149,69, 0,21 %; 150,63 0,42 %. **49.** 9 м. **50.** 130 760 000 Дж. **51.** 2119 Н.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите интеграл $\int 6x^2(1 - x^3)dx$.

2. Определите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $x = -1$, $x = 2$ и $y = 0$.

3. Вычислите интеграл $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ по формуле прямоугольников при $n = 10$ с точностью до 0,001.

4. Скорость движения тела изменяется по закону $v(t) = 3t^2$. Найдите путь, пройденный телом за 7 с от начала движения.

5. Вычислите работу, затраченную при растяжении каучукового шнура на 20 см, если растяжение пропорционально приложенной силе и сила в 2,6 Н удлиняет шнур на 2 см.

Вариант 2

1. Найдите интеграл $\int \operatorname{ctg} x\,dx$.

2. Определите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $x - y + 2 = 0$.

3. Вычислите интеграл $\int_0^2 \sqrt{x+5}\,x\,dx$ приближенно по формуле трапеций (при $n = 10$), а затем найдите его по формуле Ньютона — Лейбница. Сравнив полученные результаты, установите относительную погрешность.

4. Мяч брошен с высоты $h = 2$ м вертикально вверх с начальной скоростью 15 м/с. На какую наибольшую высоту он поднимается?

5. Горизонтально лежащая труба, поперечным сечением которой является круг диаметром 6 м, наполнена наполовину нефтью, плотность которой $\gamma = 0{,}76$ г/см^3. Найдите силу давления на вертикальную заслонку, закрывающую трубу.

Ответы

Вариант 1. 1. $2x^3 - x^6 + C$. 2. $S = 9$ кв. ед. 3. $\approx 0{,}719$. 4. $s = 343$ м. 5. $A = 2{,}6$ Дж. Вариант 2. 1. $\ln|\sin x| + C$. 2. $S = 4{,}5$ кв.ед. 3. 5,283; 5,273; $\delta \approx 0{,}2\,\%$. 4. $\approx 13{,}25$ м. 5. 134 064 Н.