Глава IV
Производная и ее приложения

§ 1. Свойства и графики основных элементарных функций

Постоянные и переменные величины
Область изменения переменной
Определение функции. Частное значение функции
Область определения функции
Способы задания функции
Основные свойства функций
Основные элементарные функции

1. Постоянные и переменные величины

Все величины, изучаемые в математике, делятся на постоянные и переменные.

Определение 1. Величина называется *постоянной*, если она в условиях данного эксперимента сохраняет одно и то же значение.

Например, длина радиуса одной окружности, температура кипения воды при постоянном давлении являются величинами постоянными.

Некоторые постоянные величины сохраняют свое числовое значение при любых условиях и называются *абсолютными постоянными*. Примерами абсолютных постоянных являются: все числа, сумма внутренних углов треугольника, количество секунд в минуте, скорость света в пустоте.

Определение 2. Величина называется *переменной*, если она в условиях данного эксперимента может принимать различные значения.

Например, скорость камня, брошенного вверх, есть величина переменная: сначала она уменьшается до нуля, а затем, при свободном падении, увеличивается. Примерами других переменных величин могут служить температура, время и т. п.

1. Согласно закону Бойля—Мариотта, при изотермическом

процессе $PV=C$, где P — давление газа, а V — занимаемый им объем. Указать в этой формуле переменные и постоянные величины.

Решение. Здесь величина C — постоянная для данного газа и данной температуры; величины P и V — переменные.

2. Период малых колебаний T математического маятника вычисляется по формуле $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника, g — ускорение силы тяжести. Какие из величин, входящих в эту формулу, являются постоянными, а какие — переменными?

Решение. Здесь g — постоянная, которая в данной точке земной поверхности не изменяется; 2 и π — абсолютные постоянные; l и T — переменные.

3. Предположим, что дверь постепенно открывается. Пусть α — угол, который дверь составляет со стеной. Какие из нижеперечисленных величин при этом являются переменными, а какие — постоянными: $\sin\alpha$; $\cos 2\pi$; $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha-1$; $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$?

2. Область изменения переменной.

Совокупность тех значений, которые может принимать данная переменная величина, принято называть *областью изменения* этой величины. Для указания этой области вводятся понятия интервала и отрезка.

Интервалом называется множество значений переменной x, удовлетворяющих условиям $a<x<b$. Интервал обозначается (a, b).

Если одно из чисел a или b присоединяется к указанному множеству значений переменной, то получается *полузамкнутый интервал (полуинтервал)*. Он задается неравенствами $a\leqslant x<b$ или $a<x\leqslant b$ и обозначается соответственно $[a, b)$ или $(a, b]$.

Отрезком называется множество значений переменной x, удовлетворяющих условиям $a\leqslant x\leqslant b$. Отрезок обозначается $[a, b]$.

Если рассматривается множество всех действительных чисел, то это записывается как бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$ и означает, что $-\infty<x<\infty$.

Общее название для интервала, полуинтервала и отрезка — *промежуток.*

4. Что означают записи: а) (a, ∞); $[a, \infty)$; б) $(-\infty, b)$; $(-\infty, b]$?

Решение. а) Под записью (a, ∞) следует понимать множество действительных чисел, бо́льших числа a, а под записью $[a, \infty)$ — множество действительных чисел, бо́льших или равных (т. е. не меньших) a.

б) Запись $(-\infty, b)$ означает множество действительных чисел, меньших числа b, а запись $(-\infty, b]$ — множество действительных чисел, не больших числа b.

Множество всех целых чисел обозначается через **Z**, а множество действительных чисел — через **R**. Тот факт, что переменная x принимает действительные значения, обозначается так: $x \in \mathbf{R}$. Тогда запись $x \in [a, b]$ означает, что x принадлежит отрезку $[a, b]$.

5. Какие записи являются ошибочными: $3{,}4 \in [2; 3{,}4)$; $3{,}4 \in [2; 3{,}4]$; $3{,}4 \in [2, 3]$; $3{,}4 \in (2, 5)$; $3{,}4 \in [3{,}4; 5)$?

Решение. Ошибочны записи $3{,}4 \in [2; 3{,}4)$ и $3{,}4 \in [2{,}3]$, так как число 3,4 не удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant 3{,}4 < 3{,}4$ и $2 \leqslant 3{,}4 \leqslant 3$.

6. Заменить неравенство записью, в которой используются знак $\in$ и обозначения интервала и отрезка: а) $-2 < 0 < 1$; б) $-1 \leqslant a \leqslant 5$; в) $-5{,}2 < x < -4{,}2$.

Решение. а) $0 \in (-2, 1)$; б) $a \in [-1{,}5]$; в) $x \in (-5{,}2; -4{,}2)$.

3. Определение функции. Частное значение функции

В практических задачах часто имеют дело с переменными величинами, которые связаны между собой так, что значения одной величины определяют значения другой. Эта зависимость между двумя переменными величинами носит взаимный характер, и ни одна из этих величин не играет сама по себе первенствующей роли. Однако в условиях конкретной задачи часто случается так, что заданы значения некоторой величины x (независимой переменной) и по ним определяют соответствующие значения величины y (зависимой переменной).

7. Путь, пройденный свободно падающим телом, выражается формулой $s = \frac{gt^2}{2}$, где g — ускорение свободно падающего тела, величина для данной широты — постоянная. Указать независимую и зависимую переменные.

Решение. Придавая времени t различные значения, мы можем определить путь s для любого заданного промежутка времени t. Таким образом, здесь t — независимая переменная, а s — зависимая от t переменная.

8. Объем шара определяется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Указать независимую и зависимую переменные.

Решение. Здесь $\frac{4}{3}\pi$ — величина постоянная. Придавая радиусу R различные значения, мы можем найти объем шара для каждого из заданных значений радиуса. Итак, радиус R является независимой переменной, а объем шара V — зависимой.

Независимую переменную величину, т. е. величину, для которой мы можем задавать произвольные, интересующие нас значения, называют *аргументом*. Переменную величину, значения которой зависят от аргумента, называют *функцией*

Так, в примере 7 переменная t является аргументом, а s — функцией. В примере 8 переменная R является аргументом, а V — функцией.

Определение 3. Переменная величина y называется *функцией* переменной величины x, если каждому значению x, взятому из области ее изменения, соответствует по определенному правилу единственное значение y.

Чтобы показать, что y есть функция переменной x, пользуются символическими записями: $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$, $y=F(x)$ и т. д.

Такая символическая запись не раскрывает самого правила зависимости y от x, и лишь устанавливает сам факт наличия зависимости.

Например, скорость свободно падающего тела — функция времени t, т. е. $v=f(t)$, а правило установления соответствия между t и v известно: $v=gt$.

Поверхность шара S есть функция его радиуса R, т. е. $S=\varphi(R)$, а правило соответствия между S и R имеет вид $S=4\pi R^2$.

Замечание. Как видно из рассмотренных выше примеров, аргумент и функция могут обозначаться не только буквами x и y, но и другими буквами.

Частное значение функции $y=f(x)$ при заданном частном значении аргумента $x=a$ символически обозначается $f(a)$ или $y|_{x=a}$.

9. Определить значение функции $f(x)=2x^2-1$ при $x=3$.

Решение. Находим $f(3)=y_{x=3}=2\cdot 3^2-1=17$.

10. Дано: $F(x)=3x^2$. Найти: $F(7)$, $F(1/2)$ $F(a)$.

11. Найти $\varphi(\pi/4)$, если $\varphi(t)=\dfrac{2t}{1+\sin^2 t}$.

Решение. $\varphi(\pi/4)=\dfrac{2\cdot\pi/4}{1+\sin^2(\pi/4)}=\dfrac{\pi/2}{1+1/2}=\dfrac{\pi}{3}$.

12. Дано: $\varphi(u)=\lg u$. Найти $\varphi(1000)$.

13. Дано: $f(x)=4x^2-3x+1$; $\varphi(x)=5x+2$. Найти $f(1)+2\varphi(0{,}2)$.

4. Область определения функции

Под *областью определения* (существования) функции $f(x)$ понимается совокупность всех действительных значений аргумента x, при которых функция определена и выражается действительным числом.

14. Найти область определения функции $y=x^2$.

Решение. Очевидно, что при любом действительном значении x функция y также выражается действительным числом. Следовательно, данная функция определена при любом значении $x\in(-\infty,\infty)$. Этот результат можно записать в виде $x\in\mathbf{R}$.

Отметим особенности отыскания области определения некоторых функций.

1. При отыскании области определения дробной функции нужно исключить значения аргумента, при которых знаменатель обращается в нуль.

15—29. Найти области определения функций:

15. $y=\frac{1}{x}$.

Решение. Знаменатель обращается в нуль при $x=0$. Данная функция принимает действительные значения для всех x, кроме $x=0$. Следовательно, областью определения данной функции являются интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

16. $y=\frac{2}{1-x}$. **17.** $y=\frac{3}{x-4}$.

18. $y=\frac{1}{2x-5}$.

Решение. Здесь $2x-5\neq 0$, откуда $x\neq 2{,}5$. Таким образом, получаем ответ: $(-\infty;\ 2{,}5)$ и $(2{,}5;\ \infty)$.

19. $y=\frac{x-1}{x+1}$. **20.** $y=\frac{2x+1}{3x-1}$.

21. $y=\frac{3}{x^2-4}$.

Решение. Приравняв знаменатель нулю, решим полученное уравнение: $x^2-4=0$; $(x+2)(x-2)=0$; $x_1=-2$, $x_2=2$. Следовательно, знаменатель обращается в нуль при значениях $x=-2$ и $x=2$, которые не могут принадлежать области определения данной функции. Исключив их, получим три интервала $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ и $(2, \infty)$, которые и служат областью определения данной функции.

22. $y=\frac{1}{1-x^2}$. **23.** $y=\frac{5}{x^2-9}$.

24. $y=\frac{x+2}{x^2-5x+6}$.

Решение. Функция определена для всех действительных значений x, кроме тех, для которых $x^2-5x+6=0$, т. е. корней квадратного трехчлена x^2-5x+6; ими являются числа $x_1=2$; $x_2=3$. Следовательно, функция определена на интервалах $(-\infty, 2)$, $(2, 3)$ и $(3, \infty)$.

25. $y=\frac{x+5}{x^2-7x+12}$. **26.** $y=\frac{x-12}{x^2+x-12}$.

27. $y=\frac{x^2-5x+4}{x^2+x+1}$.

Решение. Приравняв знаменатель дроби нулю и решив полученное квадратное уравнение $x^2+x+1=0$, убедимся, что его корни — комплексные числа: $x=-\frac{1}{2}\pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Ни при одном действительном значении x знаменатель в нуль не обращается. Поэтому данная функция определена при всех действительных значениях x. Ее областью определения является бесконечный интервал $(-\infty, \infty)$.

28. $y=\frac{2x^3-1}{x^3+1}$. **29.** $y=\frac{x-2}{x^2+2x+5}$.

Рис. 65

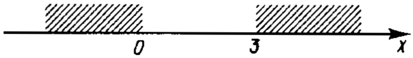

Рис. 66

2. Если аналитическое выражение функции содержит корень четной степени, то при отыскании области определения функции нужно исключить значения аргумента, при которых подкоренное выражение принимает отрицательные значения.

30—40. Найти области определения функций:

30. $y=\sqrt{x-4}$.

Решение. Заметим, что эта функция имеет смысл только в том случае, когда подкоренное выражение больше нуля либо равно нулю. Если же подкоренное выражение отрицательно, то y — мнимое число. Следовательно, $x-4\geqslant 0$ или $x\geqslant 4$. Итак, данная функция определена только в том случае, если $x\geqslant 4$, т. е. $x\in[4, \infty)$ (рис. 65).

31. $y=\sqrt{2x-4}$. **32.** $y=\sqrt{5-2x}$.

33. $y=\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$.

Решение. Найдем область определения каждого слагаемого в отдельности. Общая часть этих областей и будет областью определения функции. Для $\sqrt{x}$ имеем $x\geqslant 0$, а для $\sqrt{x-1}$ имеем $x\geqslant 1$. Тогда для суммы $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}$ область определения есть $x\geqslant 1$ или $[1, \infty)$.

34. $y=\sqrt{5-x}-\dfrac{4}{\sqrt{x-3}}$. **35.** $\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}-2\sqrt{1-x}$.

36. $y=\sqrt{2x^2-6x}$.

Решение. Область определения функции найдем из условия $2x^2-6x\geqslant 0$ или $2x(x-3)\geqslant 0$. Решениями этого неравенства являются значения $x\leqslant 0$, $x\geqslant 3$. Следовательно, областью определения функции служат полуинтервалы $(-\infty, 0]$ и $[3, \infty)$. Это можно проиллюстрировать на числовой оси (рис. 66).

37. $y=\sqrt{1-x^2}$. **38.** $y=\sqrt{3-2x-x^2}$.

39. $y=\sqrt{x^2-2x-8}$. **40.** $y=\sqrt{\dfrac{3x-2}{2x+6}}$.

3. Если аналитическое выражение функции содержит логарифм, то при отыскании области существования данной функции нужно исключить значения аргумента, при которых выражение под знаком логарифма принимает отрицательные значения и обращается в нуль.

41—52. Найти области определения функций:

41. $y=\lg(x-2)$.

Решение. Так как выражение под знаком логарифма должно быть положительно, то $x-2>0$, откуда $x>2$, т. е. данная функция существует только при $x\in(2, \infty)$.

42. $y=\lg(2x-3)$. **43.** $u=\lg(7+t)$.

44. $v=\lg\frac{3}{17-x}$. **45.** $s=\lg\frac{1}{2x-1}$.

46. $z=\log_3(x^2-9)$.

Решение. Логарифмическая функция z определена только для положительных значений своего аргумента, поэтому $x^2-9>0$. Решая это неравенство, получим $|x|>3$, откуда следует, что область определения функции z состоит из двух бесконечных интервалов $(-\infty, -3)$ и $(3, \infty)$.

47. $y=\lg(x^2+3)$. **48.** $f(x)=\lg(3x-1)+2\lg(x+1)$.

49. $y=\log_2(x-1)+x^2$. **50.** $y=\ln\frac{5x-1}{3x-1}$.

51. $f(x)=\sqrt{\lg\frac{5x-x^2}{4}}$. **52.** $y=\frac{\sin x}{\lg(x^2-4)}$.

4. Если аналитическое выражение функции содержит обратные тригонометрические функции арксинус или арккосинус, то при нахождении области ее определения нужно включать только те значения аргумента, при которых выражения, стоящие под знаком этих функций, по модулю не превосходят единицы.

53—57. Найти области определения функций:

53. $y=\arcsin\frac{x-2}{3}$.

Решение. Данная функция определена, если

$$\begin{cases} \frac{x-2}{3}\geqslant -1, \\ \frac{x-2}{3}\leqslant 1. \end{cases}$$

Решением системы неравенств являются значения $x\geqslant -1$ и $x\leqslant 5$. Итак, область определения функции есть отрезок $[-1, 5]$.

54. $y=\arcsin\sqrt{4x-3}$. **55.** $y=\arccos(3x-6)$.

56. $f(x)=\arcsin\left(\frac{x}{2}-1\right)$. **57.** $y=\arccos\frac{3}{4+2\sin x}$.

Иногда область определения функции ограничивается физическим или геометрическим смыслом задачи. Так, для функции $S=\pi R^2$ область определения есть $(0, \infty)$, поскольку радиус может принимать только положительные значения, хотя функция существует и для отрицательных значений R.

Нельзя смешивать область определения функции с областью значений функции.

Область значений функции есть множество всех действительных значений, которые принимает функция. Например, область значений функции $y = \sin x$ есть совокупность всех значений y, для которых $-1 \leqslant y \leqslant 1$, т. е. отрезок $[-1, 1]$, а областью определения той же функции $y = \sin x$ является совокупность всех действительных значений x, т. е. промежуток $(-\infty, \infty)$.

5. Способы задания функции

Функция считается заданной, если известна область определения функции и указано правило, по которому для каждого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Такое правило можно указать различными способами; из них наиболее распространенными являются табличный, графический и аналитический.

Табличный способ состоит в том, что значения аргумента и соответствующие им значения функции записаны в виде таблицы.

Так, значения логарифмов чисел, тригонометрических функций, квадратов и кубов чисел и т. д. находят с помощью четырехзначных математических таблиц. Зная число (аргумент), по таблицам отыскивают значение функции (либо логарифм этого числа, либо тригонометрическую функцию угла и т. д.). Такой способ удобен, когда вычисления значений функции являются громоздкими.

Табличный способ широко используется на практике для записи результатов наблюдений и измерений.

Несмотря на простоту, такой способ задания функции не дает полного представления о характере функциональной зависимости между x и y, лишен наглядности. Однако иногда это единственный способ выражения функциональной зависимости.

Пусть, например, нас интересует изменение температуры тела больного в зависимости от времени. В этом случае ее измеряют через равные промежутки времени и записывают полученные данные в виде таблицы:

Температура, °С	36,5	36,8	37,5	38,2
Время суток, ч	10	12	14	16

Для большей наглядности каждую пару чисел изображают точкой на плоскости и затем соединяют эти точки отрезками ломаной.

Если же функция изображена в прямоугольной системе координат в виде графика, т. е. какой-то линии, где абсцисса каждой точки является аргументом, а ордината — функцией, то такой способ задания функции называется *графическим*. Например, пусть функция $y = f(x)$ изображена в виде графика (рис. 67) и мы хотим найти значение функции y при $x = 2$. Восставив из точки $x = 2$ перпендикуляр к оси Ox до пересечения с графи-

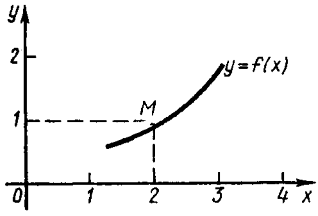

Рис. 67

ком, получим точку M, которую спроецируем на ось ординат и найдем ординату $y=1$. Это значение соответствует значению функции $y=f(x)$ при $x=2$. Аналогично можно найти значения функции и для других значений аргумента.

Графический способ задания функции удобен своей наглядностью при изучении различных процессов. На графике часто видны такие особенности поведения функции, которые трудно установить при других способах задания функции.

Иногда этот способ выражения зависимости между аргументом и функцией является единственно возможным, иногда же он применяется в качестве дополнительного — для наглядного изображения характера функциональной зависимости.

Например, зависимость между давлением и временем (барограмма) вычерчивается специальным метеорологическим прибором в виде некоторой кривой. В данном случае график является единственно возможным способом выразить эту функциональную зависимость.

58. Указать промежутки возрастания функции

x	-2	-1	0	1	2
y	9	2	0	2	9

Решение. В данном случае, хотя функция и задана таблицей, для наглядности строим график (рис. 68). Очевидно, что функция возрастает на интервале $(0, \infty)$.

Наиболее удобным является третий способ задания функции — аналитический.

При *аналитическом способе* зависимость между аргументом x и функцией y задается в виде математической формулы или уравнения. В этой формуле указаны действия, которые нужно произвести над значением аргумента, чтобы получить соответствующее значение функции. Придавая аргументу x различные значения, мы можем вычислить соответствующее значение y с необходимой точностью.

Примером функции, заданной аналитически, может служить функция $y=\frac{2x^3-5}{x+1}$.

Единственный недостаток аналитического способа — отсутствие наглядности. В математике предпочтение отдается этому способу. Зная закон соответствия $y=f(x)$, всегда можно составить таблицу и построить график. Другие способы задания функции такой универсальностью не обладают. На практике при исследовании различных зависимостей наиболее удобными является сочетание различных способов заданий функции.

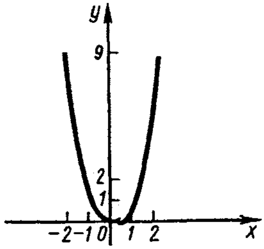

Рис. 68

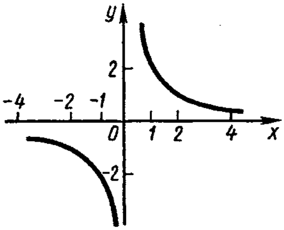

Рис. 69

59. Построить график функции $y=\frac{2}{x}$.

Решение. Составим таблицу значений функции:

-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$-\frac{1}{2}$	-1	-2	-4	-6	6	4	2	1	$\frac{1}{2}$

В соответствии с таблицей значений функции строим кривую (рис. 69).

6. Основные свойства функций

Определение 4. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* на некотором интервале, если для любых x из этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, т. е. при $x_1<x_2$ имеет место неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ (рис. 70).

Функция $y=f(x)$ называется *убывающей* на некотором интервале, если для любых x из этого интервала большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции, т. е. при $x_1<x_2$ имеет место неравенство $f(x_1)>f(x_2)$ (рис. 71).

Если же для любых значений x, взятых из некоторого промежутка и удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, вытекает нестрогое

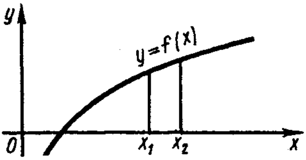

Рис. 70

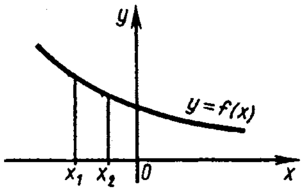

Рис. 71

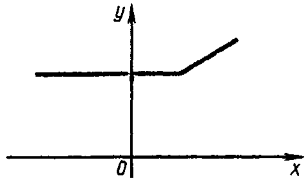

Рис. 72

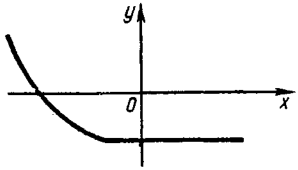

Рис. 73

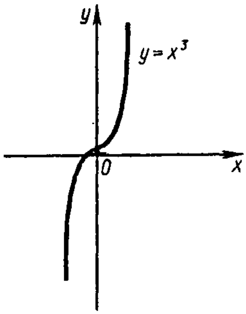

Рис. 74

неравенство $f(x_1) \leqslant f(x_2)$ [или $f(x_1) \geqslant f(x_2)$], то функция называется *неубывающей (невозрастающей)*. Примеры неубывающей и невозрастающей функций изображены соответственно на рис. 72 и 73.

Функции только убывающие или только возрастающие называются *монотонными*.

Например, функция $y = x^3$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$ и возрастает в этом интервале (рис. 74). Функция $f(x) = 1/x$ определена на двух интервалах $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$; в каждом из них она убывает (см. рис. 69). Функция $y = 2^x$ возрастает, а функции $y = 2^{-x}$ и $y = -2^x$ убывают в интервале $(-\infty, \infty)$ (рис. 75).

Функция $y = f(x)$ называется *кусочно-монотонной* в данном промежутке, если этот промежуток можно разбить на конечное число промежутков, в каждом из которых функция монотонна.

Например, функция $y = x^2$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$ и является кусочно-монотонной на нем, так как в промежутке $(-\infty, 0)$ она убывает, а в промежутке $(0, \infty)$ возрастает (рис. 76). Функция $y = \sin x$ определена в интервале $(-\infty, \infty)$. Эта функция не является кусочно-монотонной, так как интервал $(-\infty, \infty)$ нельзя разбить на конечное число таких промежутков, в каждом из которых функция была бы монотонной.

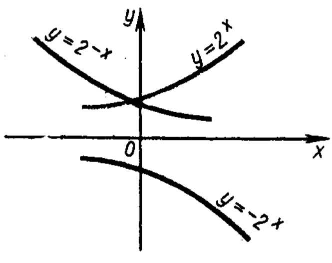

Рис. 75

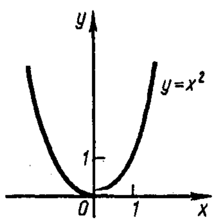

Рис. 76

Определение 5. Функция $y=f(x)$ называется *четной*, если при изменении знака у любого значения аргумента, взятого из области определения функции, значения функции не изменяются, т. е. $f(-x)=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется *нечетной*, если при изменении знака у любого значения аргумента, взятого из области определения функции, значения функции изменяют только знак, т. е. $f(-x)=-f(x)$.

Примерами четных функций могут служить функции $y=x^2$, $f(x)=\cos x$, примерами нечетных — функции $f(x)=\sin x$, $y=x^3$. Функции $y=x^3+1$, $y=\sin x+\cos x$ не обладают свойствами четности и нечетности, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

График четной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 76), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 74).

60. Доказать, что функция $f(x)=x^2-5x\sin x$ является четной.

Решение. Имеем $f(-x)=(-x)^2-5(-x)\sin(-x)=x^2+$ $+5x\sin(-x)=x^2-5x\sin x=f(x)$, т. е. данная функция — четная.

61. Доказать, что функция $\varphi(x)=\dfrac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}+3x}$ нечетная.

Решение. Находим

$$\varphi(-x)=\frac{\cos(-2x)}{\sqrt[3]{-x}-3x}=\frac{\cos 2x}{-\sqrt[3]{x}-3x}=-\frac{\cos 2x}{\sqrt[3]{x}+3x}=-\varphi(x),$$

т. е. данная функция является нечетной.

62. Выяснить, является ли функция $g(x)=2^x-3x+1$ четной или нечетной.

Решение. Имеем $g(-x)=2^{-x}-3(-x)+1=2^{-x}+3x+1$. Как видно, в данном случае не выполняются условия четности и нечетности. Значит, функция $g(x)$ не является ни четной, ни нечетной.

63—74. Установить, какая из данных функций является четной, а какая — нечетной:

63. $f(x)=2x^4$.

64. $f(x)=-\dfrac{3}{x}$.

65. $y=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

66. $f(x)=\dfrac{x^4+x^2-1}{2x^2+7}$.

67. $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$.

68. $\varphi(x)=2x+7$.

69. $f(x)=\text{const}$.

70. $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})$.

71. $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$.

72. $y=\lg\dfrac{x+3}{x-3}$.

73. $y=2^x+2^{-x}$.

74. $f(x)=x^2\sqrt[3]{x}+2\sin x$.

Определение 6. Функция $f(x)$ называется *периодической*, если существует такое число $l\neq 0$ (называемое *периодом*), что в каждой точке области определения функции $f(x)$ выполняется условие $f(x+l)=f(x)$

Например, функции $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$ являются периодическими с периодами соответственно 2π и π, так как $\sin(x+2\pi)=\sin x$, $\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x$.

Замечание. Кроме чисел 2π и π, периодами этих функций являются также и числа вида $2\pi k$ и πk, где k — любое целое число.

75. Доказать, что функция $f(x)=\sin 3x$ является периодической с периодом $l=2\pi/3$.

Решение. Так как $\sin 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin(3x+2\pi)=\sin 3x$, то период функции $f(x)$ равен $2\pi/3$.

76. Доказать, что функция $y=\cos^2 x$ имеет период π.

77. Доказать, что функция $f(x)=\cos x^2$ не является периодической.

78. Найти период функции $y=\sin 2x$.

79. Найти период функции $y=\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x$.

Определение 7. Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ и является монотонной, а область изменения функции y есть отрезок $[\alpha, \beta]$ (рис. 77). Каждому значению y_0 из отрезка $[\alpha, \beta]$ будет соответствовать одно значение x_0 из отрезка $[a, b]$ такое, что $y_0=f(x_0)$. Следовательно, на отрезке $[\alpha, \beta]$ определена функция $x=\varphi(y)$. Эта функция $x=\varphi(y)$ называется *обратной* для функции $y=f(x)$ и, наоборот, функция $y=f(x)$ является обратной для функции $x=\varphi(y)$. Поэтому их называют *взаимно обратными*.

Графиками функций $y=f(x)$ и $x=\varphi(y)$ служит одна и та же линия, так как эти функции выражают одну и ту же функциональную зависимость между переменными x и y.

Примерами взаимно обратных функций являются функции $y=ax+b$ и $x=\frac{y-b}{a}$, где $a\neq 0$, или функции $y=a^x$ и $x=\log_a y$, где $a>0$, $a\neq 1$.

Построение их графиков отличается лишь тем, что значения независимой переменной для функции $y=f(x)$ откладывают на

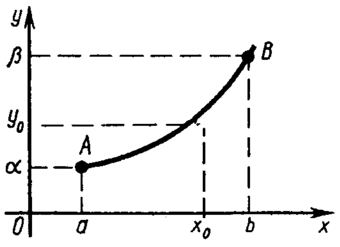

Рис. 77

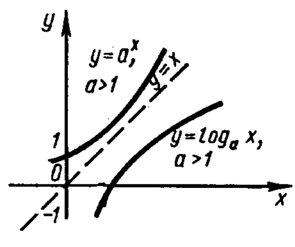

Рис. 78

горизонтальной оси Ox, а для функции $x=\varphi(y)$ — на вертикальной оси Oy. Чтобы избежать этого неудобства, в уравнении $x=\varphi(y)$ переставим переменные. Полученная функция $y=\varphi(x)$ также называется обратной для функции $y=f(x)$.

Так, функция $y=\frac{x-b}{a}$ является обратной для функции $y=ax+b$, а функция $y=\log_a x$ — обратной для функции $y=a^x$.

На рис. 78 изображены графики взаимно обратных функций $y=a^x$ и $y=\log_a x$ (при $a>1$), симметричные относительно прямой $y=x$.

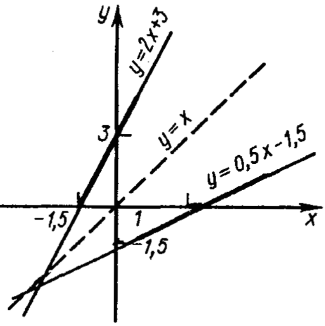

Рис. 79

80. Дана функция $y=2x+3$, $x\in[-1{,}5;\ 1]$. Найти функцию, обратную данной.

Решение. Решая данное уравнение относительно x, имеем $2x=y-3$, откуда $x=0{,}5y-1{,}5$. Переходя к обычным обозначениям, т. е. заменяя в последнем равенстве x на y, а y на x, получаем функцию, обратную данной: $y=0{,}5x-1{,}5$, $x\in[0,\ 5]$.

На рис. 79 изображены графики данной функции и обратной к ней, а также прямая $y=x$, относительно которой графики этих функций симметричны.

81. Найти функцию, обратную функции $y=3x+4$.

82. Показать, что функция $y=k/x$ $(k\neq 0)$ обратна сама себе.

83. Найти функцию, обратную функции $y=x^2$ $(-\infty<x<\infty)$.

Решение. Из уравнения $y=x^2$ видно, что значения функции y заполняют полуинтервал $[0,\ \infty)$. Если это уравнение разрешить относительно x, то получим уравнение $x=\pm\sqrt{y}$, из которого следует, что каждому значению y из полуинтервала $[0,\ \infty)$ соответствует не одно, а два значения x из интервала $(-\infty,\ \infty)$. Таким образом, функция $y=x^2$ на интервале $(-\infty,\ \infty)$ не имеет обратной функции (x через y выражается не однозначно).

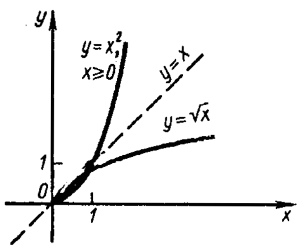

Рис. 80

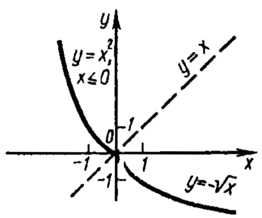

Рис. 81

Если рассматривать функцию $y=x^2$ на полуинтервале $[0, \infty)$, то $x=\sqrt{y}$ и каждому значению $y\geqslant 0$ соответствует только одно значение x. В этом случае обратная функция существует и определяется уравнением $y=\sqrt{x}$ (рис. 80).

Легко убедиться в том, что функция $y=x^2$ на полуинтервале $(-\infty, 0]$ также имеет обратную функцию. Действительно, в этом случае $x=-\sqrt{y}$, каждому значению $y\geqslant 0$ соответствует единственное значение x и обратная функция определяется уравнением $y=-\sqrt{x}$ (рис. 81).

Определение 8. Пусть y является функцией переменной u, а переменная u, в свою очередь, является функцией от переменной x, т. е. $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$. Тогда функция $y=f(\varphi(x))$ называется *функцией от функции* (или *сложной функцией*), если область определения функции f содержит множество значений функции φ. Переменная u в этом случае называется *промежуточной переменной.*

Например, функция $y=\lg(x^2+5x)$ является сложной функцией, так как ее можно представить в виде $y=\lg u$, где $u=x^2+5x$. Функция $y=\sin(2x+1)$ также есть сложная функция; ее можно представить в виде $y=\sin u$, где $u=2x+1$.

Сложная функция может содержать несколько промежуточных переменных. Например, если $y=2^t$, где $t=\cos u$, $u=x^2$, то сложная функция $y=2^{\cos x^2}$ содержит две промежуточные переменные.

84. Составить сложные функции $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$, если $\varphi(x)=3x+2$, $f(x)=x^2-1$.

Решение. Имеем $f(\varphi(x))=(3x+2)^2-1=9x^2+12x+3$; $\varphi(f(x))=3(x^2-1)+2=3x^2-1$. Из решения видно, что сложные функции $f(\varphi(x))$ и $\varphi(f(x))$ различны.

85. Сложную функцию $y=\sin u$, где $u=\lg v$, $v=\sqrt{x}$, записать в виде одного равенства.

Решение. Подставив в равенство $u=\lg v$ значение $v=\sqrt{x}$, получим $u=\lg\sqrt{x}$. Далее, подставим полученное значение для u в равенство $y=\sin u$; тогда данная сложная функция примет вид $y=\sin(\lg\sqrt{x})$.

86. Сложную функцию $y=u^2$, где $u=\sin v$, $v=2x^3$, записать в виде одного равенства.

87. Сложную функцию $y=\operatorname{arctg} u$, где $u=\sqrt{v}$, $v=\lg x$, записать в виде одного равенства.

88. Сложную функцию $y=(2x-5)^{10}$ записать в виде цепочки равенств.

Решение. Обозначим $2x-5$ через u; тогда получим $y=u^{10}$, где $u=2x-5$.

89. Сложную функцию $y=\lg\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ записать в виде цепочки равенств.

90. Сложную функцию $y=3^{\cos^5 x}$ записать в виде цепочки равенств.

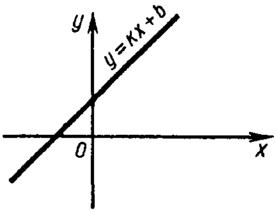

Рис. 82

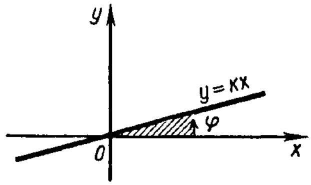

Рис. 83

7. Основные элементарные функции

Основные элементарные функции подробно изучались в школе. Напомним кратко основные свойства некоторых из них.

1. *Линейная функция* $y=kx+b$, где k и b — действительные числа. Область определения — множество всех действительных чисел. Графиком линейной функции является прямая (рис. 82).

Если $b=0$, то $y=kx$; эта функция выражает прямую пропорциональную зависимость между x и y. В этом случае прямая проходит через начало координат (рис. 83).

Угловой коэффициент k равен $\operatorname{tg}\varphi$, где φ — угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс.

Функция возрастает, если $k>0$ (угол φ — острый; рис. 83); функция убывает, если $k<0$ (угол φ — тупой; рис. 84).

При $k=0$ получаем постоянную функцию $y=b$ (рис. 85); в частности, если $k=0$ и $b=0$, то $y=0$ (ось абсцисс).

Рассмотрим вопрос о четности и нечетности линейной функции.

Если $k=0$, то $f(x)=b$, $f(-x)=b$, т. е. в этом случае функция четная.

Если $b=0$, то $f(x)=kx$, $f(-x)=-kx$, т. е. в этом случае функция нечетная.

Если $k\neq 0$, $b\neq 0$, то $f(x)=kx+b$, $f(-x)=-kx+b$, т. е. в этом случае функция не является ни четной, ни нечетной.

2. *Степенная функция* $y=x^n$, где n — любое действительное число.

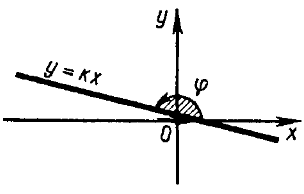

Рис. 84

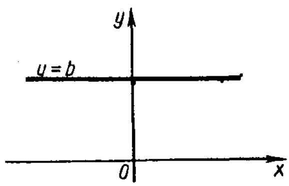

Рис. 85

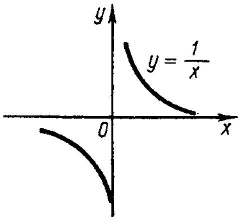

Рис. 86

При $n=2$ получим квадратичную функцию $y=x^2$. Ее графиком является парабола (см. рис. 76).

Отметим некоторые свойства функции $y=x^2$.

Область определения — множество всех действительных чисел. Функция четная, поскольку $x^2=(-x)^2$. Она ограничена снизу, так как $x^2 \geqslant 0$. Функция возрастает при $x \in [0, \infty)$ и убывает при $x \in (-\infty, 0]$.

При $n=3$ получим функцию $y=x^3$, графиком которой является кубическая парабола (см. рис. 74).

Отметим некоторые свойства функции $y=x^3$.

Область определения — множество всех действительных чисел. Функция нечетная, так как $(-x)^3=-x^3$. Функция возрастает во всей области определения.

Степенная функция $y=x^n$ в случае, когда n — четное число, обладает теми же свойствами, что и функция $y=x^2$, а в случае, когда n — нечетное число, — теми же свойствами, что и функция $y=x^3$.

При $n=-1$ получим функцию $y=1/x$, которая выражает обратную пропорциональную зависимость между x и y. Графиком функции является гипербола (рис. 86).

Отметим некоторые свойства функции $y=1/x$.

Область определения — множество всех действительных чисел, кроме $x=0$. Функция нечетная, так как $f(-x)=-1/x=$ $=-f(x)$. Функция убывает при $x \in (-\infty, 0)$ и при $x \in (0, \infty)$.

3. *Показательная функция* $y=a^x$, где основание степени a — данное положительное число, не равное единице, а показатель степени x — переменная величина, которая может принимать любые действительные значения.

Основание степени a считается отличным от единицы, так как $a=1$ степень 1^x при всяком значении x равна 1, т. е. функция $y=a^x$ становится не зависящей от x. Кроме того, предполагается $a>0$, поскольку при $a<0$ для ряда значений x функция не существует. Например, при $a=-9$ и $x=1/2$ имели бы $a^x=$ $=(-9)^{1/2}=\sqrt{-9}$, а это есть мнимое выражение.

Функция $y=a^x$ определена для всех действительных значений, т. е. $x \in (-\infty, \infty)$.

Областью изменения функции служит интервал $(0, \infty)$, т. е. график находится в верхней полуплоскости (см. рис. 78).

Свойствами четности и нечетности функция не обладает.

Функция $y=a^x$ является монотонной; она возрастает при $a>1$ и убывает при $0<a<1$.

График проходит через точку (0; 1), так как $1=a^0$.

4. *Логарифмическая функция* $y=\log_a x$ $(a>0, a \neq 1)$. Эта функция является обратной по отношению к показательной функции, так как если $y=\log_a x$, то $x=a^y$. Отсюда следует, что гра-

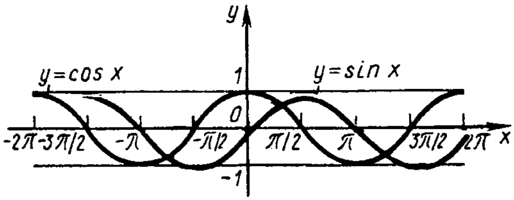

Рис. 87

фик логарифмической функции симметричен графику показательной функции относительно биссектрисы I и III координатных углов (см. рис. 78).

Область определения логарифмической функции — множество всех положительных чисел, т. е. $x \in (0, \infty)$ (отрицательные числа и нуль логарифмов не имеют).

Область значений функции — множество всех действительных чисел.

Свойствами четности и нечетности функция не обладает.

Функция $y = \log_a x$ является монотонной; она возрастает при $a > 1$ и убывает при $0 < a < 1$.

График проходит через точку (1; 0), так как $\log_a 1 = 0$.

5. *Тригонометрические функции.* Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ определены для всех $x \in (-\infty, \infty)$. Они являются периодическими с периодом 2π.

Функция $y = \sin x$ — нечетная, поскольку $\sin(-x) = -\sin x$; функция $y = \cos x$ — четная, так как $\cos(-x) = \cos x$. Графики этих функций изображены на рис. 87.

Функция $y = \operatorname{tg} x$ не определена только в точках, где $\cos x = 0$, т. е. в точках $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$, а функция $y = \operatorname{ctg} x$ не определена только в точках, где $\sin x = 0$, т. е. в точках $x = \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

При этом $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ — нечетные функции, так как $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Обе функции являются периодическими с периодом π.

Графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ изображены на рис. 88, 89.

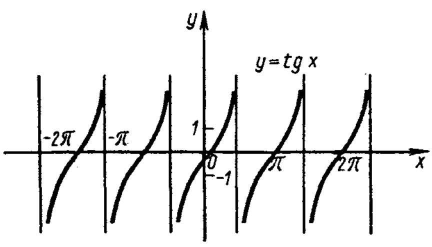

Рис. 88

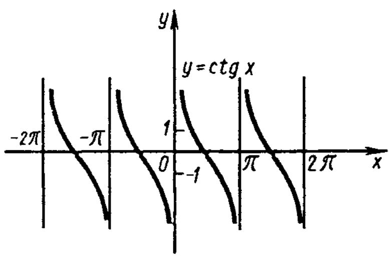

Рис. 89

Элементарными называются функции, образованные из основных элементарных функций с помощью конечного числа математических действий и образования из них сложных функций.

Например, функции $y=\ln\sin x+x^5$, $y=\sqrt{x^3\cos x+\ln\operatorname{tg} x}$ являются элементарными.

§ 2. Предел и непрерывность функции

Предел переменной величины
Основные свойства пределов
Предел функции в точке
Приращение аргумента и приращение функции
Понятие о непрерывности функции
Предел функции на бесконечности
Замечательные пределы
Вычисление пределов

1. Предел переменной величины

Пусть переменная величина x в процессе своего изменения неограниченно приближается к числу 5, принимая при этом следующие значения: 4,9; 4,99; 4,999; ... или 5,1; 5,01; 5,001; .... В этих случаях модуль разности $|x-5|$ стремится к нулю: $|x-5|=0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001; \ldots$.

Число 5 в приведенном примере называют *пределом* переменной величины x и пишут $\lim x=5$.

Определение 1. Постоянная величина a называется *пределом* переменной x, если модуль разности $|x-a|$ при изменении x становится и остается меньше любого как угодно малого положительного числа ε.

Итак, $\lim x=a$ (предел x равен a) или $x\to a$ (x стремится к a).

Замечания. 1. Предел постоянной величины равен самой постоянной: $\lim a=a$, так как $|a-a|<\varepsilon$.

2. Переменная величина может иметь только один предел.

3. Предел положительной переменной величины не отрицателен, предел отрицательной переменной величины не положителен.

91. Найти предел переменной величины $x=\dfrac{az+1}{z}$ при $z\to\infty$.

Решение. Преобразуем переменную, разделив все члены числителя на знаменатель. Получим: $x=a+\dfrac{1}{z}$; $x-a=\dfrac{1}{z}$.

Замечаем, что чем больше z, тем ближе значения переменной величины x к постоянной a, так как выполняется условие $|x-a|<\varepsilon$, где ε — как угодно малая величина. Следовательно, $\lim\limits_{z\to\infty} x=a$.

92. Показать, что при $t \to \infty$ предел переменной величины $x = \dfrac{6t^3 - 9t + 1}{2t^3 - 3t}$ равен 3.

Решение. Находим разность между переменной величиной x и числом 3:

$$x - 3 = \frac{6t^3 + 9t + 1}{2t^3 + 3t} - 3 = \frac{6t^3 + 9t + 1 - 3(2t^3 + 3t)}{2t^3 + 3t} = \frac{6t^3 + 9t + 1 - 6t^3 - 9t}{2t^3 + 3t} =$$

$$= \frac{1}{2t^3 + 3t}.$$

Если $t \to \infty$, то $\dfrac{1}{2t^3 + 3t} \to 0$. Значит, выполняется условие $|x - 3| < \varepsilon$ и, следовательно, $\lim\limits_{t \to \infty} x = 3$.

93. Показать, что при $x \to \infty$ предел переменной величины $y = \dfrac{2x^2 + 6x + 1}{x^2 + 3x}$ равен 2.

2. Основные свойства пределов

1. *Предел алгебраической суммы конечного числа переменных величин равен алгебраической сумме пределов слагаемых:*

$$\lim(x + y + \ldots + t) = \lim x + \lim y + \ldots + \lim t.$$

2. *Предел произведения конечного числа переменных величин равен произведению их пределов:*

$$\lim(x \cdot y \ldots t) = \lim x \cdot \lim y \ldots \lim t.$$

3. *Постоянный множитель можно выносить за знак предела:*

$$\lim(cx) = \lim c \cdot \lim x = c \lim x.$$

Например, $\lim(5x + 3) = \lim 5x + \lim 3 = 5 \lim x + 3$.

4. *Предел отношения двух переменных величин равен отношению пределов, если предел знаменателя не равен нулю:*

$$\lim \frac{x}{y} = \frac{\lim x}{\lim y}, \quad \text{если } \lim y \neq 0.$$

5. *Предел целой положительной степени переменной величины равен той же степени предела этой же переменной:*

$$\lim x^n = (\lim x)^n.$$

Например,

$$\lim_{x \to -2}(x^3 + 3x^2) = \lim_{x \to -2} x^3 + 3 \lim_{x \to -2} x^2 = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 = -8 + 12 = 4.$$

6. *Если переменные x, y, z удовлетворяют неравенствам $x \leqslant y \leqslant z$ и $x \to a$, $z \to a$, то $y \to a$.*

Замечание. В свойствах 1—6 условие существования пределов обязательно.

3. Предел функции в точке

Выше мы рассматривали независимые переменные величины, каждая из которых стремится к своему пределу независимо от другой.

Пусть теперь даны две переменные величины x и y, связанные функциональной зависимостью $y=f(x)$. Рассмотрим вопрос о пределе функции при условии, что задан предел ее аргумента.

Если при x, стремящемся к a, функция $f(x)$ стремится к b, то говорят, что предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ равен b и пишут $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$.

Отметим, что во всем дальнейшем изложении, где говорится о пределе функции в точке a, будем предполагать, что функция определена в некоторой окрестности точки a. В самой же точке a функция может быть не определена.

Замечание. За *окрестность* точки a принимается любой интервал, содержащий точку a.

Определение 2. Число b называется *пределом** функции $f(x)$ в точке a, если для всех значений x, достаточно близких к a и отличных от a, значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа b.

Например, пусть задана функция $f(x)=x+2$. Предположим, что $x\to 1$. Выясним, существует ли при этом условии предел данной функции, и если существует, то найдем его значение.

Имеем: $f(0{,}9)=2{,}9$; $f(0{,}99)=2{,}99$; $f(0{,}999)=2{,}999$, $f(1{,}1)=3{,}1$; $f(1{,}01)=3{,}01$; $f(1{,}001)=3{,}001$. Полученные результаты показывают, что при приближении x к 1 значения функции приближаются к числу 3. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1}(x+2)=3$.

Однако такой метод нахождения предела очень громоздок, поэтому на практике он не применяется. Упростить решения задач на вычисление пределов функций позволяют основные свойства пределов, перечисленные выше.

94. Найти $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2-2x)$.

Решение. Используя последовательно свойства 1, 3 и 5 предела, получим

$$\lim_{x\to 2}(3x^2-2x)=\lim_{x\to 2}(3x^2)-\lim_{x\to 2}(2x)=3\lim_{x\to 2}x^2-2\lim_{x\to 2}x=$$
$$=3(\lim_{x\to 2}x)^2-2\lim_{x\to 2}x=3\cdot 2^2-2\cdot 2=8.$$

95. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$.

Решение. Чтобы применить свойство о пределе частного, проверим, не равен ли нулю предел делителя при $x=4$. Так как $\lim\limits_{x\to 4}(x-3)=$

* Более строгое определение предела функции дается в полных курсах математического анализа. Ввиду сложности этого определения в данном пособии оно не приводится.

$=\lim\limits_{x\to4}x-\lim 3=4-3=1\neq0$, то в данном случае можно воспользоваться свойством 4:

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-2x}{x-3}=\frac{\lim\limits_{x\to4}(x^2-2x)}{\lim\limits_{x\to4}(x-3)}.$$

Но $\lim\limits_{x\to4}(x^2-2x)=(\lim\limits_{x\to4}x)^2-2\lim\limits_{x\to4}x$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to4}\frac{x^2-2x}{x-3}=\frac{\left(\lim\limits_{x\to4}x\right)^2-2\lim\limits_{x\to4}x}{\lim\limits_{x\to4}x-\lim 3}=\frac{4^2-2\cdot4}{4-3}=8.$$

96—98. Найти пределы:

96. $\lim\limits_{x\to5}\frac{7x-5}{10+2x}$. **97.** $\lim\limits_{x\to2}\frac{5x^2-2x+4}{(x-1)(x+1)}$. **98.** $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{x^2+2}}{2-\sqrt{x}}$.

4. Приращение аргумента и приращение функции

Если аргумент функции $y=f(x)$ изменяется от значения x до нового значения $x_н$, то разность этих значений $x_н-x$ называют *приращением аргумента* и обозначают символом Δx (читается: «дельта икс»). Следовательно, $\Delta x=x_н-x$, откуда $x_н=x+\Delta x$. Сама функция $y=f(x)$ при таком изменении аргумента принимает новое значение $y_н=f(x+\Delta x)$, т. е. получим *приращение функции* $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$.

Геометрически приращение аргумента изображается приращением абсциссы точки кривой, а приращение функции — приращением ординаты этой точки (рис. 90).

99. Найти приращения аргумента и функции $y=2x^2+1$, если аргумент x изменяется от 1 до 1,02.

Решение. 1^0. Находим приращение аргумента: $\Delta x=1{,}02-1=0{,}02$.

2^0. Находим значение функции при старом значении аргумента, т. е. при $x=1$: $y=2\cdot1^2+1=3$.

3^0. Находим значение функции при новом значении аргумента, т. е. при $x=1+0{,}02=1{,}02$:

$$y_н=y+\Delta y=2\cdot1{,}02^2+1=2\cdot1{,}0404+1=3{,}0808.$$

4^0. Вычитая из нового первоначальное значение функции, найдем приращение функции: $\Delta y=3{,}0808-3=0{,}0808$.

К тому же результату можно прийти иначе. Сначала найдем приращение данной функции в общем виде:

$$\Delta y=2(x+\Delta x)^2+1-(2x^2+1)=4x\Delta x+2(\Delta x)^2.$$

Теперь, подставляя сюда значения x и Δx, получим

$$\Delta y=4\cdot1\cdot0{,}02+2\cdot0{,}004=0{,}0808.$$

100. Определить приращения аргумента и функции $y=x^2$, если аргумент x изменяется от 2 до 2,5.

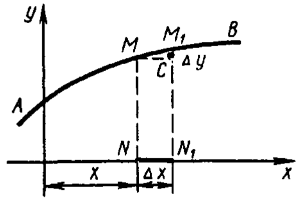

Рис. 90

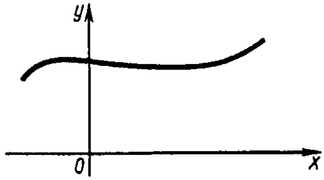

Рис. 91

Решение. Приращение аргумента есть $\Delta x = x_н - x = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$. Найдем приращение функции: $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2{,}5^2 - 2^2 = 2{,}25$.

101. Дана функция $y = x^2 + 2x - 4$. Найти приращение Δy при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}5$.

102. Дана функция $y = 1/x$. Найти приращение Δy при изменении аргумента x от 1 до 1,2.

103. Найти приращение функции $y = \sqrt{x}$ при $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}1$.

5. Понятие о непрерывности функции

Наглядное представление о непрерывной функции состоит в том, что график такой функции можно начертить одним непрерывным движением, не отрывая карандаша от бумаги. В противном случае имеет место графическое изображение разрывной функции. На рис. 91 изображена некоторая непрерывная функция, на рис. 92 и 93 — разрывные функции.

Непрерывное изменение переменной величины легко представить себе интуитивно. В самом деле, когда мы говорим: «Температура воды при нагревании изменяется непрерывно» — мы имеем в виду, что за достаточно малый промежуток времени температура воды изменится достаточно мало, т. е. если температуру воды рассматривать как функцию времени, то в изменении этой функции наблюдается постепенность.

Примерами непрерывных функций могут служить также различные законы движения тел $s = f(t)$, выражающие зависимость пройденного пути s от времени t. Одной из особенностей этой

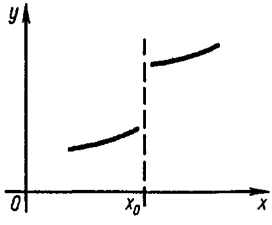

Рис. 92

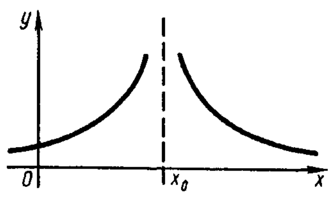

Рис. 93

зависимости является то, что малому приращению времени соответствует малое приращение пути, т. е. график функции $s=f(t)$ изображается непрерывной линией.

Определение 3. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x=x_0$, если:

1) эта функция определена в точке $x=x_0$ (т. е. определенному значению аргумента x, равному x_0, соответствует вполне определенное значение функции y, равное y_0);

2) приращение функции в точке x_0 стремится к нулю при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0.$$

Кратко свойство непрерывности функции можно выразить так: функция называется непрерывной в данной точке, если $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Из рис. 90 видно, что если точка M_1 приближается по кривой $y=f(x)$ к точке M, то Δx и Δy как угодно уменьшаются, т. е. стремятся к нулю, и данная функция в точке M является непрерывной.

Итак, геометрически непрерывность функции $y=f(x)$ означает, что ординаты двух точек графика сколь угодно мало отличаются друг от друга, если достаточно мало отличаются их абсциссы. Поэтому график непрерывной функции представляет собой сплошную линию без разрывов.

Часто пользуются другим, равносильным приведенному, определением непрерывности функции в точке.

Определение 4. Функция $f(x)$ называется *непрерывной в данной точке* x_0, если ее предел в точке x_0 существует и равен значению функции в этой точке, т. е. если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Примером функции, непрерывной в любой точке x_0, может служить постоянная $f(x)=C$. В самом деле, в этом случае $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=C$ и $f(x_0)=C$.

Отметим следующие свойства непрерывных функций.

Если функции $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *непрерывны в точке* a, *то:*

1) *их сумма, разность, произведение являются функциями, непрерывными в этой точке;*

2) *частное* $f_1(x)/f_2(x)$ *есть непрерывная функция при условии* $f_2(a)\neq 0$.

Определение 5. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке этого отрезка.

104. Доказать непрерывность функции $y=ax^2+bx+c$ в точке x.

Решение. 1^0. Придадим аргументу x приращение Δx.

2^0. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = a(x+\Delta x)^2 + b(x+\Delta x) + c - (ax^2+bx+c) = 2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\,\Delta x.$$

3^0. Находим предел функции при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}(2ax\Delta x + a(\Delta x)^2 + b\Delta x) = 0,$$

так как предел каждого слагаемого равен нулю.

Следовательно, функция $y=ax^2+bx+c$ непрерывна в точке x. Так как x может принимать любые значения, то эта функция непрерывна для всех $x \in (-\infty, \infty)$.

105. Исследовать на непрерывность функцию $y=x^2$.

Решение. Пусть приращение аргумента x равно Δx; тогда функция y получит какое-то приращение Δy. Имеем

$$y+\Delta y = (x+\Delta x)^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2,$$

откуда

$$\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x+\Delta x).$$

Очевидно, что при любом фиксированном значении x и при Δx, стремящемся к нулю, Δy также стремится к нулю, т. е. функция $y=x^2$ непрерывна при любом значении $x \in (-\infty, \infty)$.

106. Показать, что функция $y=\sin x$ непрерывна при всех x.

Решение. Найдем приращение функции:

$$\Delta y = \sin(x+\Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

Очевидно, что $\Delta y \to 0$ при $\Delta x \to 0$, т. е. функция $y=\sin x$ непрерывна при всех $x \in (-\infty, \infty)$.

107—110. Исследовать на непрерывность функции:

107. $y=2x$. **108.** $y=3x^2$.

109. $y=5x^2-2x+3$. **110.** $y=\cos x$.

Можно доказать, что каждая элементарная функция непрерывна в любой точке из ее области определения.

Так, например, функция $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ непрерывна при всех x, кроме значений $x=2$ и $x=-2$, при которых она не существует. Функция $f(x)=\operatorname{tg} x$ непрерывна при всех значениях x, кроме $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, где k — любое целое число.

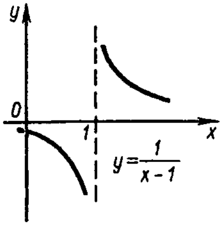

Рис. 94

Значение аргумента, при котором функция не является непрерывной, называется *точкой разрыва*. На рис. 94 изображен график функции $y=\dfrac{1}{x-1}$, имеющий точку разрыва при $x=1$.

Примером функции, имеющей точку разрыва, является скорость тела, падающего на землю. Эта скорость, вообще говоря, есть непрерывная функция времени, но в момент удара можно считать, что она мгновенно (скачком) падает до нуля, т. е. функция скорости терпит разрыв.

111—113. Исследовать на разрыв функции:

111. $y=\frac{2}{x-5}$. **112.** $y=\frac{1}{x^2-1}$. **113.** $y=\frac{3}{x^2-2x+1}$.

Так как x_0 есть предел переменной величины x, то равенство $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ можно записать в виде

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f\left(\lim_{x\to x_0} x\right).$$

Эта формула выражает очень важное для вычисления пределов правило: если функция непрерывна, то при отыскании ее предела можно вместо аргумента подставить его предельное значение.

В дальнейшем мы будем пользоваться этим приемом, поскольку он значительно упрощает вычисления предела функции.

114. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2x^3+4x-3}{x+4}$.

Решение. При $x=1$ дробь $\frac{2x^3+4x-3}{x+4}$ определена, так как ее знаменатель отличен от нуля. Поэтому для вычисления предела достаточно заменить аргумент его предельным значением. Тогда получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+4x-3}{x+4}=\frac{2\cdot 1^3+4\cdot 1-3}{1+4}=\frac{3}{5}.$$

Указанное правило вычисления пределов нельзя применять в следующих случаях:

1) если функция при $x=a$ не определена;

2) если знаменатель дроби при подстановке $x=a$ оказывается равным нулю;

3) если числитель и знаменатель дроби при подстановке $x=a$ одновременно оказываются равными нулю или бесконечности.

В таких случаях пределы функций находят с помощью различных искусственных приемов.

115. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{3-x}$.

Решение. Здесь непосредственный переход к пределу невозможен, поскольку предел делителя равен нулю: $\lim\limits_{x\to 3}(3-x)=3-3=0$. Предел делимого также равен нулю: $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)=9-9=0$. Значит, имеем неопределенность вида 0/0. Однако отсюда не следует, что данная функция не имеет предела; для его нахождения нужно предварительно преобразовать функцию, разделив числитель и знаменатель на выражение $x-3$:

$$\frac{x^2-9}{3-x}=\frac{(x-3)(x+3)}{3-x}=-\frac{(x-3)(x+3)}{x-3}=-(x+3).$$

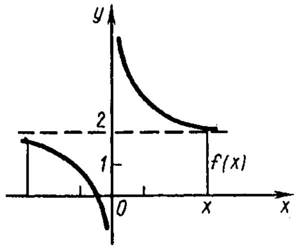

Рис. 95

Для выражения $-(x+3)$ предел при $x \to 3$ находится легко: $\lim\limits_{x\to 3}(-(x+3)) = -\lim\limits_{x\to 3}(x+3) = -6$.

Замечание. Сокращая дробь на $x-3$, мы полагаем, что $x \to 3$, но $x \neq 3$.

6. Предел функции на бесконечности

Определение 6. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *на бесконечности* (или при x, стремящемся к бесконечности), если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента x соответствующие значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от числа A.

Из рис. 95 видно, что ординаты, изображающие значения функции, сколь угодно мало отличаются от числа $A=2$ для любых достаточно больших значений $|x|$.

116. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x+5}$.

Решение. При $x\to\infty$ знаменатель $x+5$ также стремится к бесконечности, а обратная ему величина $\dfrac{1}{x+5}\to 0$. Следовательно, произведение $\dfrac{1}{x+5}\cdot 3 = \dfrac{3}{x+5}$ стремится к нулю, если $x\to\infty$. Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{x+5}=0$.

Тождественные преобразования под знаком предела применимы не только в том случае, когда аргумент стремится к конечному пределу, но и при $x\to\infty$.

117. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x}{x^3-1}$.

Решение. Здесь числитель и знаменатель не имеют предела, так как оба неограниченно возрастают. В этом случае говорят, что имеет место неопределенность вида ∞/∞. Разделим числитель и знаменатель почленно на x^3 (наивысшую степень x в данной дроби):

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+x}{x^3-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x^3}\right)} = 2,$$

так как $1/x^2$ и $1/x^3$ при $x\to\infty$ стремятся к нулю.

Замечание. Прием деления числителя и знаменателя дроби на наивысшую степень переменной x, применяемый при раскрытии неопределенности вида ∞/∞, нельзя использовать для нахождения пределов функций, не приводящих к неопределенности указанного вида.

7. Замечательные пределы

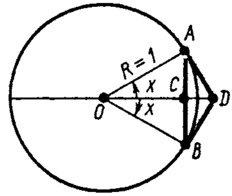

Рис. 96

Некоторые пределы невозможно найти теми способами, которые были изложены выше. Пусть например, требуется найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$. Непосредственная подстановка вместо аргумента его предела дает неопределенность вида 0/0. Невозможно также преобразовать числитель и знаменатель таким образом, чтобы выделить общий множитель, предел которого равен нулю.

Поступим следующим образом. Возьмем круг с радиусом, равным 1, и построим центральный угол AOB, равный $2x$ радианам (рис. 96). Проведем хорду AB и касательные AD и BD к окружности в точках A и B. Очевидно, что $|AC|=|CB|=\sin x$, $|AD|=|DB|=\operatorname{tg} x$ и $\smile AB=2x$, так как угол x измеряется в радианах. Учитывая, что дуга AB больше хорды AB и что ломаная ADB больше дуги AB, можем записать:

$$|AB|<\smile AB<|AD|+|DB|, \text{ или } 2\sin x<2x<2\operatorname{tg} x.$$

Разделив все члены этого неравенства на положительную величину $2\sin x$, получим

$$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}, \text{ или } 1>\frac{\sin x}{x}>\cos x.$$

Если $x\to 0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Таким образом, переменная величина $\frac{\sin x}{x}$ заключена между единицей и величиной, стремящейся к единице. Следовательно, и она стремится к единице, т. е.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1. \tag{1}$$

Этот предел называют *первым замечательным пределом.*

118. Найти $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$.

Решение. Приведем этот предел к виду (1). Для этого числитель и знаменатель дроби умножим на 2, а постоянный множитель 2 вынесем на знак предела. Имеем

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{2\sin 2\alpha}{2\alpha}=2\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}.$$

Учитывая, что если $\alpha\to 0$, то и $2\alpha\to 0$, получим

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}=2\lim_{2\alpha\to 0}\frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}=2\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=2\cdot 1=2.$$

Если $x\to\infty$, то имеет место соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e\approx 2{,}7182..., \tag{2}$$

которое называется *вторым замечательным пределом.* Доказательство его справедливости приводится в подробных курсах математического анализа.

Число e в математике имеет важное значение. Логарифмы при основании e называют *натуральными* и для них употребляют обозначение ln. Итак, $\ln x = \log_e x$. Например, $\ln 2 \approx 0{,}6931$.

119. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на x, получим

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x}=\frac{1}{e}.$$

8. Вычисление пределов

Сначала рассмотрим примеры непосредственного нахождения предела функции в точке.

120. Найти $\lim\limits_{x\to 3}(x^2-7x+4)$.

Решение. Для нахождения предела данной функции заменим аргумент x его предельным значением:

$$\lim_{x\to 3}(x^2-7x+4)=3^2-7\cdot 3+4=-8.$$

121. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}$.

Решение. Проверим, не обращается ли знаменатель дроби в нуль при $x=2$: имеем $2^2+2\cdot 2+8=16\neq 0$. Подставив предельное значение аргумента, находим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+x+2}{x^2+2x+8}=\frac{2^2+2+2}{2^2+2\cdot 2+8}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}.$$

Рассмотрим теперь такие примеры, когда применение свойств предела становится возможным лишь после некоторых предварительных преобразований.

122. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$.

Решение. Здесь пределы числителя и знаменателя при $x\to 0$ равны нулю. Умножив числитель и знаменатель на выражение, сопряженное числителю, получим

$$\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\frac{(\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x})(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$=\frac{2+x-2+x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2x}{5x(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{5(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to 0}2}{5\lim\limits_{x\to 0}(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x})}=\frac{2}{5\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{10}.$$

123. Найти $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}$.

Решение. Здесь имеем неопределенность типа 0/0. Для того чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель дроби на множители и до перехода к пределу сократим дробь на множитель $x-2$. В результате получим

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=2.$$

Итак, чтобы найти предел частного двух функций, где пределы делимого и делителя равны нулю, нужно преобразовать функцию таким образом, чтобы выделить в делимом и делителе сомножитель, предел которого равен нулю, и, сократив дробь на этот сомножитель, найти предел частного.

124. Найти $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}$.

Решение. Непосредственная подстановка $x=-2$ показывает, что имеет место неопределенность вида 0/0. Разложив числитель на множители и сократив дробь, находим

$$\lim_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2(x+2)\left(x+\frac{3}{2}\right)}{(x+2)^2}=\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2}.$$

Здесь предел делителя равен нулю. Таким образом, знаменатель дроби неограниченно убывает и стремится к нулю, а числитель приближается к -1. Ясно, что вся дробь неограниченно растет, что условно записывается так: $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+7x+6}{(x+2)^2}=\infty$.

125—130. Найти пределы:

125. $\lim\limits_{x\to 3}(5x^2-6x+7)$.

126. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x-2}$.

127. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$.

128. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^4-16}{x+2}$.

129. $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\frac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$.

130. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

Перейдем к примерам нахождения предела функции на бесконечности.

131. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}$.

Решение. При $x\to\infty$ имеем неопределенность вида ∞/∞. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разделим числитель и знаменатель на x^3. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{3+\frac{4}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{2}{x^3}}=\frac{2}{3},$$

так как $3/x$, $5/x^2$, $7/x^3$, $4/x$, $1/x^2$, $2/x^3\to 0$ при $x\to\infty$.

132—133. Найти пределы:

132. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+8}{2x^3-x+1}$. **133.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+x-1}{2x^3+5x^2}$.

134. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель на x^3 и перейдя к пределу, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3+x^2-2}{3x^2+5x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^3}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\infty,$$

поскольку числитель последней дроби стремится к пределу, отличному от нуля, а знаменатель — к нулю.

135. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}$.

Решение. При стремлении аргумента x к бесконечности имеем неопределенность вида ∞/∞. Чтобы раскрыть ее, разделим числитель и знаменатель дроби на x. Тогда получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+4}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2+4}{x^2}}}{1}=\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{4}{x^2}}=1,$$

так как $4/x^2\to 0$ при $x\to\infty$.

136. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-2x+3}}$.

Решение. Предельный переход при $x\to\infty$ всегда можно заменить предельным переходом при $\alpha\to 0$, если положить $\alpha=1/x$ (способ замены переменной).

Так, полагая в данном случае $x=1/\alpha$, найдем, что $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x}{\sqrt{x^2-2x+3}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1}{\alpha^2}-2\cdot\frac{1}{\alpha}+3}}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{\alpha}}{\sqrt{\frac{1-2\alpha+3\alpha^2}{\alpha^2}}}=$$

$$=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3}{\sqrt{1-2\alpha+3\alpha^2}}=\frac{3}{1}=3.$$

137. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2}$.

Решение. I способ. Разделив числитель и знаменатель на x^2, находим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{2}{x^2}}=\frac{3}{1}=3.$$

II способ. Положим $x=1/\alpha$; тогда $\alpha\to 0$ при $x\to\infty$. Значит,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+5x+1}{x^2-2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3\cdot\frac{1}{\alpha^2}+5\cdot\frac{1}{\alpha}+1}{\frac{1}{\alpha^2}-2}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{3+5\alpha+\alpha^2}{1-2\alpha^2}=3.$$

138—141. Найти пределы:

138. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x+5}{3x^3+7x+1}$. **139.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x+8\cos x}{x}$.

140. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+8x-1}{x^5+7x^3+11}$ **141.** $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x+\cos 2x}{2x+5}$.

142. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$.

Решение. Здесь требуется найти предел разности двух величин, стремящихся к бесконечности (неопределенность вида $\infty-\infty$). Умножив и разделив данное выражение на сопряженное ему, получим

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=0.$$

Рассмотрим примеры, в которых используются замечательные пределы.

143. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}$ (k — постоянная величина).

Решение. Произведем подстановку $kx=y$. Отсюда следует, что $y\to 0$ при $x\to 0$, а $x=y/k$. Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y/k}=\lim_{y\to 0}\frac{k\sin y}{y}=k\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=k,$$

так как $\lim\limits_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}=1$.

144. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{\sin lx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin kx}{x}}{\frac{\sin lx}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin kx}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin lx}{x}}=\frac{k}{l}.$$

Здесь мы разделили числитель и знаменатель дроби на x (это можно сделать, так как $x\to 0$, но $x\neq 0$), а затем воспользовались результатом предыдущего примера.

145. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{2x^2}$.

Решение. Преобразуем числитель к виду $1-\cos 8x=2\sin^2 4x$. Далее, находим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2 4x}{2x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 4x}{x}\cdot\frac{\sin 4x}{x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{x}=4\cdot 4=16.$$

146. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

Решение. I способ. Здесь имеет место неопределенность вида 0/0. Применяя известную тригонометрическую формулу и выполняя элементарные преобразования, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x/2}\cdot\frac{\sin(x/2)}{x/2}=\frac{1}{2}.$$

II способ. Преобразуем числитель следующим образом:

$$\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x^2(1+\cos x)}=\frac{1-\cos^2 x}{x^2(1+\cos x)}=\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\cos x}.$$

Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\cos x}=$$

$$=\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\right)^2\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{x\to 0}\cos x}=1^2\cdot\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

147. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg} x}{x}$.

Решение. Заменив $\operatorname{tg} x$ на $\sin x/\cos x$, получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\operatorname{tg} x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{3}{\cos x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos x}=1\cdot 3=3.$$

148—153. Найти пределы:

148. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

149. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 17x}{8x}$.

150. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{\sin 2x}$.

151. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\sin 5x}$.

152. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 6x}{4x^2}$.

153. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$.

154. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^{3x}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right)^{6}=\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}\right)^{6}.$$

Положим $x/2=y$. Тогда при неограниченном возрастании x переменная y также будет неограниченно возрастать. Поэтому, используя второй замечательный предел, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{x/2}=\lim\limits_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}=$ $=e$. Итак, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^{3x}=e^{6}$.

155. Найти $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x}$.

Решение. Запишем основание степени в виде $\frac{3+x}{3}=1+\frac{x}{3}$, а показатель степени — в виде $\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{3}{3}=\frac{3}{x}\cdot\frac{1}{3}$. Следовательно,

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{3+x}{3}\right)^{1/x}=\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3/x\cdot1/3}=\left(\lim_{x\to0}\left(1+\frac{x}{3}\right)^{3/x}\right)^{1/3}=e^{1/3}=\sqrt[3]{e}.$$

156. Найти $\lim\limits_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}$.

Решение. Имеем

$$\lim_{x\to e}\frac{\ln x-1}{x-e}=\lim_{x\to e}\frac{\ln x-\ln e}{x-e}=\frac{1}{e}\lim_{x\to e}\frac{\ln\frac{x}{e}}{\frac{x}{e}-1}=$$

$$=\frac{1}{e}\lim_{z\to0}\frac{\ln(z+1)}{z}=\frac{1}{e}\cdot1=\frac{1}{e}\ \left(\text{здесь }\frac{x}{e}-1=z\right).$$

157—160. Найти пределы:

157. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{x}$. **158.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x}\right)^{2x}$.

159. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}$. **160.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{3x}\right)^{3x}$.

§ 3. Производная

Задачи, приводящие к понятию производной
Определение производной
Общее правило нахождения производной
Частное значение производной
Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

1. Задачи, приводящие к понятию производной

При изучении тех или иных процессов и явлений часто возникает задача определения скорости этих процессов. Ее решение приводит к понятию производной, являющемуся основным понятием дифференциального исчисления.

Метод дифференциального исчисления был создан в XVII и XVIII вв. С возникновением этого метода связаны имена двух великих математиков — И. Ньютона и Г. В. Лейбница.

Ньютон пришел к открытию дифференциального исчисления при решении задач о скорости движения материальной точки в данный момент времени (мгновенной скорости).

Как известно, *равномерным движением* называют такое движение, при котором тело в равные промежутки времени проходит равные по длине отрезки пути. Путь, пройденный телом в единицу времени, называют *скоростью* равномерного движения.

Однако чаще всего на практике мы имеем дело с неравномерным движением. Автомобиль, едущий по дороге, замедляет движение у переходов и ускоряет его на тех участках, где путь свободен; самолет снижает скорость при приземлении и т. д. Поэтому чаще всего нам приходится иметь дело с тем, что за равные отрезки времени тело проходит различные по длине отрезки пути. Такое движение называют *неравномерным*. Его скорость нельзя охарактеризовать одним числом. Так, например, при свободном падении тела оно за 1-ю секунду пройдет путь $s_1=\frac{gt^2}{2}=\frac{g\cdot 1^2}{2}\approx 4{,}9$ (м), а за 2-ю секунду — путь $s_2=\frac{g\cdot 2^2}{2}-s_1\approx 14{,}7$ (м)

Часто для характеристики неравномерного движения пользуются понятием *средней скорости* движения за время Δt, которое определяется соотношением

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs — путь, пройденный телом за время Δt.

Так, при свободном падении тела средняя скорость его движения за первые две секунды есть

$$v_{\text{ср}}=\frac{14{,}7+4{,}9}{2}\approx 9{,}8 \text{ (м/с)}.$$

Практически такая характеристика движения, как средняя скорость, говорит о движении очень мало. Действительно, при свободном падении тела средняя скорость за 1-ю секунду равна 4,9 м/с, а за 2-ю — 14,7 м/с, в то время как средняя скорость за первые две секунды составляет 9,8 м/с. Средняя скорость в течение первых двух секунд не дает никакого представления о том, как происходило движение: когда тело двигалось быстрее, а когда медленнее. Если же задать средние скорости движения для каждой секунды в отдельности, то мы будем знать, например, что во 2-ю секунду тело двигалось значительно быстрее, чем в 1-ю. Однако в большинстве случаев и такая характеристика нас мало устраивает. Ведь нетрудно понять, что в течение этой 2-й секунды тело также движется по-разному: в начале медленнее, в конце быстрее. А как оно движется где-то в середине этой 2-й секунды? Иными словами, как определить мгновенную скорость?

Пусть движение тела описывается законом $s=f(t)$. Рассмотрим путь, пройденный телом за время от t_0 до $t_0+\Delta t$, т. е. за время, равное Δt. В момент t_0 телом пройден путь $f(t_0)$, в момент $t_0+\Delta t$ — путь $f(t_0+\Delta t)$. Поэтому за время Δt тело прошло путь $f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ и средняя скорость движения тела за этот промежуток времени составит

$$v_{\text{ср}}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Чем меньше промежуток времени Δt, тем точнее можно установить, с какой скоростью движется тело в момент t_0, так как движущееся тело не может значительно изменить скорость за малый промежуток времени. Поэтому средняя скорость $v_{\text{ср}}$ при стремлении Δt к нулю приближается к действительной скорости движения и в пределе дает скорость движения v в данный момент времени t_0 (мгновенную скорость).

Таким образом,

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}.$$

Определение 1. *Мгновенной скоростью* прямолинейного движения тела в данный момент времени t_0 называется предел средней скорости за время от t_0 до $t_0+\Delta t$, когда промежуток времени Δt стремится к нулю.

Итак, чтобы найти скорость прямолинейного неравномерного движения в данный момент, нужно найти предел отношения приращения пути $\Delta s=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ к приращению времени Δt при условии $\Delta t\to 0$, т. е.

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}v_{\text{ср}}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Замечание. Эта же формула обобщается и на случай криволинейного движения, однако в этом случае помимо величины нужно учитывать также и направление скорости.

161. Определить среднюю скорость за промежуток времени $2\leqslant t\leqslant 2+\Delta t$, если закон движения задан формулой $s=t^2-t+1$, где t — время в секундах, s — расстояние в метрах. Вычислить среднюю скорость для следующих значений Δt: $\Delta t=0{,}1$; $\Delta t=0{,}01$; $\Delta t=0{,}001$; $\Delta t=0{,}0001$. Найти мгновенную скорость для момента $t=2$.

Решение. 1°. Имеем $v_{\text{ср}}=\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$; $v_{\text{мгн}}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$.

2°. Найдем путь, пройденный за время Δt:

$$\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)=((t+\Delta t)^2-(t+\Delta t)+1)-(t^2-t+1)=$$
$$=2t\Delta t+(\Delta t)^2-\Delta t=(2t-1)\Delta t+(\Delta t)^2.$$

3°. Определим среднюю скорость:

$$v_{\text{ср}}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=2t-1+\Delta t.$$

4^0. Результаты произведенных расчетов занесем в таблицу:

t	Δt	$2t-1$	$v_{ср}$
2	0,1	3	3,1
2	0,01	3	3,01
2	0,001	3	3,001
2	0,0001	3	3,0001

5^0. Из этой таблицы видно, что при $t=2$ по мере приближения Δt к нулю средняя скорость $v_{ср}$ стремится к мгновенной скорости, равной 3 м/с. Действительно,

$$v_{мгн}=\lim_{\Delta t\to 0} v_{ср}=\lim_{\Delta t\to 0}(2t-1+\Delta t)=(2t-1)|_{t=2}=3 \text{ (м/с)}.$$

162. Прямолинейное движение точки задано уравнением $s=\frac{1}{2}t^2-3t+2$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти скорость движения точки в момент времени $t=3$.

163. Найти скорость равномерно ускоренного движения, заданного уравнением $s=\frac{gt^2}{2}$, в момент времени t (g — ускорение силы тяжести, постоянная величина для данной местности).

Лейбниц пришел к открытию дифференциального исчисления при решении задачи о построении касательной к любой кривой, заданной своим уравнением.

Решение этой задачи имеет большое значение. Ведь скорость движущейся точки направлена по касательной к ее траектории, поэтому определение скорости снаряда на его траектории, скорости любой планеты на ее орбите сводится к определению направления касательной к кривой.

Что же называется касательной к кривой в данной точке?

Дело в том, что определение касательной как прямой, имеющей с кривой только одну общую точку, справедливое для окружности, непригодно для многих других кривых. Например, синусоида $y=\sin x$ имеет только одну общую точку с любой прямой, параллельной оси Oy, но ни одну из этих прямых нельзя назвать касательной к синусоиде, так как это противоречило бы представлению о касательной как о такой прямой, с которой кривая в точке касания имеет одинаковое направление. Изображенная на рис. 97 касательная к кривой в точке M одновременно является и секущей, поскольку она имеет с кривой две общие точки M и N. Следует дать такое определение касательной к кривой, которое не только соответствовало бы интуитивному представлению о ней, но и позволило бы фактически находить ее направление, т. е. вычислять угловой коэффициент касательной.

Определение 2. *Касательной* к кривой в точке M (рис. 98) называется прямая MT, которая является предельным положением секущей MM_1, когда точка M_1, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к точке M.

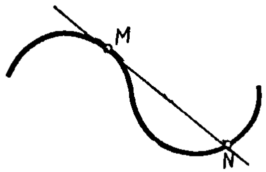

Рис. 97

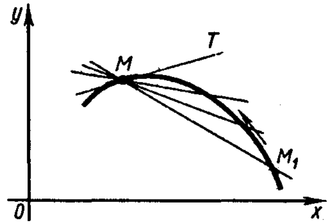

Рис. 98

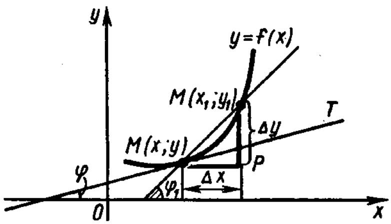

Рис. 99

Пусть дан график непрерывной функции $y=f(x)$ (рис. 99). Возьмем на кривой $y=f(x)$ точки $M(x; y)$ и $M_1(x_1; y_1)$, где $x_1=x+\Delta x$, $y_1=y+\Delta y$ (Δx — приращение аргумента, Δy — приращение функции). Проведем секущую MM_1, угловой коэффициент которой обозначим через k_1, т. е. $k_1=\operatorname{tg}\varphi_1$. Из треугольника MM_1P находим

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{y_1-y}{x_1-x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Предположим, что точка M остается неподвижной, а точка M_1, перемещаясь по кривой, неограниченно приближается к M. Тогда:

1) секущая MM_1 поворачивается вокруг точки M, приближаясь к положению касательной;

2) $x_1\to x$, а следовательно, $\Delta x=(x_1-x)\to 0$;

3) угол φ_1 стремится к углу φ между касательной и осью Ox.

Пусть k — угловой коэффициент касательной, т. е. $k=\operatorname{tg}\varphi$. Так как $\operatorname{tg}\varphi_1$ — непрерывная функция (случай, когда $\varphi_1=\pi/2$, пока исключим из рассмотрения), то

$$\operatorname{tg}\varphi=\lim_{\varphi_1\to\varphi}\operatorname{tg}\varphi_1=\lim_{x_1\to x}\frac{y_1-y}{x_1-x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Итак, угловой коэффициент касательной определяется как предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю:

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Выразив угловой коэффициент касательной через значения аргументов $x+\Delta x$, x и соответствующие им значения функций, получим

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

164. Дана функция $f(x)=x^2-1$. Найти уравнение касательной к ее графику при $x=1$.

Решение. 1^0. Сначала найдем ординату точки касания: $f(1)=1^2-1=0$. Следовательно, $(1; 0)$ — точка касания.

2^0. Составим уравнение прямой, проходящей через точку $(1; 0)$. Для этого воспользуемся известным из аналитической геометрии уравнением $y-y_1=k(x-x_1)$, где $(x_1; y_1)$ — найденная точка $(1; 0)$. Тогда получим $y=k(x-1)$.

3^0. Чтобы составить уравнение касательной, нужно найти значение углового коэффициента $k=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\Big|_{x=1}$. Так как

$$\Delta y=\Delta f(x)=((x+\Delta x)^2-1)-(x^2-1)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-1-x^2+1=$$
$$=2x\Delta x+(\Delta x)^2,$$

то

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x.$$

Следовательно, $k=2x|_{x=1}=2\cdot 1=2$.

4^0. Итак, уравнение касательной имеет вид

$$y=2(x-1),\ \text{т. е.}\ y=2x-2\ \text{или}\ 2x-y-2=0.$$

165. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2$ при $x=-1$.

166. Найти тангенс угла наклона касательной к кривой $y=x^2+5x-2$ в точке $(1; 4)$.

167. Составить уравнение касательной к кривой $y=x^2-3x+4$ в точке $(3; 4)$.

2. Определение производной

Заметим, что при определении касательной к кривой и мгновенной скорости неравномерного движения, по существу, выполняются одни и те же математические операции:

1^0. Заданному значению аргумента дают приращение и вычисляют новое значение функции, соответствующее новому значению аргумента.

2^0. Определяют приращение функции, соответствующее выбранному приращению аргумента.

3^0. Приращение функции делят на приращение аргумента.

4^0. Вычисляют предел этого отношения при условии, что приращение аргумента стремится к нулю.

К предельным переходам такого типа приводят решения многих задач. Возникает необходимость сделать обобщение и дать название этому предельному переходу.

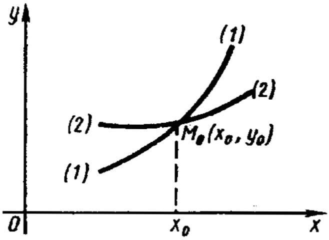

Рис. 100

Пусть величины x и y связаны функциональной зависимостью $y = f(x)$. Напомним, что приращением функции, соответствующим приращению аргумента Δx, называют разность $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

Основной вопрос, который возникает при изучении функциональной зависимости $y = f(x)$, можно сформулировать так: с какой скоростью изменяется величина y при изменении величины x? Иначе говоря, как быстро «реагирует» функция y на изменения аргумента x? На рис. 100 изображены графики функций (1) и (2) для которых $M_0(x_0; y_0)$ — общая точка. Очевидно, что в точке x_0 функция (1) реагирует на изменения аргумента быстрее, чем функция (2): ее график круче поднимается (при увеличении аргумента), а также круче опускается (при уменьшении аргумента), чем график функции (2).

Хотя поставленный выше вопрос кажется интуитивно ясным, тем не менее необходимо четко определить, что именно следует понимать под скоростью изменения функций в точке.

Рассмотрим, например, две функции $y = x^2$ и $y = x^4$ и найдем приращения, которые они получают при изменении x от 1 до 3 ($\Delta x = 2$).

Для функции $y = x^2$ находим, что $\Delta y = y_2 - y_1 = 3^2 - 1^2 = 8$, а для функции $y = x^4$ — что $\Delta y = y_2 - y_1 = 3^4 - 1^4 = 80$. Следовательно, функция $y = x^4$ изменяется гораздо быстрее, чем функция $y = x^2$.

Скорость изменения функции в зависимости от изменения аргумента можно, очевидно, охарактеризовать отношением $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Это отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ называется *средней скоростью* изменения функции на отрезке от x до $x + \Delta x$. Так как нас обычно интересует скорость изменения функции не на всем отрезке длины Δx, а именно при данном значении аргумента x, которое соответствует началу отрезка, то, очевидно, мы должны брать Δx все меньшим и меньшим, т. е. устремить его к нулю; иначе говоря, нужно рассмотреть предел дроби $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$. Предел этого отношения при стремлении приращения аргумента Δx к нулю (если этот предел существует) представляет собой некоторую новую функцию от x. Эту функцию обозначают символами y', $f'(x)$, y'_x или $\frac{dy}{dx}$ и называют *производной* данной функции $y =$

$=f(x)$, так как она получена (произведена) из функции $y=f(x)$. Сама же функция $y=f(x)$ называется *первообразной* функцией по отношению к своей производной $y'=f'(x)$.

Определение 3. *Производной* функции $y=f(x)$ в данной точке x называют предел отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx при условии, что $\Delta x \to 0$, т. е.

$$y'=f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

3. Общее правило нахождения производной

Операцию отыскания производной некоторой функции называют *дифференцированием* функции, а раздел математики, изучающий свойства этой операции, — *дифференциальным исчислением.*

Если функция имеет производную в точке $x=a$, то говорят, что она *дифференцируема в* этой *точке.* Если функция имеет производную в каждой точке данного промежутка, то говорят, что она *дифференцируема на* этом *промежутке.*

Определение производной не только с исчерпывающей полнотой характеризует понятие скорости изменения функции при изменении аргумента, но и дает способ фактического вычисления производной данной функции. Для этого необходимо выполнить следующие четыре действия (четыре шага), указанные в самом определении производной:

1^0. Находят новое значение функции, подставив в данную функцию вместо x новое значение аргумента $x+\Delta x$:

$$y_н=f(x+\Delta x)=y+\Delta y.$$

2^0. Определяют приращение функции, вычитая данное значение функции из ее нового значения:

$$\Delta y=y_н-y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

3^0. Составляют отношение приращения функции к приращению аргумента:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

4^0. Переходят к пределу при $\Delta x\to 0$ и находят производную:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Вообще говоря, производная — это «новая» функция, произведенная от данной функции по указанному правилу.

168. Найти производную функции $y=5x$.

Решение. 1^0. $y_н=5(x+\Delta x)=5x+5\Delta x$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=(5x+5\Delta x)-5x=5\Delta x$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{5\Delta x}{\Delta x}=5$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}5=5$.

Следовательно, $(5x)'=5$.

169. Найти производную функции $y=3x$.

170. Продифференцировать функцию $y=x^2$.

Решение. 1^0. $y_н=(x+\Delta x)^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x}{\Delta x}+\frac{(\Delta x)^2}{\Delta x}=2x+\Delta x$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x)=2x$.

Таким образом, $(x^2)'=2x$.

171. Продифференцировать функцию $y=x^3$.

172. Найти производную функции $y=x^2+x$.

Решение. 1^0. $y_н=(x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+x+\Delta x$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2+x+\Delta x)-(x^2+x)=x^2+2x\Delta x+$ $+(\Delta x)^2+x+\Delta x-x^2-x=2x\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2+\Delta x}{\Delta x}=2x+\Delta x+1$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x+1)=2x+1$.

Значит, $y'=2x+1$.

173. Найти производную функции $y=x^2-x$.

174. Найти производную функции $y=x^2-3x+5$.

Решение. 1^0. $y_н=(x+\Delta x)^2-3(x+\Delta x)+5=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-$ $-3x-3\Delta x+5$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=(x^2+2x\Delta x)+(\Delta x)^2-3x+3\Delta x+5)-(x^2-3x+5)=$ $=2x\Delta x+(\Delta x)^2-3\Delta x$.

3^0. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2x\Delta x+(\Delta x)^2-3\Delta x}{\Delta x}=2x+\Delta x-3$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(2x+\Delta x-3)=2x-3$.

Итак, $(x^2-3x-5)'=2x-3$.

175. На кривой $y=x^2-3x+5$ найти точку, в которой ордината y возрастает в 5 раз быстрее, чем абсцисса x.

Решение. Находим производную $y'=2x-3$ (см. решение предыдущего примера). Так как производная характеризует скорость изменения ординаты y по сравнению с изменением абсциссы x, то из условия $y'=2x-3=5$ находим абсциссу искомой точки: $x=4$. Ординату находим из уравнения кривой: $y=4^2-3\cdot 4+5=9$. Итак, (4; 9) — искомая точка.

176. Даны функции $f(x)=x^2-x$ и $g(x)=x^2+x$. Требуется установить: а) при каком значении аргумента функция $f(x)$ возрастает в 2 раза быстрее, чем $g(x)$; б) существует ли такое значение x, при котором функции изменяются с одинаковой скоростью?

Решение. а) Находим производные данных функций: $f'(x)=2x-1$ и $g'(x)=2x+1$ (см. решения примеров 172 и 173). Согласно условию, должно выполняться равенство $2x-1=2(2x+1)$; решая это уравнение, находим $x=-3/2$.

б) Так как уравнение $2x-1=2x+1$ не имеет действительных корней, то на поставленный вопрос получаем отрицательный ответ.

4. Частное значение производной

Чтобы вычислить частное значение производной, нужно в общее выражение производной вместо x подставить его числовое значение $x=x_0$, т. е. вычислить значение $f'(x_0)$.

177. Найти производную функции $y=2x^3-x^2+5$ в точке $x=2$.

Решение. Сначала найдем производную данной функции в общем виде, т. е. в произвольной точке x:

1^0. $y_н=y+\Delta y=2(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2+5=2x^3+6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+$ $+2(\Delta x)^3-x^2-2x\Delta x-(\Delta x)^2+5$.

2^0. $\Delta y=6x^2\Delta x+6x(\Delta x)^2+2(\Delta x)^3-2x\cdot\Delta x-(\Delta x)^2$.

3^0. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=6x^2+6x\Delta x+2(\Delta x)^2-2x-\Delta x$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(6x^2+6x\cdot\Delta x+2(\Delta x)-2x-\Delta x)=6x^2-2x$.

5^0. Подставив теперь в равенство $y'=6x^2-2x$ значение $x=2$, находим $y'_{x=2}=20$.

178. Найти $y'_{x=0,5}$, если $y=x^2-x$.

179. Найти $y'_{x=0}$, если $y=x^2-3x+5$.

180. Найти $y'_{x=2}$, если $y=-3/x$.

181. Найти $y'_{x=-1}$, если $y=1/x$.

182. Найти $y'_{x=2}$, если $y=1/x^2$.

183. Дана функция $y=\sqrt{x}$. Найти $y'_{x=9}$.

Решение. 1^0. $y_н=\sqrt{x+\Delta x}$.

2^0. $\Delta y=y_н-y=\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}$.

3^0. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{(\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x})(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x})}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{\sqrt{x+0}+\sqrt{x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

5^0. $y'_{x=9}=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=9}=\dfrac{1}{2\sqrt{9}}=\dfrac{1}{6}$.

184. Найти $y'_{x=3}$, если $y=\sqrt{x+1}$.

185. Найти $y'_{x=3\sqrt{3}}$, если $y=\sqrt[3]{x}$.

186. Пользуясь определением производной, найти производную функции $y=\sin 3x$ в точке $x=\pi/9$.

Решение. Дадим некоторому значению x приращение Δx; тогда функция y получит приращение

$$\Delta y=\sin(3(x+\Delta x))-\sin 3x=2\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\sin\frac{3\Delta x}{2}.$$

Составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ и перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\left(\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{3\Delta x}{2}}{\Delta x}\right)=$$

$$=2\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(3x+\frac{3\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{3}{2}\Delta x}{\Delta x}=2\cos 3x\cdot\frac{3}{2}=3\cos 3x.$$

Итак, $(\sin 3x)'=3\cos 3x$.

Подставив вместо аргумента его значение $x=\pi/9$, получим

$$y'(\pi/9)=3\cos\frac{\pi}{3}=3\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{2}.$$

187. Найти $y'_{x=\pi/4}$, если $y=\cos x$.

188. Найти $y'_{x=2\pi/3}$, если $y=\sin x$.

5. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Поставим следующий вопрос: все ли функции имеют производную или только некоторые? Чтобы ответить на него, рассмотрим функцию $y=f(x)$. Производная этой функции определяется формулой $f'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$, если указанный предел существует. Для существования этого предела необходимо, чтобы $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$ (в противном случае будет иметь место деление на нуль, что невозможно); отмеченное условие является условием непрерывности функции в данной точке. Отсюда вытекает следующее утверждение.

▲ **Теорема.** *Если функция дифференцируема в данной точке, то в этой точке она непрерывна.*

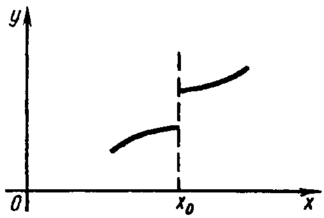

Рис. 101

Из этой теоремы следует, что в точке разрыва $x=x_0$ (рис. 101) функция не может иметь производную, так как в этой точке приращение Δy равно конечной величине при $\Delta x\to 0$. В дальнейшем будет показано, что утверждение, обратное приведенной теореме, неверно. Если в какой-либо точке данная функция

$y=f(x)$ является непрерывной, то она может и не иметь производной в этой точке.

Все функции, рассматриваемые в дальнейшем, будем считать дифференцируемыми.

189. Показать, что в точке $x=\pi/2$ функция $y=\operatorname{tg}x$ не имеет производной.

Решение. В точке $x=\pi/2$ функция $\operatorname{tg}x$ не существует, т. е. не выполняется условие непрерывности функции; значит, в этой точке функция не имеет производной.

190. Почему в точке $x=0$ функция $y=\ln x$ не имеет производной?

§ 4. Правила и формулы дифференцирования элементарных функций

Таблица правил и формул дифференцирования
Правила дифференцирования алгебраической суммы, произведения и частного
Правило дифференцирования сложной функции
Дифференцирование логарифмических функций
Производная степенной функции
Производная показательной функции
Дифференцирование тригонометрических функций
Дифференцирование обратных тригонометрических функций

1. Таблица правил и формул дифференцирования

Определение производной по формуле $f'_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ четко указывает действия, которые нужно выполнить для ее нахождения, что позволяет непосредственно вычислять производную любой элементарной функции. Необходимо хорошо овладеть непосредственным дифференцированием, поскольку оно позволяет вывести основные правила и формулы дифференцирования. Эти правила и формулы следует обязательно знать, чтобы не повторять все выкладки при нахождении производной данной функции. Ведь существует бесконечное множество функций и с их усложнением непосредственное дифференцирование становится все более трудоемким.

Поэтому целесообразно вывести формулы производных для основных элементарных функций (степенной, показательной, логарифмической, тригонометрических и обратных тригонометрических) и сформулировать правила дифференцирования суммы, разности, произведения и частного функций, а также правило дифференцирования сложной функции, т. е. функции от функции.

Это позволит находить производные всех элементарных функций, которые могут быть получены из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции.

Прежде чем доказывать правила и формулы дифференцирования, сведем их в таблицу и в дальнейшем будем пользоваться ею, подобно тому как в арифметике пользуются таблицей умножения.

Правила дифференцирования

I. $C'=0$, C — постоянная. II. $(x)'=1$.

III. $(u+v-w)'=u'+v'-w'$. IV. $(uv)'=u'v+v'u$.

V. $(Cu)'=Cu'$, C — постоянная. VI. $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$.

VII. $y'_x=y'_u u'_x$.

Формулы дифференцирования

Основные элементарные функции	*Сложные функции*
VIII. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'$.
IX. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\cdot\ln a}$,	$(\log_a u)'=\frac{1}{u\cdot\ln a}\cdot u'$.
X. $(x^n)'=nx^{n-1}$,	$(u^n)'=nu^{n-1}\cdot u'$.
XI. $(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$,	$(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$.
XII. $(a^x)'=a^x\cdot\ln a$,	$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$.
$(e^x)'=e^x$,	$(e^u)'=e^u\cdot u'$
XIII. $(\sin x)'=\cos x$,	$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$.
XIV. $(\cos x)'=-\sin x$,	$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$.
XV. $(\mathrm{tg}\, x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$,	$(\mathrm{tg}\, u)'=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'$.
XVI. $(\mathrm{ctg}\, x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$,	$(\mathrm{ctg}\, u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot u'$.
XVII. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.
XVIII. $(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$,	$(\arccos u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot u'$.
XIX. $(\mathrm{arctg}\, x)'=\frac{1}{1+x^2}$,	$(\mathrm{arctg}\, u)'=\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.
XX. $(\mathrm{arcctg}\, x)'=-\frac{1}{1+x^2}$,	$(\mathrm{arcctg}\, u)'=-\frac{1}{1+u^2}\cdot u'$.

2. Правила дифференцирования алгебраической суммы, произведения и частного

Производная постоянной. Пусть дана постоянная функция $y=C$. Тогда ее приращение $\Delta y=C-C=0$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$, т. е.

$$C'=0.$$

Итак, *производная постоянной равна нулю.*

Например, $(12)'=0$; $(\pi)'=0$; $(\ln 2)'=0$.

Производная независимой переменной. Пусть дана функция $y=x$. Найдем ее производную по общему правилу.

1^0. Так как $y=x$, то $y_н=x+\Delta x$.

2^0. Имеем $\Delta y=y_н-y=(x+\Delta x)-x=\Delta x$, т. е. приращение функции равно приращению аргумента.

3^0. Находим $\frac{\Delta y}{\Delta x}=1$.

4^0. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}1=1$, как предел постоянной величины.

Следовательно,

$$x'=1,$$

т. е. *производная функции $y=x$ равна единице.*

Производная алгебраической суммы. Пусть дана функция $y=f(x)$, которую можно представить в виде алгебраической суммы слагаемых u, v, w, имеющих производную в точке x, т. е. $y=u+v-w$. Найдем производную y' по общему правилу.

1^0. Дадим аргументу приращение Δx; тогда функции y, u, v и w получат соответствующие приращения Δy, Δu, Δv и Δw, т. е.

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w).$$

2^0. $\Delta y=((u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w))-y$;

$\Delta y=((u+\Delta u)+(v+\Delta v)-(w+\Delta w))-(u+v-w)$;

$\Delta y=\Delta u+\Delta v-\Delta w$.

3^0. Разделим обе части последнего равенства на Δx:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta u}{\Delta x}+\frac{\Delta v}{\Delta x}-\frac{\Delta w}{\Delta x}.$$

4^0. Переходя к пределу $\Delta x\to 0$, получаем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta x};$$

$$y'=u'+v'-w';\quad (u+v-w)'=u'+v'-w'.$$

Очевидно, что полученную формулу можно обобщить на любое число слагаемых: *производная алгебраической суммы* *конечного числа слагаемых равна алгебраической сумме производных этих слагаемых.*

Производная произведения. Пусть дана функция $y=uv$, где u и v — дифференцируемые функции.

Следуя общему правилу нахождения производной, находим:

1°. $y+\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)$.

2°. $\Delta y=(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv$;

$\Delta y=\Delta u\cdot v+\Delta v\cdot u+\Delta u\cdot\Delta v$.

3°. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}$.

4°. Перейдем к пределу; учитывая что u и v не зависят от Δx, выносим их за знак предела:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=v\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}.$$

В последнем равенстве $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta u=0$, $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, $\lim_{\Delta x}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'$ и $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$, так как рассматриваемые функции непрерывны. Следовательно, $y'=u'v+v'u$ или

$$(uv)'=u'v+v'u.$$

Итак, *производная произведения двух функций равна производной первого сомножителя, умноженной на второй, плюс производная второго сомножителя, умноженная на первый.*

Следствие. *Постоянный множитель можно вынести за знак производной.*

Действительно, пусть дана функция $y=Cu$, где C — постоянная. Найдем ее производную по правилу дифференцирования произведения. Имеем $y'=Cu'+C'u$. Так как $C'=0$, то

$$(Cu)'=Cu'.$$

Например, $(5x)'=5(x)'=5$.

191. Дана функция $y=kx$. Найти y'.

Решение. Применив сначала правило V, а затем правило II, получим

$$(kx)'=k(x)'=k\cdot 1=k.$$

Следовательно, $(kx)'=k$, где k — постоянный множитель.

192. Найти производную функции $y=x^2$.

Решение. Представим данную функцию в виде произведения: $x^2=x\cdot x$. Используя теперь правило IV, находим

$$(x^2)'=(x\cdot x)'=x'x+xx'=2x,$$

поскольку $(x)'=1$. Итак, $(x^2)'=2x$.

193. Найти производную функции $y=3x^2$.

194. Найти производную функции $y=x^3$.

Решение. Представив данную функцию в виде произведения: $x^3 = x^2 \cdot x$ и снова применяя правило IV, найдем

$$(x^3)' = (x^2 \cdot x)' = (x^2)' \cdot x + (x)' \cdot x^2 = 2x \cdot x + 1 \cdot x^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2.$$

195. Найти производную функции $y = 5x^3$.

196. Дана функция $y = x^4$. Найти y'.

Решение. Поступаем так же, как и в примере 194:

$$(x^4)' = (x^3 \cdot x)' = (x^3)' \cdot x + (x)' \cdot x^3 = 3x^2 \cdot x + x^3 = 3x^3 + x^3 = 4x^3.$$

Если рассмотренным выше способом продифференцировать функции x^5, x^6, x^7 и т. д., то в результате получим следующую общую формулу:

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Производная степени равна произведению показателей степени на степень того же основания с показателем на единицу меньше.

В дальнейшем эта формула будет доказана для любого действительного показателя.

197. Найти производную функции $y = 9x^5$.

Решение. Используя правило V и формулу $(x^n)' = nx^{n-1}$, получим

$$y' = (9x^5)' = 9 \cdot 5x^4 = 45x^4.$$

При навыке промежуточные записи можно пропустить:

$$(9x^5)' = 45x^4.$$

198. Найти производную функции $y = x^3 + 6x$.

Решение. В правой части имеем алгебраическую сумму дифференцируемых функций, поэтому применяем правило III:

$$(x^3 + 6x)' = (x^3)' + (6x)'.$$

Используя результаты примеров 194 и 191, получим

$$(x^3)' + (6x)' = 3x^2 + 6.$$

199. Найти производную функции $y = 5x^2 - x + 4$.

Решение. $(5x^2 - x + 4)' = (5x^2)' - (x)' + (4)' = 5(x^2)' - 1 = 10x - 1.$

200—214. Найти производные следующих функций:

200. $y = 3x^{-2}$. **201.** $y = 4x^{-3}$. **202.** $y = 2x^{1/3}$.

203. $y = 2x^{1/4}$. **204.** $y = 3x^{-2/3}$. **205.** $y = 5x^{-3/5}$.

206. $y = 5\sqrt[5]{x^2}$. **207.** $y = 3\sqrt[3]{x}$. **208.** $y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{x^2}}$.

209. $y = \dfrac{3}{\sqrt{x^3}}$. **210.** $y = \dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}$. **211.** $y = \dfrac{x^3}{\sqrt{x}}$.

212. $y = \dfrac{2\sqrt{x}}{x^2}$. **213.** $y = \dfrac{6\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$. **214.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x\sqrt[3]{x}}$.

215. Найти $f'(1/2)$, если $f(x) = 1/x^4$.

216. Найти $f'(27)$, если $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$.

217. Найти $f'(-1)$, если $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$.

218. Найти $f'(0{,}5)$, если $f(x)=-x^3+9x^2-x+2$.

219. Найти производную функции $y=1/x^3$.

Решение. Используя степень с отрицательным показателем, преобразуем данную функцию к виду $1/x^3=x^{-3}$. Тогда получим

$$(1/x^3)'=(x^{-3})'=-3x^{-3-1}=-3x^{-4}=-3\cdot\frac{1}{x^4}=-\frac{3}{x^4}.$$

220. Продифференцировать функцию $y=2x^3(x^6-1)$.

Решение. I способ. Используя правило IV, получим

$$(2x^3(x^6-1))'=(2x^3)'(x^6-1)+(x^6-1)'\cdot 2x^3=6x^2(x^6-1)+6x^5\cdot 2x^3=$$
$$=6x^8-6x^2+12x^8=18x^8-6x^2=6x^2(3x^6-1).$$

II способ. Предварительно преобразуем данную функцию: $2x^3(x^6-1)=2x^9-2x^3$. Тогда получим

$$y'=(2x^9-2x^3)'=18x^8-6x^2=6x^2(3x^6-1).$$

221. Продифференцировать функцию $y=(x^2+2)(2x+1)$.

Решение. I способ. Воспользуемся правилом IV при $u=x^2+2$, $v=2x+1$. Имеем

$$y'=(x^2+2)'(2x+1)+(2x+1)'(x^2+2)=2x(2x+1)+2(x^2+2)=$$
$$=4x^2+2x+2x^2+4=6x^2+2x+4.$$

II способ. Сначала перемножим выражения в скобках, а затем найдем производную:

$$((x^2+2)(2x+1))'=(2x^3+4x+x^2+2)'=6x^2+4+2x.$$

222—227. Найти производные следующих функций:

222. $y=(x^3-2)(x^2+x+1)$. **223.** $f(x)=(x+2)(2x^3-x)$.

224. $f(t)=(t^2+1)(t^3-t)$. **225.** $f(u)=(u^2-u+1)(2u^3+1)$.

226. $y=(z^2+1)(z^3-1)$. **227.** $y=(x^4-3)(x^2+2)$.

Производная частного. Пусть дана функция $y=\frac{u}{v}$, где u и v — дифференцируемые функции, причем $v\neq 0$. Следуя общему правилу нахождения производной, находим:

1^0. $y+\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}$.

2^0. $\Delta y=\dfrac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\dfrac{u}{v}$, откуда после приведения к общему знаменателю находим

$$\Delta y=\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{v(v+\Delta v)}.$$

3^0. Разделим последнее равенство на $\Delta x\neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\Delta v)}.$$

4^0. Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{v\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}-u\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(v+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v)}.$$

Так как функции y, u и v непрерывны, то $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$ $=u'$, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=v'$ и $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0$. Следовательно, $y'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$ или

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

Итак, *производная дроби равна дроби, знаменатель которой равен квадрату знаменателя данной дроби, а числитель равен производной числителя данной дроби, умноженный на ее знаменатель, минус производная знаменателя, умноженная на числитель.*

228. Найти производную функции $y=\frac{x^2-2}{x^2+2}$.

Решение. Применяем правило VI:

$$y'=\frac{(x^2-2)'(x^2+2)-(x^2+2)'(x^2-2)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x(x^2+2)-2x(x^2-2)}{(x^2+2)^2}=$$

$$=\frac{2x(x^2+2-x^2+2)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x\cdot 4}{(x^2+2)^2}=\frac{8x}{(x^2+2)^2}.$$

229. Найти производную функции $y=\frac{1}{x}$.

Решение. I способ. Применяем правило VI при $u=1$, $v=x$. Тогда получим

$$y'=\frac{0\cdot x-1\cdot 1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}.$$

II способ. Предварительно преобразуем данную функцию к виду $y=\frac{1}{x}=x^{-1}$, а затем применим формулу $(x^n)=nx^{n-1}$:

$$y'=(x^{-1})'=-1\cdot x^{-2}=-x^{-2}=-\frac{1}{x^2}.$$

230—237. Найти производные следующих функций:

230. $y=\frac{x^2-1}{x^2+1}$. **231.** $y=\frac{1-x^5}{1+x^5}$.

232. $y=\frac{3-x}{x^2}$. **233.** $y=\frac{x^2-1}{x^2}$.

234. $y=\frac{1+x^2}{3x}$. **235.** $y=\frac{2+x^3}{2x}$.

236. $y=\frac{x^2-x+2}{x^2}$. **237.** $y=\frac{1}{1-x^2}$.

3. Правило дифференцирования сложной функции

Сложная функция — это функция от функции. Говоря о сложной функции, имеют в виду, что такая функция составлена из нескольких функций, а не какую-то ее особенную сложность. Например, функция $y=\sin 3x$ является сложной. Если обозначить $3x=u$, то получим $y=\sin u$, где u — промежуточная функция. В сложную функцию может входить не одна, а несколько промежуточных функций. Например, для функции $y=\cos^2 2x$ промежуточными функциями служат $u=\cos v$ и $v=2x$.

Докажем теорему о дифференцируемости сложной функции.

▲ **Теорема.** *Если функция $f(u)$ дифференцируема по u, а $u(x)$ дифференцируема по x, то производная сложной функции $y=f(u(x))$ по независимой переменной x определяется равенством*

$$y'_x=y'_u u'_x.$$

Доказательство. Пусть дана дифференцируемая функция $y=f(x)$, которая является сложной и имеет промежуточный аргумент u, зависящий от x.

По определению производной мы можем записать $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Умножив числитель и знаменатель функции, содержащейся под знаком предела, на приращение промежуточного аргумента Δu, имеем

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right).$$

Поскольку Δx стремится к нулю, в силу непрерывности функции $u(x)$ приращение Δu также стремится к нулю. Тогда получим

$$y'=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u u'_x,$$

т. е. *производная функции y по аргументу x равна производной этой функции по промежуточному аргументу u, умноженной на производную промежуточного аргумента u по основному аргументу x.*

Это правило иногда называют *правилом цепочки.* Оно остается справедливым и в случае, когда сложная функция состоит из любого конечного числа простых функций. Таким образом, производная сложной функции равна произведению производных от всех составляющих ее функций. При этом следует помнить, что каждую функцию нужно дифференцировать по ее собственному аргументу.

Если учесть, что производная — это скорость изменения функции при данном аргументе, то правило цепочки становится очевидным. Например, если y изменяется в 10 раз быстрее, чем $u(y'_u=10)$, u — в 5 раз медленнее, чем $v(u'_v=1/5)$, и v — в 4 раза быстрее, чем $x(v'_x=4)$, то $y'_x=y'_u u'_v v'_x=10\cdot(1/5)\cdot 4=8$, т. е. y изменяется в 8 раз быстрее, чем x.

При дифференцировании сложных функций удобно ввести коэффициент сложности, указывающий количество простых функций, входящих в данную сложную функцию. Он обозначается цифрой в кружке после записи функции. Например, для функции $y=\cos 5x$ ② коэффициент сложности равен 2, так как в нее входят две простые функции $y=\cos u$ и $u=5x$. Для функции $y=\sin^2 3x$ ③ коэффициент сложности равен 3 (простыми функциями, составляющими данную, являются $y=u^2$, $u=\sin v$, $v=3x$).

Очень важно правильно определить порядок следования промежуточных функций. Например, для функции $y=\ln \operatorname{tg}^2 3x$ ④, имеющей коэффициент сложности 4, промежуточные функции расположены в следующем порядке: 1) логарифмическая $\ln(\operatorname{tg}^2 3x)$; 2) степенная $(\operatorname{tg} 3x)^2$; 3) тригонометрическая $\operatorname{tg}(3x)$; 4) линейная $3x$.

Замечание. Отметим, что аргументом логарифмической функции является $\operatorname{tg}^2 3x$, т. е. все выражение, стоящее под знаком натурального логарифма; аргументом степенной функции является $\operatorname{tg} 3x$, т. е. все выражение, стоящее под знаком степени, и т. д.

238. Продифференцировать функцию $y=(x^2+3x)^5$.

Решение. Коэффициент сложности данной функции равен 2. Составляющими функции являются $y=u^5$, $u=x^2+3x$. Согласно правилу дифференцирования сложной функции, находим

$$y'_x=y'_u u'_x=5(x^2+3x)^4(2x+3).$$

239. Учитывая, что $(\sin t)'=\cos t$, продифференцировать функцию $y=\sin 2x$.

Решение. Коэффициент сложности данной функции равен 2. Порядок следования промежуточных функций таков: $y=\sin u$, $u=2x$. Находим

$$y'=\cos 2x\cdot(2x)'=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x.$$

240. Найти y', если $y=\sin^2 4x$.

Решение. Имеем $y=\sin^2 4x$ ③. Порядок следования функций: $y=u^2$; $u=\sin v$; $v=4x$. Значит,

$$y'=2\sin 4x(\sin 4x)'=2\sin 4x\cos 4x\cdot(4x)'=2\sin 4x\cos 4x\cdot 4=4\sin 8x$$

(в окончательной записи использована формула синуса двойного угла).

В дальнейшем, когда в практике дифференцирования накопится достаточный опыт, можно обходиться без промежуточных записей.

Например, если $y=\sin(x^2+1)$, то $y'=\cos(x^2+1)\cdot 2x=2x\cos(x^2+1)$.

241—246. Найти производные следующих функций:

241. $y=(9-x^2)^4$. **242.** $y=(x^4-x-1)^4$.

243. $y=\sqrt{x^3+1}$. **244.** $y=\sqrt[3]{(1-x^2)^2}$.

245. $y=\sin 5x$. **246.** $y=\sin^2 3x$.

247. Учитывая, что $(\cos t)'=-\sin t$, найти производную функции $y=2\cos 5x$.

248. Найти y', если $y=\cos^3 2x$.

4. Дифференцирование логарифмических функций

Производные функций $y=\ln x$ и $y=\ln u$, где $u=f(x)$.

Выведем формулу дифференцирования логарифмической функции $y=\ln x$. Областью определения этой функции является интервал $(0,\ \infty)$. Найдем производную по общему правилу дифференцирования:

1⁰. Дадим аргументу x приращение Δx; тогда y получит приращение Δy.

2⁰. Найдем приращение функции:

$$\begin{array}{r} -\begin{array}{l} y+\Delta y=\ln(x+\Delta x) \\ y=\ln x \end{array} \\ \hline \Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x \end{array}$$

$$\Delta y=\ln\frac{x+\Delta x}{x};\quad \Delta y=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

3⁰. Разделив обе части последнего равенства на Δx, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\cdot\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

Правую часть этого равенства умножим и разделим на x:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\cdot\frac{x}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

(это можно сделать, так как $x\neq 0$).

Используя свойство логарифмов $m\ln a=\ln a^m$, можно записать

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}.$$

Пусть $\frac{x}{\Delta x}=n$, откуда $\frac{\Delta x}{x}=\frac{1}{n}$; подставив эти выражения в последнее равенство, получим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

4⁰. Перейдем к пределу при $\Delta x\to 0$; из равенства $\frac{x}{\Delta x}=n$ следует, что $n\to\infty$, когда $\Delta x\to 0$, и условие $\Delta x\to 0$ можно заменить условием $n\to\infty$. Учитывая сказанное, имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Дробь $\frac{1}{x}$ можно вынести за знак предела, поскольку значения x не зависят от n; предел логарифма функции равен логарифму предела функции, так как логарифмическая функция непрерывна. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{x}\ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right).$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ и $\ln e=1$, находим

$$y'=\frac{1}{x},\text{ или }(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Итак, *производная функции $y=\ln x$ равна единице, деленной на аргумент.*

Выведем формулу дифференцирования функции $y=\ln u$, где $u=f(x)$.

Используя формулу дифференцирования сложной функции $y'_x=y'_u u'_x$, получаем $(\ln u)'_x=(\ln u)'_u u'_x$, т. е.

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}.$$

Производная функции $y=\ln u$ равна дроби, знаменателем которой является промежуточный аргумент, а числителем — его производная по независимой переменной x.

249—260. Найти производные следующих функций:

249. $y=\ln x^2$.

Решение. $y'=\frac{1}{x^2}\cdot(x^2)'=\frac{1}{x^2}\cdot 2x=\frac{2}{x}$.

250. $y=\ln(x^3-1)$.

Решение. $y'=\frac{1}{x^3-1}(x^3-1)'=\frac{1}{x^3-1}\cdot 3x^2=\frac{3x^2}{x^3-1}$.

251. $y=\ln x^3$. **252.** $y=\ln(x^2+3)$.

253. $y=\ln\sin x$.

Решение. Здесь $u=\sin x$. Тогда получим

$$y'_x=\frac{u'_x}{u}=\frac{(\sin x)'}{\sin x}=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg} x.$$

254. $f(x)=\ln^3(x^2-1)$.

Решение. Имеем $f(x)=\ln^3(x^2-1)$. Порядок следования промежуточных функций таков: $f(x)=u^3$; $u=\ln v$; $v=x^2-1$. Следовательно,

$$f'(x)=3\ln^2(x^2-1)\cdot\frac{1}{x^2-1}\cdot 2x=\frac{6x}{x^2-1}\ln^2(x^2-1).$$

255. $y=\ln\sin 3x$. **256.** $y=\ln^2\sin 2x$.

257. $y=\ln\sin^3 5x$. **258.** $y=\ln\frac{x+2}{x-2}$.

259. $y=\ln\sqrt{2x-1}$. **260.** $y=\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

Производные функций $y=\log_a x$ и $y=\log_a u$, где $u=f(x)$.

Если дан десятичный логарифм или логарифм числа по любому другому основанию, то следует воспользоваться формулой перехода от одной системы логарифмов к другой.

Известно, что

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a}.$$

Если положить $b = e$, то логарифм числа по основанию a можно выразить через натуральный логарифм, а именно:

$$\log_a N = \frac{\ln N}{\ln a}.$$

Воспользуемся последней формулой для нахождения производной функции $y = \log_a x$. Имеем

$$(\log_a x)' = \left(\frac{\ln x}{\ln a}\right)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом, *производная функции $y = \log_a x$ равна единице, деленной на произведение аргумента и натурального логарифма основания.*

Пусть теперь $y = \log_a u$, где $u = f(x)$. Тогда согласно правилу дифференцирования сложной функции имеем $y'_x = (\log_a u)'_u u'_x$. Но $(\log_a u)'_u = \frac{1}{u \ln a}$ и, следовательно,

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}.$$

261—278. Найти производные следующих функций:

261. $y = \log_2 x$.

Решение. $y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$.

262. $y = \log_5 x$. **263.** $y = \log_{0,4} x$.

264. $y = \log_3 4x$.

Решение. I способ. Так как $\log_3 4x = \log_3 4 + \log_3 x$, то

$$y' = (\log_3 4 + \log_3 x)' = (\log_3 4)' + (\log_3 x)' = 0 + \frac{1}{x \ln 3} = \frac{1}{x \ln 3}.$$

II способ. $(\log_3 4x)' = \frac{1}{4x \ln 3}(4x)' = \frac{4}{4x \ln 3} = \frac{1}{x \ln 3}$.

265. $y = \log_2 3x$. **266.** $y = \log_{0,5} 5x$.

267. $u = \log_7 x^5$.

Решение. I способ. $(\log_7 x^5)' = (5 \log_7 x)' = \frac{5}{x \ln 7}$.

II способ. $(\log_7 x^5)' = \frac{1}{x^5 \ln 7}(x^5)' = \frac{5x^4}{x^5 \ln 7} = \frac{5}{x \ln 7}$.

268. $v = \log_5 t^3$. **269.** $s = \log_{1/3} t^4$.

270. $y = \lg(x-1)$.

Решение. $y'=\frac{1}{(x-1)\ln 10}$.

271. $y=\lg(x+3)$. **272.** $y=\lg(x-6)$.

273. $y=\log_3(x^2+3x-1)$.

Решение. $y'=\frac{(x^2+3x-1)'}{(x^2+3x-1)\ln 3}=\frac{2x+3}{(x^2+3x-1)\ln 3}$.

274. $y=\log_2(z^2-2z)$. **275.** $y=\log_{0,3}(x^2+4x-3)$.

276. $u=\log_5\cos 7x$.

Решение. $u'=\frac{1}{\cos 7x\ln 5}(\cos 7x)'=\frac{-\sin 7x\cdot 7}{\cos 7x\ln 5}=-\frac{7\operatorname{tg}7x}{\ln 5}$.

277. $y=\log_7\cos\sqrt{1+x}$. **278.** $y=\lg\operatorname{ctg}x$.

5. Производная степенной функции

Найдем производную функции $y=x^n$, где n — любое действительное число. Для этого применим способ, который называется *логарифмическим дифференцированием*. Он заключается в том, что функцию сначала логарифмируют, а затем находят производную.

Прологарифмируем функцию $y=x^n$ по основанию e:

$$\ln y=n\ln x.$$

Дифференцируя обе части этого равенства, имеем

$$(\ln y)'=(n\ln x)'.$$

Левую часть последнего равенства можно записать в виде $(\ln y)'=\frac{1}{y}\cdot y'_x$ (так как y — сложная функция от x), а правую часть — в виде $(n\ln x)'=\frac{n}{x}$. Поэтому $\frac{1}{y}\cdot y'_x=\frac{n}{x}$, т. е. $y'_x=y\times$ $\times\frac{n}{x}$. Но $y=x^n$ и, следовательно,

$$y'_x=x^n\cdot\frac{n}{x}=n\cdot x^{n-1},$$

откуда

$$(x^n)'=nx^{n-1}.$$

Мы получили обобщение известной формулы производной степени, справедливое для любого показателя.

Найдем производную функции $y=u^n$, где $u=f(x)$. Воспользовавшись правилом дифференцирования сложной функции, получим $y'=y'_u u'_x=nu^{n-1}u'$. Итак,

$$(u^n)'=nu^{n-1}u'.$$

279—300. Найти производные следующих функций:

279. $y=2x^3-4x+2$.

Решение. $y'=(2x^3-4x+2)'=(2x^3)'-(4x)'+(2)'=6x^2-4.$

280. $y=\dfrac{3}{5x^2}.$

Решение. Преобразуем данную функцию к виду $y=\dfrac{3}{5x^2}=$ $=\dfrac{3}{5}x^{-2}$. Тогда получим

$$y'=\left(\frac{3}{5}x^{-2}\right)'=\frac{3}{5}(x^{-2})'=\frac{3}{5}(-2)x^{-3}=-\frac{6}{5}x^{-3}=-\frac{6}{5x^3}.$$

281. $y=\dfrac{1}{2}x^4-\dfrac{1}{6}x^3+3x^2+x-3.$ **282.** $y=\dfrac{3}{8x^4}.$

283. $y=\dfrac{1}{3}x^6+\dfrac{7}{10x^5}-\dfrac{1}{6}x^3.$ **284.** $y=\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{6}{x^3}.$

285. $f(x)=\sqrt[4]{x^3}.$

Решение. Так как $f(x)=\sqrt[4]{x^3}=x^{3/4}$, то

$$f'(x)=(x^{3/4})'=\frac{3}{4}x^{3/4-1}=\frac{3}{4}x^{-1/4}=\frac{3}{4\sqrt[4]{x}}.$$

286. $y=\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}.$

Решение. Здесь $y=\dfrac{2}{3x\sqrt{x}}=\dfrac{2}{3}x^{-3/2}$, откуда

$$y'=\left(\frac{2}{3}x^{-3/2}\right)'=-\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}x^{-5/2}=-x^{-5/2}=-\frac{1}{x^2\sqrt{x}}.$$

287. $y=x^2+\dfrac{2}{x^4}-\sqrt[3]{x}.$

Решение. Имеем $y=x^2+2x^{-4}-x^{1/3}$. Следовательно,

$$y'=(x^2+2x^{-4}-x^{1/3})'=(x^2)'+(2x^{-4})'-(x^{1/3})'=2x-8x^{-5}-\frac{1}{3}x^{-2/3}=$$

$$=2x-\frac{8}{x^5}-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

288. $y=\dfrac{3x^2-4x+1}{2x+1}.$

Решение. Применяем правило дифференцирования частного и формулу X:

$$y'=\frac{(3x^2-4x+1)'(2x+1)-(2x+1)'(3x^2-4x+1)}{(2x+1)^2}=$$

$$=\frac{(6x-4)(2x+1)-2(3x^2-4x+1)}{(2x+1)^2}=\frac{12x^2+6x-8x-4-6x^2+8x-2}{(2x+1)^2}=$$

$$=\frac{6x^2+6x-6}{(2x+1)^2}=\frac{6(x^2+x-1)}{(2x+1)^2}.$$

289. $y=\sqrt{x}(x^2+2x-5).$

Решение. Здесь следует воспользоваться правилом дифференцирования произведения и формулой X. Имеем

$$y'=(\sqrt{x})'(x^2+2x-5)+(x^2+2x-5)'\sqrt{x}.$$

Так как $(\sqrt{x})'=(x^{1/2})'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $(x^2+2x-5)'=2x+2$, то

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2+2x-5)+(2x+2)\sqrt{x}=\frac{x^2}{2\sqrt{x}}+\frac{2x}{2\sqrt{x}}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}+$$
$$+2\sqrt{x}=\frac{1}{2}x\sqrt{x}+\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}+2x\sqrt{x}+2\sqrt{x}=2{,}5x\sqrt{x}+3\sqrt{x}-\frac{5}{2\sqrt{x}}.$$

290. $y=\sqrt[5]{x^3}$. **291.** $f(x)=2x\sqrt[3]{x^2}$.

292. $u(t)=t^3-\frac{1}{t^2}+t\sqrt[3]{t}$. **293.** $y=\frac{x^2-3x}{2x+1}$.

294. $y=\frac{\frac{1}{3}x^3-2x^2+x}{x^4-1}$. **295.** $y=\frac{x^3+3x^2}{3x-1}$.

296. $f(x)=x^3\sin x$.

Решение. Применяя формулы IV, X и учитывая, что $(\sin x)'=$ $=\cos x$, находим

$$f'(x)=(x^3)'\sin x+(\sin x)'x^3=3x^2\sin x+x^3\cos x=x^2(3\sin x+x\cos x).$$

297. $f(x)=x^2(\sqrt{x}+x-1)$. **298.** $y=\sqrt[3]{x^2}(2\sqrt{x}-3)$.

299. $s(t)=t(\sqrt{t}-5)$. **300.** $s(t)=\sqrt[3]{t}\,(t^2-\sqrt{5})$.

6. Производная показательной функции

Производную показательной функции также можно найти с помощью логарифмического дифференцирования.

Пусть дана функция $y=a^x$, где $a>0$ и $a\neq 1$. Логарифмируя обе части равенства по основанию e, получим $\ln y=x\ln a$. Продифференцируем обе части равенства:

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\ln a,$$

откуда $y'=y\ln a$ или $y'=a^x\ln a$. Следовательно,

$$(a^x)'=a^x\ln a.$$

Итак, *производная показательной функции $y=a^x$ равна произведению этой функции на натуральный логарифм основания.*

Найдем производную функции $y=e^x$. Для этого в формуле $(a^x)'=a^x\ln a$ положим $a=e$; тогда получим $(e^x)'=e^x\ln e$. Но $\ln e=1$ и, следовательно,

$$(e^x)'=e^x.$$

Итак, *производная функции $y=e^x$ равна самой функции $y=e^x$.*

Производные функций $y=a^u$ и $y=e^u$ найдем, применив формулу нахождения производной сложной функции. В результате получим

$$(a^u)'=a^u\ln a\cdot u';\ (e^u)'=e^u u'.$$

Производная функции $y=a^u$, где $u=f(x)$, равна самой функции, a^u, умноженной на натуральный логарифм основания и на производную промежуточного аргумента u.

Производная функции $y=e^u$, где $u=f(x)$, равна произведению самой функции e^u на производную промежуточного аргумента u.

301. Найти производную функции $y=5^x$.

Решение. Используя формулу $(a^x)'=a^x\ln a$, получим

$$y'=(5^x)'=5^x\ln 5.$$

302. Продифференцировать функцию $y=2^{\sin x}$.

Решение. $y'=2^{\sin x}\ln 2(\sin x)'=2^{\sin x}\ln 2\cos x$.

303. Найти производную функции $y=0{,}5^{\sin 4x}$.

Решение. $y'=0{,}5^{\sin 4x}\ln 0{,}5(\sin 4x)'=0{,}5^{\sin 4x}\ln 0{,}5\cdot\cos 4x\cdot 4=$ $=4\cos 4x\cdot 0{,}5^{\sin 4x}\ln 0{,}5$.

304. Продифференцировать функцию $y=e^{x^2}$.

Решение. Используем формулу $(e^u)'=e^u u'$:

$$y'=(e^{x^2})'=e^{x^2}(x^2)'=e^{x^2}\cdot 2x=2xe^{x^2}:$$

305. Найти значение производной функции $y=2^x$ в точке $x=1$.

Решение. Найдем производную по формуле XI: $y'=2^x\ln 2$. Вычислим частное значение производной при $x=1$:

$$y'(1)=(2^x\ln 2)_{x=1}=2\ln 2=\ln 4.$$

306—311. Найти производные следующих функций:

306. $y=3^x$. **307.** $f(x)=x^3+2^x$.

308. $f(x)=3^{\sin x}-2^{2x}+x^2$. **309.** $y=2^{\sin 5x}$.

310. $f(x)=3^{\sin^2 x}$. **311.** $y=a^{3x}$.

312. Найти значение производной функции $f(x)=3^{2x}$ в точке $x=2$.

313. Найти значение производной функции $y=2^{x^2}$ в точке $x=-1$.

7. Дифференцирование тригонометрических функций

Производные функций $y=\sin x$ и $y=\sin u$, где $u=f(x)$.

Найдем производную функции $y=\sin x$ по общему правилу нахождения производной. Отметим, что функция $y=\sin x$ имеет производную при любом значении аргумента x.

1°. Придадим аргументу x приращение Δx; тогда функция получит приращение Δy:

$$y_{\text{н}} = y + \Delta y = \sin(x + \Delta x).$$

2^0. Вычитая из нового значения функции первоначальное, найдем значение приращения Δy:

$$\begin{array}{r} y + \Delta y = \sin(x + \Delta x) \\ y = \sin x \\ \hline \Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x. \end{array}$$

Применим формулу разности синусов:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Тогда получим

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\frac{x + \Delta x + x}{2}\sin\frac{x + \Delta x - x}{2} =$$

$$= 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

3^0. Находим

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

4^0. Перейдем к пределу:

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

Если $\Delta x \to 0$, то и $\frac{\Delta x}{2} \to 0$. Поэтому, полагая $\frac{\Delta x}{2} = t$, получим

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{t \to 0}\cos(t + x)\cdot\lim_{t \to 0}\frac{\sin t}{t}.$$

Но $\lim\limits_{t \to 0}\cos(x + t) = \cos x$, так как функция $y = \cos x$ непрерывна, а $\lim\limits_{t \to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ (первый замечательный предел). Значит, $y' = \cos x$, т. е.

$$(\sin x)' = \cos x.$$

Итак, *производная функции* $y = \sin x$ *равна* $\cos x$.

Выведем формулу дифференцирования функции $y = \sin u$, где u — функция от x. Применяя формулу $y'_x = y'_u u'_x$, находим

$$y'_x=(\sin u)'_u u'_x=\cos u\cdot u'_x.$$

Итак,

$$(\sin u)'=\cos u\cdot u'.$$

314. Найти производную функции $y=\sin(x^3-3x^2)$.

Решение. Здесь $u=x^3-3x^2$, $y=\sin u$. Находим $u'_x=(x^3-3x^2)'=3x^2-6x$. Тогда $y'_x=y'_u u'_x=(3x^2-6x)\cos(x^3-3x^2)$.

315. Продифференцировать функцию $y=\sin^3 4x$.

Решение. Применяем формулы VII, X, XIII:

$$y'=(\sin^3 4x)'=3\sin^2 4x(\sin 4x)'=3\sin^2 4x\cos 4x(4x)'=3\sin^2 4x\cos 4x\cdot 4=$$
$$=12\sin^2 4x\cos 4x.$$

316. Найти значение производной функции $f(x)=\sin^4 x$ при $x=\pi/6$.

Решение. Используя формулы VII, X, XIII, найдем производную:

$$f'(x)=4\sin^3 x\cos x.$$

Подставив значение $x=\pi/6$, вычислим значение производной:

$$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\sin^3\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=4\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}.$$

317. Найти y', если $y=\ln\sin^3 5x$.

Решение. Воспользуемся формулами VII, VIII, XIII:

$$y'=\frac{1}{\sin^3 5x}\cdot 3\sin^2 5x\cos 5x\cdot 5=\frac{15\cos 5x}{\sin 5x}=15\operatorname{ctg} 5x.$$

318—323. Найти производные следующих функций:

318. $y=\sin(x^2-3x+5)$. **319.** $f(x)=\sin^2 5x$.

320. $y=\sin^4 3x$. **321.** $y=\ln\sin^2 3x$.

322. $y=\ln\sin\sqrt{x}$. **323.** $y=\ln^2\sin x$.

324. Найти $f'(\pi/12)$, если $f(x)=\sin^2 x$.

325. Найти $f'(\pi/6)$, если $f(x)=2\sin^3 2x$.

Производные функций $y=\cos x$ и $y=\cos u$, где $u=f(x)$.

Выведем формулу для нахождения производной функции $y=\cos x$. Используя формулу приведения, получим $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$. Следовательно, $y'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'$. Применим теперь правило дифференцирования сложной функции. Здесь $u=\frac{\pi}{2}-x$, $y=\sin u$. Найдем $y'_u=(\sin u)'=\cos u$, $u'_x=\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=-1$. Значит,

$$y'_x=y'_u u'_x=\cos u(-1)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)(-1)=-\sin x,$$

т. е.

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

Итак, *производная функции $y=\cos x$ равна* $-\sin x$.

Выведем формулу дифференцирования функции $y=\cos u$, где u — функция от x. Применяя формулу $y'_x=y'_u u'_x$, получим

$$y'_x=(\cos u)'_u\cdot u'_x=-\sin u\cdot u'_x.$$

Итак,

$$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'.$$

326. Найти производную функции $y=\cos x^4$.

Решение. Здесь $u=x^4$, $y=\cos u$. Находим $y'_u=-\sin u$, $u'_x=4x^3$. Следовательно, $y'_x=y'_u u'_x=-4x^3\sin x^4$.

327. Найти $(\cos^3 x)'$.

Решение. Здесь $u=\cos x$, $y=u^3$. Находим $y'_u=3u^2=3\cos^2 x$, $u'_x=(\cos x)'=-\sin x$; откуда $y'_x=3\cos^2 x(-\sin x)=-3\cos^2 x\sin x$.

328. Найти производную функции $y=\cos\left(\frac{x}{2}-x^5\right)$.

Решение. Имеем $u=\frac{x}{2}-x^5$, $y=\cos u$. Далее, находим $y'_u=-\sin u$, $u'_x=\frac{1}{2}-5x^4$, откуда $y'_x=-\left(\frac{1}{2}-5x^4\right)\sin\left(\frac{x}{2}-x^5\right)$.

329. Найти значение производной функции $f(x)=\sin^4 x-\cos^4 x$ при $x=\pi/12$.

Решение. Предварительно преобразуем данную функцию:

$$f(x)=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^2 x-\cos^2 x)=-\cos 2x$$

(так как $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, $\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\cos 2\alpha$). Используя правило дифференцирования сложной функции, получим

$$f'(x)=(-\cos 2x)'=-(\cos 2x)'=-(-\sin 2x)\cdot(2x)'=2\sin 2x.$$

При $x=\frac{\pi}{12}$ имеем $f'\left(\frac{\pi}{12}\right)=2\sin\frac{\pi}{6}=1$.

330. Найти y', если $y=\sqrt{x}+\cos^2 3x$.

Решение. $y'=(\sqrt{x}+\cos^2 3x)'=(\sqrt{x})'+(\cos^2 3x)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}+2\cos 3x(-\sin 3x)\cdot 3=\frac{1}{2\sqrt{x}}-3\sin 6x$.

Здесь мы воспользовались тем, что $(\sqrt{x})'=(x^{1/2})'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2x^{1/2}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, а $2\sin 3x\cos 3x=\sin 6x$ (по формуле синуса двойного угла).

331—336. Найти производные следующих функций:

331. $y=\cos x^2$. **332.** $y=\cos^2 x$.

333. $y=\cos(x^2-3x)$. **334.** $y=\cos^3 5x$.

335. $y=\cos^4\left(\frac{1}{3}x^3-\sqrt{x}+3x\right)$. **336.** $y=\sin^2 3x-\cos^2 3x$.

337. Найти $f'(\pi/4)$, если $f(x)=3\ln\cos^2 x$.

Производные функций $\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{tg} u$, где $u=f(x)$.

Для нахождения производной функции $\operatorname{tg} x=\frac{\sin x}{\cos x}$ воспользуемся правилом дифференцирования дроби: $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}$. Тогда получим

$$(\operatorname{tg} x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Следовательно,

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Если $y=\operatorname{tg} u$, где $u=f(x)$, то, используя правило дифференцирования сложной функции, находим

$$y'_x=y'_u u'_x=\frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'.$$

Итак,

$$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}.$$

Производные функций $y=\operatorname{ctg} x$ и $y=\operatorname{ctg} u$, где $u=f(x)$.

Найдем производную функции $y=\operatorname{ctg} x=\frac{\cos x}{\sin x}$. Согласно правилу VI имеем

$$(\operatorname{ctg} x)'=\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin x\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{\sin^2 x}=$$

$$=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Значит,

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Если дана функция $y=\operatorname{ctg} u$, где $u=f(x)$, то, воспользовавшись формулой VII, получим

$$(\operatorname{ctg} u)'=-\frac{u'}{\sin^2 u}.$$

338. Найти производную функции $y=\operatorname{tg} x^5$.

Решение. Здесь $u=x^5$, $y=\operatorname{tg} u$. Следовательно,

$$(\operatorname{tg} x^5)'=\frac{1}{\cos^2 x^5}\cdot(x^5)'=\frac{5x^4}{\cos^2 x^5}.$$

339. Найти производную функции $y=\operatorname{ctg}^3 x$.

Решение. $y'=(\operatorname{ctg}^3 x)'=3\operatorname{ctg}^2 x\left(-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=-\frac{3\operatorname{ctg}^2 x}{\sin^2 x}$.

340. Найти y', если $y = \operatorname{tg} \ln x - \operatorname{ctg}^3 x$.

341. Найти $f'(\pi/12)$, если $f(x) = \ln \operatorname{tg} 3x$.

342. Найти $f'(\pi/8)$, если $f(x) = \operatorname{tg}^5 2x - \cos^3 2x + \sin^2 x$.

8. Дифференцирование обратных тригонометрических функций

Производные функций $y = \arcsin x$ и $y = \arcsin u$, где $u = f(x)$.

Найдем производную функции $y = \arcsin x$. Согласно определению арксинуса, имеем $\sin y = x$, где $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $\sin y$ — сложная функция, так как y зависит от x. Получим $\cos y \cdot y' = 1$, откуда $y' = \frac{1}{\cos y}$. Но $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ (берем только арифметический корень, поскольку для рассматриваемых значений y функция неотрицательна: $-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$). Далее, заменяя $\sin y$ на x, получим

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Так как по условию $y = \arcsin x$, то окончательно находим

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Для функции $y = \arcsin u$, где $u = f(x)$, используя формулу производной сложной функции $y'_x = y'_u u'_x$, получим

$$(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

343. Найти y', если $y = \arcsin x^3$.

Решение. Используя формулу $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$, имеем

$$y' = (\arcsin x^3)' = \frac{(x^3)'}{\sqrt{1 - (x^3)^2}} = \frac{3x^2}{\sqrt{1 - x^6}}.$$

344. Найти производную функции $y = \arcsin \ln x$.

Решение. Снова применяем формулу $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$:

$$y' = (\arcsin \ln x)' = \frac{(\ln x)'}{\sqrt{1 - (\ln x)^2}} = \frac{1}{x\sqrt{1 - \ln^2 x}}.$$

345. Продифференцировать функцию $y = \arcsin \operatorname{tg}^2 x$.

Решение. $y' = (\arcsin \operatorname{tg}^2 x)' = \frac{(\operatorname{tg}^2 x)'}{\sqrt{1 - (\operatorname{tg}^2 x)^2}} = \frac{2 \operatorname{tg} x (\operatorname{tg} x)'}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 x}} =$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} x \frac{1}{\cos^2 x}}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 x}} = \frac{2 \operatorname{tg} x}{\cos^2 x \sqrt{1 - \operatorname{tg}^4 x}}.$$

Здесь мы применили формулы $(u^n)'=nu^{n-1}u'$, $(\arcsin u)'=$ $=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$, $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$.

346. Найти y', если $y=\arcsin 5x$.

347. Найти y', если $y=\arcsin x^2$.

348. Найти $f'(1)$, если $f(x)=\arcsin(x^3/3)$.

Производные функций $y=\arccos x$ и $y=\arccos u$, где $u=f(x)$.

Найдем производную функции $y=\arccos x$. По определению арккосинуса имеем $\cos y=x$, где $0\leqslant y\leqslant\pi$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $\cos y$ — сложная функция: $-\sin y\cdot y'=1$, откуда $y'=-\frac{1}{\sin y}$. Далее, после соответствующих замен получим

$$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}}=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\text{ т. е. }(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Для функции $y=\arccos u$, где $u=f(x)$, используя формулу производной сложной функции, находим

$$(\arccos u)'=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Замечание. Производные функций $\arcsin u$ и $\arccos u$ отличаются только знаком.

349—352. Найти производные следующих функций:

349. $y=\arccos x^2$. **350.** $y=\arccos 3x$.

351. $y=\arccos\ln x$. **352.** $y=\arccos\ln x^3$.

353. Найти $f'(1/3)$, если $f(x)=\arccos\sqrt{5}x$.

Производные функций $y=\operatorname{arctg} x$ и $y=\operatorname{arctg} u$, где $u=f(x)$.

Найдем производную функции $y=\operatorname{arctg} x$. По определению арктангенса имеем $\operatorname{tg} y=x$, где $-\pi/2<y<\pi/2$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $\operatorname{tg} y$ — сложная функция: $\frac{1}{\cos^2 y}\cdot y'=1$, откуда $y'=\cos^2 y$. Далее, выразив $\cos^2 y$ из известного соотношения $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, находим

$$y'=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}.$$

Отсюда, заменяя $\operatorname{tg} y$ на x, а y на $\operatorname{arctg} x$, получим

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}$$

Для функции $y=\operatorname{arctg} u$, где $u=f(x)$, используя формулу производной сложной функции, имеем

$$(\operatorname{arctg} u)'=\frac{u'}{1+u^2}.$$

Производные функций $y=\operatorname{arcctg}x$ и $y=\operatorname{arcctg}u$, где $u=f(x)$.

Найдем производную функции $y=\operatorname{arcctg}x$. По определению арккотангенса имеем $\operatorname{ctg}y=x$, где $0<y<\pi$. Продифференцируем по x обе части равенства, учитывая, что $\operatorname{ctg}y$ — сложная функция: $-\frac{1}{\sin^2 y}\cdot y'=1$, откуда $y'=-\sin^2 y$. Выразив $\sin^2 y$ из известного соотношения $1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\frac{1}{\sin^2\alpha}$, получим

$$y'=-\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2 y}.$$

Заменяя $\operatorname{ctg}y$ значением x, а y — значением $\operatorname{arcctg}x$, находим

$$(\operatorname{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

Для функции $y=\operatorname{arcctg}u$, где $u=f(x)$, используя формулу производной сложной функции, получим

$$(\operatorname{arcctg}u)'=-\frac{u'}{1+u^2}.$$

354. Найти y', если $y=\operatorname{arctg}2x$.

Решение. $y'=\frac{1}{1+(2x)^2}\cdot(2x)'=\frac{2}{1+4x^2}$.

355. Найти y', если $y=\operatorname{arcctg}3x$.

Решение. $y'=-\frac{1}{1+(3x)^2}\cdot(3x)'=-\frac{3}{1+9x^2}$.

356. Найти y', если $y=\operatorname{arctg}x^2$.

Решение. $y'=\frac{1}{1+x^4}\cdot(x^2)'=\frac{2x}{1+x^4}$.

357. Найти $f'(1/5)$, если $f(x)=\operatorname{arctg}5x+x^2$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=\frac{1}{1+(5x)^2}\cdot(5x)'+2x=\frac{5}{1+25x^2}+2x.$$

Следовательно,

$$f'(1/5)=\frac{5}{1+25\cdot\frac{1}{25}}+2\cdot\frac{1}{5}=\frac{5}{2}+\frac{2}{5}=2{,}5+0{,}4=2{,}9.$$

358. Дано: $f(x)=\operatorname{arcctg}\frac{x}{2}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$. Найти $f'(1)$.

Решение. $f'(x)=-\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\cdot\left(\frac{x}{2}\right)'-\frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}\cdot(\sqrt{x})'=$

$$= -\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}} - \frac{1}{1+x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\left(1+\frac{x^2}{4}\right)} - \frac{1}{2(1+x)\sqrt{x}};$$

$$f'(1) = -\frac{1}{2\left(1+\frac{1}{4}\right)} - \frac{1}{2(1+1)} = -\frac{2}{5} - \frac{1}{4} = -\frac{13}{20}.$$

359—372. Найти производные следующих функций:

359. $y = \operatorname{arctg} 3x$. **360.** $y = \operatorname{arcctg} 5x$.

361. $y = \operatorname{arctg} x^3$. **362.** $y = \operatorname{arcctg} x^2$.

363. $y = \operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2}$. **364.** $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{x}$.

365. $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{x}{2}$. **366.** $y = \operatorname{arcctg} e^x$.

367. $y = \operatorname{arctg} \ln x^2$. **368.** $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{1-x}{x}}$.

369. $y = \operatorname{arctg} \sqrt{x^2+2x}$. **370.** $y = \operatorname{arcctg} \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$.

371. $y = \frac{x^2}{\operatorname{arctg} x}$. **372.** $y = \operatorname{arcctg} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

§ 5. Геометрический и механический смысл производной

Геометрический смысл производной
Механический смысл производной
Производная второго порядка и ее механический смысл
Приложения производной к решению физических задач

1. Геометрический смысл производной

Геометрическая интерпретация производной, впервые данная в конце XVII в. Лейбницем, состоит в следующем: *значение производной функции $y = f(x)$ в точке x равно угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику функции в той же точке x* (см. рис. 99), т. е.

$$k = f'(x) = \operatorname{tg} \varphi. \qquad (1)$$

Таким образом, если функция $y = f(x)$ в точке x имеет производную, то график этой функции в точке с абсциссой x имеет касательную, и, наоборот, если в некоторой точке с абсциссой x существует касательная к графику, то при этом значении x существует производная. Иначе говоря, существование касательной к кривой $y = f(x)$ в некоторой точке с абсциссой x необходи-

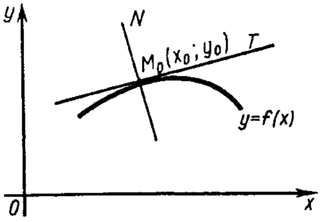

Рис. 102

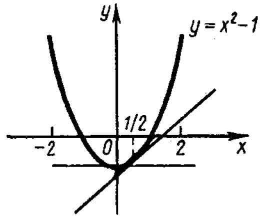

Рис. 103

мо и достаточно для существования производной $y'=f'(x)$ в точке x.

Геометрический смысл производной, выраженный равенством (1), дает наглядное представление о производной, позволяет проследить за ее изменением при движении точки M по кривой и дает возможность геометрически определить значение производной при данном значении x.

Из равенства (1) следует, что для нахождения углового коэффициента касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$ нужно найти производную $y'=f'(x)$ и подставить в нее вместо x абсциссу точки касания: $k=f'(x_0)$.

Пусть дана непрерывная функция $y=f(x)$. Тогда в любой точке $M_0(x_0; y_0)$, принадлежащей графику этой функции (рис. 102), можно провести касательную M_0T и нормаль M_0N (прямую, перпендикулярную касательной в точке касания). Уравнение касательной, как всякой прямой, проходящей через данную точку в данном направлении, имеет вид $y-y_0=k(x-x_0)$, где x и y — текущие координаты. Но $k=y'=f'(x_0)$ и уравнение касательной запишется так:

$$y-y_0=y'(x-x_0). \qquad (2)$$

Уравнение нормали запишется в виде

$$y-y_0=-\frac{1}{y'}(x-x_0). \qquad (3)$$

373. В какой точке касательная к кривой $y=x^2-1$: а) параллельна оси Ox; б) образует с осью Ox угол 45°?

Решение. а) Так как прямая параллельна оси Ox, то она образует с ней угол 0 и ее угловой коэффициент, равный тангенсу этого угла, равен нулю. Известно, что производная функции в данной точке равна угловому коэффициенту касательной к кривой в этой точке, т. е. $f'(x_0)=0$.

Найдем производную функции $y=x^2-1$; имеем $y'=(x^2-1)'=2x$. Тогда $2x=0$, т. е. $x_0=0$, откуда $y_0=-1$. Итак, касательная к данной кривой параллельна оси Ox в точке $(0; -1)$ (рис. 103).

б) Поскольку прямая образует с осью Ox угол 45°, ее угловой коэффициент, равный тангенсу этого угла, равен единице. Ранее мы нашли производную функции $y=x^2-1$ в любой ее точке: $y'=2x$. Найдем значение аргумента, при котором эта производная равна 1: $2x_0=1$, т. е. $x_0=1/2$. Тогда $y_0=-3/4$. Итак, касательная к данной кривой составляет с осью Ox угол 45° в точке $(1/2; -3/4)$ (рис. 103).

374. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y=x^3$ в точке $C(-2; -8)$.

Решение. Найдем производную функции $y=x^3$ в точке $x=-2$:

$$y'=(x^3)'=3x^2;\ y'_{x=-2}=3(-2)^2=12.$$

Итак, угловой коэффициент касательной к кривой $y=x^3$ в точке $C(-2; -8)$ равен 12 (рис. 104).

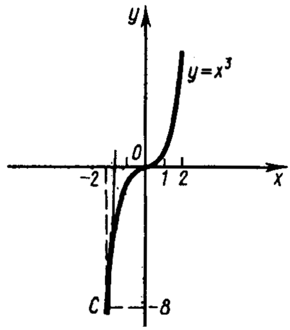

Рис. 104

375. Кривая задана уравнением $y=x^2+5x+3$. Определить углы наклона касательных к положительному направлению оси Ox, проведенных к кривой в точках с абсциссами $x=-2$ и $x=0$.

Решение. Найдем производную: $y'=2x+5$. Обозначив угол наклона касательной в точке с абсциссой $x=-2$ через α, а в точке с абсциссой $x=0$ — через β, получим

$$\operatorname{tg}\alpha=y'_{x=-2}=2(-2)+5=1,\ \operatorname{tg}\beta=y'_{x=0}=2\cdot0+5=5,$$

откуда $\alpha=\pi/4$ (или в градусной мере $\alpha=45°$), а $\beta=\operatorname{arctg}5$. По таблицам тригонометрических функций можно найти и градусную меру угла β: $\beta\approx79°$.

376. На кривой $y=4x^2-6x+3$ найти точку, в которой касательная: а) параллельна прямой $y=2x$; б) перпендикулярна прямой $y=x/4$.

Решение. Пусть искомая точка касания есть $(x_0; y_0)$. Тогда, как известно, угловой коэффициент k касательной равен значению производной в точке касания, т. е.

$$k=y'_{x=x_0}=8x-6\big|_{x=x_0}=8x_0-6=2(4x_0-3).$$

Учитывая это, рассмотрим каждое из условий задачи.

а) Для того чтобы касательная была параллельна прямой $y=2x$, их угловые коэффициенты должны совпадать, т. е. $k=2$ или $2(4x_0-3)=2$. Решая последнее уравнение относительно x_0, получим: $4x_0-3=1$; $4x_0=4$; $x_0=1$. Подставляя найденное значение абсциссы искомой точки в уравнение кривой, найдем значение ее ординаты: $y_0=4\cdot1^2-6\cdot1+3=1$. Итак, $(1; 1)$ — искомая точка.

б) Из аналитической геометрии известно, что угловые коэффициенты взаимно перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Так как угловой коэффициент прямой $y=x/4$ равен $1/4$, то угловой коэффициент k искомой касательной равен -4, и мы имеем уравнение $2(4x_0-3)=-4$, откуда $8x_0=-4+6$, т. е. $x_0=1/4$. Соответственно находим $y_0=4(1/4)^2-6(1/4)+3=7/4$. Следовательно, точка $(1/4; 7/4)$ — искомая.

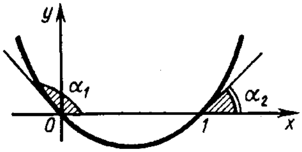

Рис. 105

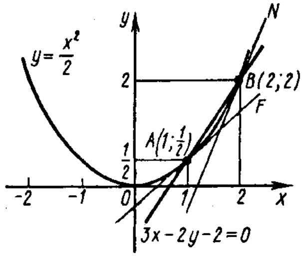

Рис. 106

377. Найти углы, под которыми парабола $y=x^2-x$ пересекает ось абсцисс (рис. 105).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения параболы с осью Ox, для чего решим уравнение $x^2-x=0$, откуда $x_1=0$ и $x_2=1$. Углом кривой с осью Ox называют угол, который касательная, проведенная в точке пересечения кривой с осью Ox, образует с положительным направлением этой оси. Вычислим угловые коэффициенты касательных к параболе в точках $x_1=0$ и $x_2=1$. Находим производную: $y'=2x-1$, откуда $y'(0)=-1$ и $y'(1)=1$. Итак, $\operatorname{tg}\alpha_1=-1$ и $\operatorname{tg}\alpha_2=1$, т. е. $\alpha_1=3\pi/4$ и $\alpha_2=\pi/4$.

378. Под каким углом парабола $y=x^2/2$ пересекается с прямой $3x-2y-2=0$?

Решение. Этот вопрос может быть сформулирован иначе: под каким углом пересекаются касательные к кривой $y=x^2/2$, проведенные в точках ее пересечения с прямой $3x-2y-2=0$, и сама эта прямая?

Находим точки пересечения параболы $y=x^2/2$ и прямой $3x-2y-2=0$, для чего решаем систему уравнений $3x-2y-2=0$, $y=x^2/2$. Подставляя $y=x^2/2$ в первое уравнение, имеем $3x-x^2-2=0$ или $x^2-3x+2=0$, т. е. $x_A=1$, $x_B=2$. Отсюда получим $y_A=1/2$, $y_B=2$ (рис. 106).

Мы нашли две точки пересечения параболы $y=x^2/2$ и прямой $3x-2y-2=0$: $A(1;\ 1/2)$ и $B(2;\ 2)$. Найдем производные функции $y=x^2/2$ в этих точках:

$$y'=(x^2/2)'=x;\quad y'(1)=1;\quad y'(2)=2.$$

Следовательно, угловой коэффициент касательной AF, проведенной к кривой $y=x^2/2$ в точке $A(1;\ 1/2)$, равен 1, а угловой коэффициент касательной BN в точке $B(2;\ 2)$ равен 2. Найдем углы между этими касательными и прямой $3x-2y-2=0$. Уравнение прямой $3x-2y-2=0$ можно записать в виде $y=\frac{3}{2}x-1$. Таким образом, $k_{AB}=\frac{3}{2}$; $k_{AF}=1$, $k_{BN}=2$.

Из аналитической геометрии известна формула для нахождения тангенса угла между двумя прямыми по заданным угловым коэффициентам этих прямых:

$$\operatorname{tg}\varphi_1=\frac{k_{AB}-k_{AF}}{1+k_{AB}k_{AF}}=\frac{\frac{3}{2}-1}{1+\frac{3}{2}\cdot 1}=\frac{1}{5};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_2=\frac{k_{BN}-k_{AB}}{1+k_{BN}k_{AB}}=\frac{2-\frac{3}{2}}{1+2\cdot\frac{3}{2}}=\frac{1}{8}.$$

Итак, $\varphi_1=\operatorname{arctg}(1/5)$ — угол, образованный прямой AB с касательной AF, а $\varphi_2=\operatorname{arctg}(1/8)$ — угол, образованный этой прямой с касательной BN.

379. Составить уравнение касательной к параболе $y=x^2-4x$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Определим ординату y_0 точки касания, подставив в уравнение параболы значение абсциссы $x_0=1$; имеем $y_0=1-4\cdot 1=-3$.

Для нахождения углового коэффициента касательной вычислим значение производной в точке касания: $f'(x)=2x-4$; $k=f'(1)=-2$.

Теперь, зная точку $(1;\ -3)$ и угловой коэффициент $k=y'=-2$, составим уравнение касательной:

$$y+3=-2(x-1),\ y+3=-2x+2 \text{ или } y=-2x-1.$$

380. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ в точке $\left(2;\ \dfrac{1}{5}\right)$.

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку $\left(2;\ \dfrac{1}{5}\right)$, имеет вид $y-\dfrac{1}{5}=k(x-2)$. Находим угловой коэффициент касательной:

$$k_1=y'_{x=2}=\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'_{x=2}=-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=2}=-\frac{4}{25}.$$

Так как нормаль и касательная, проведенные в одной точке кривой, взаимно перпендикулярны, то угловой коэффициент нормали $k_2=25/4$. Подставляя полученные значения k_1 и k_2 в уравнение пучка прямых, найдем искомые уравнения касательной и нормали:

уравнение касательной: $y=\dfrac{-4x+13}{25}$ или $4x+25y-13=0$;

уравнение нормали: $y=\dfrac{125x-246}{20}$ или $125x-20y-246=0$.

381. Дана кривая $y=-x^2+4$. Провести к ней касательную в точке, абсцисса которой $x=-1$.

Решение. Найдем ординату точки касания: $y_{x=-1}=(-x^2+4)_{x=-1}=-(-1)^2+4=3$; значит, $A(-1;\ 3)$ — точка касания.

Уравнение любой прямой, проходящей через точку A, имеет вид $y-3=k(x+1)$. Для того чтобы прямая была касательной, необходимо и достаточно, чтобы $k=y'_{x=-1}$. Найдем угловой коэффициент k:

$$y'=(-x^2+4)'=-2x;\quad k=y'_{x=-1}=(-2)(-1)=2.$$

Итак, уравнение касательной имеет вид $y-3=2(x+1)$, т. е. $y=2x+5$.

382. В какой точке касательная к кривой $y=\dfrac{1}{3}x^3-3x^2+8x+4$ параллельна прямой $2x+2y-5=0$?

Решение. Угловой коэффициент данной прямой $k_1=-1$. Угловой коэффициент касательной $k=y'=x^2-6x+8$.

Из условия параллельности следует $k=k_1$. Тогда $x^2-6x+8=-1$; $x^2-6x+9=0$; $(x-3)^2=0$. Следовательно, $x=3$ — абсцисса точки касания. Подставляя это значение x в уравнение кривой, получим ординату точки касания: $y=\frac{1}{3}\cdot 3^3-3\cdot 3^2+8\cdot 3+4=10$.

Итак, в точке (3; 10) касательная к данной кривой параллельна прямой $2x+2y-5=0$.

383. Под каким углом пересекаются кривые $y=2^x$ и $y=\sqrt{x+1}$?

Решение. Найдем точки пересечения данных кривых; решив уравнение $2^x=\sqrt{x+1}$, получим $x_1=-0{,}5$, $x_2=0$.

Под углом между кривыми понимается угол между касательными в точке пересечения кривых. Величину угла находят, пользуясь известной формулой $\operatorname{tg}\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$, где k_1, k_2 — угловые коэффициенты касательных в точке их пересечения.

Найдем $y_1'=2^x\ln 2$, $y_2'=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}$. Вычислим значения угловых коэффициентов в точках $x=-0{,}5$ и $x=0$:

$$k_1(-0{,}5)=2^{-0{,}5}\ln 2=\frac{\ln 2}{\sqrt{2}},\quad k_2(-0{,}5)=\frac{1}{2\sqrt{0{,}5}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad k_1(0)=\ln 2,$$
$$k_2(0)=\frac{1}{2}.$$

Итак, в точке $x=-0{,}5$ имеем

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\ln 2}{\sqrt{2}}}=\frac{(1-\ln 2)\sqrt{2}}{2+\ln 2},\text{ откуда }\varphi=\operatorname{arctg}\frac{(1-\ln 2)\sqrt{2}}{2+\ln 2}.$$

В точке $x=0$ имеем

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{\frac{1}{2}-\ln 2}{1+\frac{1}{2}\ln 2}=\frac{1-2\ln 2}{2+\ln 2},\text{ т. е. }\varphi=\operatorname{arctg}\frac{1-2\ln 2}{2+\ln 2}.$$

384. В какой точке касательная к кривой $y=x^2+2$ образует с осью Ox угол 30°?

385. Найти абсциссу точки параболы $y=-x^2+x+\frac{3}{4}$, в которой касательная параллельна оси абсцисс.

386. В какой точке касательная к графику функции $y=2x^3-3x^2+4$ параллельна оси абсцисс?

387. В какой точке касательная к графику функции $y=\frac{x+2}{x-2}$ образует угол 135° с осью Ox?

388. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к кривой $y=3x^2-2x+1$ в точке (1/2; 5).

389. Найти угловой коэффициент касательной к параболе $y=x^2-3$ при $x=1/2$.

390. Найти угол наклона касательной к кривой $y=\frac{1}{12}x^3+$ $+5$ в точке, абсцисса которой равна 2.

391. Под каким углом к оси Ox наклонена касательная к кривой $y=x^3-x^2-7x+6$ в точке $(2;\ -4)$?

392. Найти углы, которые образует кривая $y=(4x-x^2)/4$ с осью Ox в точках $(0;\ 0)$, $(2;\ 1)$, $(4;\ 0)$.

393. Определить, под какими углами синусоида $y=\sin x$ пересекает ось абсцисс.

394. Найти угол наклона касательной к гиперболе $xy=a^2$ в точке $(a;\ a)$.

395. Под каким углом кривая $y=\frac{x}{1+x^2}$ пересекается с осью Oy?

396. При каком значении a кривая $y=(ax-x^3)/4$ пересекает Ox под углом 45°?

397. В каких точках угловой коэффициент касательной к кубической параболе $y=x^3$ равен 3?

398. Составить уравнение касательной к параболе $y=x^2-$ $-3x-1$ в точке $(3;\ 4)$.

399. Составить уравнение касательной к гиперболе $y=1/x$ в точке $(1;\ 1)$.

400. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^2-3$ при $x=2$.

401. Составить уравнения касательной и нормали к кривой $y=x^3-4x^2+8x+6$ в точке $(2;\ 14)$.

402. Найти касательную к кривой $y=x^3+x$ в точке с абсциссой $x=1$.

403. При каком значении независимой переменной касательные к кривым $y=x^2$ и $y=x^3$ параллельны?

404. Под какими углами пересекаются параболы $y=x^2$ и $y^2=x$?

2. Механический смысл производной

Механическое истолкование производной было впервые дано И. Ньютоном. Оно заключается в следующем: скорость движения материальной точки в данный момент времени равна производной пути по времени, т. е.

$$v=\frac{ds}{dt}.$$

Таким образом, если закон движения материальной точки задан уравнением $s=f(t)$, то для нахождения мгновенной скорости точки в какой-нибудь определенный момент времени нужно найти производную $s'=f'(t)$ и подставить в нее соответствующее значение t. Для определенности будем считать, что путь измеряется в метрах, а время — в секундах.

405. Путь, пройденный материальной точкой, задается следующей функцией времени: $s=3t^2-2t+4$. Найти скорость движения точки в конце 5-й секунды.

Решение. Находим производную: $\frac{ds}{dt}=6t-2$; при $t=5$ получим $\frac{ds}{dt}=6\cdot5-2=28$ (м/с). Итак, $v=\left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=5}=28$ м/с.

406. Точка движется прямолинейно по закону $s=2t^3+t^2-4$. Найти ее скорость в момент времени $t=4$.

407. Найти скорость движения материальной точки в конце 3-й секунды, если движение точки задано уравнением $s=t^2+$ $+11t+30$.

408. Точка движется прямолинейно по закону $s=6t-t^2$. В какой момент ее скорость окажется равной нулю?

409. Два тела движутся прямолинейно: одно по закону $s=$ $=t^3+t^2-27t$, другое — по закону $s=t^2+1$. Определить момент, когда скорости этих тел окажутся равными.

410. Высота тела, брошенного вертикально вверх, меняется в зависимости от времени по закону $H=200t-4{,}9t^2$. Найти скорость тела в конце 10-й секунды. Сколько секунд тело будет лететь вверх и какой наибольшей высоты оно достигнет?

Решение. Скорость тела определяется выражением $v=\frac{dH}{dt}=$ $=200-9{,}8t$; при $t=10$ имеем $v=102$ (м/с).

В тот момент, когда тело достигает максимальной высоты, его скорость равна нулю. Следовательно, для этого момента $\frac{dH}{dt}=200-$ $-9{,}8t=0$, откуда $t=\frac{200}{9{,}8}\approx20{,}4$ (с).

Подставляя это значение в уравнение движения, получим наибольшую высоту, на которую поднимается тело:

$$s=200\cdot20{,}4-4{,}9\cdot20{,}4^2\approx2040{,}8\ (\text{м}).$$

411. Для машины, движущейся со скоростью 30 м/с, тормозной путь определяется формулой $s(t)=30t-16t^2$, где $s(t)$ — путь в метрах, t — время торможения в секундах. В течение какого времени осуществляется торможение до полной остановки машины? Какое расстояние пройдет машина с начала торможения до полной ее остановки?

412. Зенитный снаряд выброшен вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Через сколько секунд снаряд достигнет наивысшей точки?

413. Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $s=$ $=2t^2+3t-1$. Найти кинетическую энергию тела $(mv^2/2)$ через 3 с после начала движения.

Решение. Найдем скорость движения тела в любой момент времени t:

$$v=\frac{ds}{dt}=4t+3.$$

Вычислим скорость тела в момент времени $t=3$:

$$v_{t=3}=4\cdot 3+3=15 \ (\text{м/с}).$$

Определим кинетическую энергию тела в момент времени $t=3$:

$$\frac{mv^2}{2}=\frac{8\cdot 15^2}{2}=900 \ (\text{Дж}).$$

414. Найти кинетическую энергию тела через 4 с после начала движения, если его масса равна 25 кг, а закон движения имеет вид $s=3t^2-1$.

3. Производная второго порядка и ее механический смысл

Производную от данной функции часто называют *первой производной* (или *производной первого порядка*). Очевидно, что производная также является функцией, и если она дифференцируема, то от нее, в свою очередь, можно взять производную, которую называют *второй производной* (или *производной второго порядка*) и обозначают y'', $f''(x)$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Производной третьего порядка (или *третьей производной*) называют производную от второй производной. Ее обозначают y''', $f'''(x)$, $\frac{d^3y}{dx^3}$.

Например, для функции $y=x^4$ имеем $y'=4x^3$, $y''=12x^2$, $y'''=24x$.

Вообще, *производной n-го порядка* от функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$-го порядка. Ее обозначают: $y^{(n)}$, $f^n(x)\frac{d^ny}{dx^n}$. Таким образом, производную n-го порядка можно найти последовательным дифференцированием данной функции.

415—422. Найти производные второго порядка заданных функций:

415. $y=x^3$. **416.** $y=\sin x$.

417. $y=\cos^2 x$. **418.** $y=2^x$.

419. $y=\operatorname{ctg} x$. **420.** $y=\ln(2x-3)$.

421. $y=\sqrt{1+x^2}$. **422.** $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

423—432. Найти производные третьего порядка заданных функций:

423. $y=x^4$. **424.** $y=\frac{1}{5}x^5$.

425. $y=\cos x$. **426.** $y=e^x$.

427. $y=\sin^2 x$. **428.** $y=\ln x$.

429. $y=e^{2x}$. **430.** $y=\cos 5x$.

431. $y=x\ln x$. **432.** $y=e^x\cos x$.

Рассмотрим механический смысл производной второго порядка.

Пусть тело движется прямолинейно по закону $s=f(t)$. Как известно, скорость v движения тела в данный момент времени равна производной пути по времени, т. е. $v=s'$.

Если тело движется неравномерно, то скорость v с течением времени изменяется и за промежуток времени Δt получает приращение Δv. В этом случае величина отношения $\frac{\Delta v}{\Delta t}$, показывающая изменение скорости в единицу времени, называется *средним ускорением* в промежутке времени от t до $t+\Delta t$.

Пусть $\Delta t \to 0$; тогда $(t+\Delta t)\to t$, а среднее ускорение $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ стремится к величине, которая называется *ускорением* в данный момент времени t. Следовательно, ускорение движущегося тела представляет собой скорость изменения его скорости.

Обозначив ускорение через a, получим

$$a=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=v'=(s')'=s''.$$

Таким образом, *ускорение прямолинейного движения тела в данный момент равно второй производной пути по времени, вычисленной для данного момента.*

В этом и заключается механический смысл второй производной.

433. Точка движется прямолинейно по закону $s=3t^2-3t+8$. Найти скорость и ускорение точки в момент $t=4$.

Решение. Для определения скорости нужно найти первую производную данной функции при $t=4$. Имеем

$$v=s'=(3t^2-3t+8)'=6t-3;\quad v_{t=4}=6\cdot 4-3=21\ \text{(м/с)}.$$

Ускорение равно второй производной функции при $t=4$, т. е.

$$a=s''=(s')'=(6t-3)'=6.$$

Величина ускорения оказалась постоянной для любого значения t; значит, движение точки по заданному закону происходит с постоянным ускорением.

434. Материальная точка движется по закону $s=2t^3-6t^2+4t$. Найти ее ускорение в конце 3-й секунды.

Решение. Находим $v=s'=6t^2-12t+4$, $a=s''=12t-12$, откуда при $t=3$ получим $a=12\cdot 3-12=24$ (м/с^2).

435. В момент времени t тело находится на расстоянии $s=\frac{1}{4}t^4+4t^3+16t^2$ км от места отправления. Найти его ускорение через 2 ч.

Решение. Находим $v=s'=t^3+12t^2+32t$, $a=v'=s''=3t^2+24t+32$. При $t=2$ имеем $a=3\cdot 4+24\cdot 2+32=92$ (км/ч^2).

436. Вычислить ускорение материальной точки в конце 3-й секунды, если точка движется по закону $s = t^3 + 2t^2$.

437. Путь, пройденный клетью подъемной машины, определяется уравнением $h = 4 + 5t$. Найти скорость и ускорение в любой момент времени.

438. Определить момент t, в который ускорение прямолинейного движения, совершаемого по закону $s = -\frac{1}{6}t^3 + 3t^2 - 5$, равно нулю. Какова при этом скорость?

439. Закон движения частицы определяется уравнением $s(t) = t^3 - t$. Каково ускорение частицы в момент, когда ее скорость равна 11 м/с?

440. Точка движется вдоль оси абсцисс по закону $x = 2t^3 - 4t^2 + 2t + 3$, где t — время в секундах, отсчитываемое от $t = 0$, а x — расстояние движущейся точки от начала координат в метрах. Требуется: а) определить закон изменения скорости и ускорения движения от времени t; б) найти начальную скорость и скорость в момент $t = 3$ с; в) установить, существуют ли моменты времени, когда скорость равна нулю, и если да, то какие положения движущейся точки соответствуют этим моментам.

Решение. а) Для определения скорости движения найдем производную пути по времени:

$$v = \frac{dx}{dt} = 6t^2 - 8t + 2 = 2(3t^2 - 4t + 1),$$

а для определения ускорения движения — производную скорости по времени:

$$a = \frac{dv}{dt} = 2(6t - 4) = 4(3t - 2).$$

б) Если $t = 0$, то $v = 2$ (м/с) (начальная скорость); если $t = 3$, то $v = 32$ (м/с).

в) Условие $v = 0$ означает, что $3t^2 - 4t + 1 = 0$. Решая это уравнение, получим $t = \frac{2}{3} \pm \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3} \pm \frac{1}{3}$. Следовательно, значение $v = 0$ достигается дважды: сначала — в момент $t = 1/3$ с, а затем — в момент $t = 1$.

Найдем абсциссы движущейся точки в эти моменты времени:

$$x|_{t=1/3} = (2t^3 - 4t^2 + 2t + 3)_{t=1/3} = 3\frac{8}{27} \text{ м}; \quad x|_{t=1} = 3 \text{ (м)}.$$

441. Тело, масса которого 30 кг, движется прямолинейно по закону $s = 4t^2 + t$. Доказать, что движение тела происходит под действием постоянной силы.

Решение. Имеем $s' = 8t + 1$, $s'' = 8$. Следовательно, $a(t) = 8$ (м/с^2), т. е. при данном законе движения тело движется с постоянным ускорением 8 м/с^2. Далее, так как масса тела постоянна (30 кг), то по второму закону Ньютона действующая на него сила $F = ma = 30 \cdot 8 = 240$ (Н) — также постоянная величина.

442. Тело массой 3 кг движется прямолинейно по закону $s(t)=t^3-3t^2+2$. Найти силу, действующую на тело в момент времени $t=4$ с.

443. Показать, что если тело движется по закону $s=ae^t+be^{-t}$, то его ускорение численно равно пройденному пути.

4. Приложения производной к решению физических задач

Как известно, производная характеризует мгновенную скорость прямолинейного движения. Однако этим не исчерпывается использование производной. При изучении неравномерно меняющихся величин скорость их изменения всегда выражается с помощью производной.

Понятие скорости, заимствованное из физики, удобно при исследовании поведения любой функции. Какую бы зависимость ни выражала функция $y=f(x)$, отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ есть средняя скорость изменения функции $f(x)$ относительно изменения аргумента x, а $f'(x_0)$ — мгновенная скорость изменения функции $f(x)$ при некотором значении $x=x_0$.

444. Найти скорость изменения функции $y=0{,}3x^2+0{,}2x-5$ в произвольной точке.

445. Определить скорость изменения функции $y=(x^2+2)x-1$ при $x=6$.

446. Доказать, что скорость изменения линейной функции постоянна.

447. Убедиться, что скорость изменения квадратичной функции $y=ax^2+bx+c$ выражается линейной функцией.

448. Стороны a и b прямоугольника изменяются по закону $a=(2t+1)$ см, $b=(3t+2)$ см. С какой скоростью изменяется его площадь S в момент времени $t=4$ с?

Решение. Находим $S=ab=(2t+1)(3t+2)=6t^2+7t+2$, $v=S'_t=(6t^2+7t+2)'=12t+7$. При $t=4$ получим $v_{t=4}=12\cdot4+7=55$ (см/с).

449. Основание параллелограмма a изменяется по закону $a=(2+3t)$ см, а высота h — по закону $h=(3t-1)$ см. Определить скорость изменения его площади в момент $t=2$ с.

450. Убедиться, что скорость изменения логарифмической функции $y=\ln x$, где $x>0$, обратно пропорциональна x.

451. Убедиться, что скорость изменения показательной функции $y=e^{kx}$, где $k\neq0$, пропорциональна y.

452. Чему равна скорость изменения функций $y=\sin x$? Вычислить ее значение для $x=\pi/4$.

Так как в практических приложениях нас обычно интересует не только сама функция, но и скорость ее изменения, то производная, будучи характеристикой скорости изменения функции, имеет самые широкие практические применения в вопросах физики, химии, геометрии и т. д. Приведем некоторые конкретные примеры использования понятия производной при определении скорости различных процессов.

1. Предположим, что в момент времени t масса еще не распавшегося радиоактивного вещества была равна m, а через некоторое время, в момент $t+\Delta t$, масса его уменьшилась (так как часть вещества превратилась в продукт распада) и стала равна $m+\Delta m$ (здесь Δm отрицательно, поскольку масса радиоактивного вещества с течением времени уменьшается). Таким образом, за время Δt масса имевшегося радиоактивного вещества изменилась на Δm.

Отношение $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ представляет собой среднюю скорость распада за промежуток времени Δt. Чем меньше этот промежуток, тем точнее указанное отношение выражает мгновенную скорость распада. Поэтому можно сказать, что мгновенная скорость распада в момент времени t равна $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta t}$.

2. Мгновенная мощность есть производная $W=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta A}{\Delta t}$, где ΔA — работа, совершаемая за время Δt.

3. Если V — объем жидкости, на который действует внешнее давление P, то производная $k=\lim\limits_{\Delta P\to 0}\frac{\Delta V}{\Delta P}$, дает коэффициент сжатия жидкости при данном давлении.

4. Если твердое тело вращается вокруг оси, то угол поворота φ есть функция от времени t. Угловая скорость вращения в данный момент t численно равна производной $\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$.

5. Сила тока есть производная $I=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}$, где Δq — положительный электрический заряд, переносимый через сечение проводника за время Δt.

6. Теплоемкость при температуре T есть производная $C=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta T}$, где ΔQ — количество теплоты, необходимое для изменения температуры на ΔT.

453. Маховик за время t поворачивается на угол $\varphi=8t-0{,}5t^2$ (t — в секундах, φ — в радианах). Определить угловую скорость ω в конце 3-й секунды. Найти момент, когда прекратится вращение.

Решение. Имеем $\varphi'_t=(8t-0{,}5t^2)'=8-t$. Так как $\omega=(8-t)$ рад/с, то при $t=3$ получим $\omega=5$ (рад/с). Вращение прекратится в момент, когда $\omega=8-t=0$, т. е. при $t=8$ с.

454. Маховик, задерживаемый тормозом, за t с поворачивается на угол $\varphi=5t-0{,}4t^2$ (рад). Определить угловую скорость ω

маховика в момент времени $t=2$ с и найти момент остановки вращения.

455. Количество электричества, протекающее через проводник, начиная с момента времени $t=0$, задается формулой $Q=3t^2-3t+4$. Найти силу тока в конце 6-й секунды.

Решение. Сила тока есть производная количества электричества по времени: следовательно, нужно найти производную функции $Q=3t^2-3t+4$ и вычислить ее значение при $t=6$ с. Имеем $I=Q'=6t-3$, откуда при $t=6$ получим $I=33$ (А).

456. Количество электричества q в проводнике меняется по закону $q=\sin(2t+1)k$. Определить скорость I изменения функции в любой момент времени t (I — в амперах, t — в секундах).

457. Найти силу тока I в момент $t=5$, если $q=(25e^{2t}+\cos(3t-1))k$ (I — в амперах, t — в секундах).

458. Сила тока I изменяется в зависимости от времени t по закону $I=0{,}4t^2$ (I — в амперах, t — в секундах). Найти скорость изменения силы тока в конце 8-й секунды.

459. Изменение силы тока I в зависимости от времени t задано уравнением $I=2t^2-5t$ (I — в амперах, t — в секундах). Найти скорость изменения силы тока в конце 10-й секунды.

460. Количество теплоты Q, получаемое некоторым веществом при нагревании его от 0 до T, определяется по формуле $Q=0{,}1054t+0{,}000002t^2$ (Q — в джоулях, t — в кельвинах). Найти теплоемкость этого вещества при 100 К.

Решение. Находим теплоемкость:

$$C=Q'_T=0{,}1054+0{,}000004T.$$

При $T=100$ К получим

$$C_{T=100}=0{,}1054+0{,}000004\cdot 100=0{,}1058 \text{ (Дж/К)}.$$

461. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T=0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени 10 с?

Решение. Скорость нагревания тела есть производная температуры T по времени t:

$$\frac{dT}{dt}=(0{,}2t^2)'=0{,}4t.$$

Определим скорость нагревания тела при $t=10$:

$$\left(\frac{dT}{dt}\right)_{t=10}=0{,}4\cdot 10=4 \text{ (град/с)}.$$

462. Температура тела T изменяется в зависимости от времени t по закону $T=0{,}5t^2-2t$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени $t=5$ с?

§ 6. Дифференциал

Понятие дифференциала
Геометрический смысл дифференциала
Вычисление дифференциала
Дифференциал сложной функции
Применение дифференциала в приближенных вычислениях

1. Понятие дифференциала

Нахождение дифференциала функции, так же как и нахождение производной, является одной из основных задач дифференциального исчисления.

Пусть точка движется прямолинейно по закону $s=f(t)$; тогда ее скорость равна $v=f'(t)$. За время Δt точка пройдет некоторый путь Δs. Если Δt невелико, то скорость не успеет существенно измениться и движение можно считать равномерным. При этом пройденный точкой путь составит $v\Delta t=f'(t)\Delta t$; он пропорционален истекшему времени Δt. Произведение $f'(t)\Delta t$ называют *дифференциалом* пути и обозначают ds. Фактический путь Δs отличается от пути ds, но если промежуток времени Δt достаточно мал, то можно считать, что $ds\approx\Delta s$.

К такому же заключению можно прийти, рассматривая другие неравномерные процессы. Во всех случаях для перехода от неравномерных процессов к равномерным истинное изменение какой-либо величины заменяют ее дифференциалом. Эта замена основана на том, что на протяжении малого промежутка времени всякий процесс приближается к равномерному.

Дадим общее определение дифференциала.

Пусть дана функция $y=f(x)$, дифференцируемая в точке x. Это значит, что функция в точке x имеет производную, т. е. существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'$. Следовательно, для функции $f(x)$ выполняется равенство $\frac{\Delta y}{\Delta x}=y'+\alpha$, где $\alpha\to 0$ при $\Delta x\to 0$.

Умножив обе части этого равенства на Δx, получим

$$\Delta y=y'\Delta x+\alpha\Delta x. \qquad (1)$$

Здесь y' есть функция от x и не зависит от Δx; следовательно, Δx входит в первое слагаемое в первой степени (т. е. линейно). Поэтому первое слагаемое представляет собой линейную часть приращения функции (про второе слагаемое этого сказать нельзя, поскольку α также зависит от Δx).

Тогда при $\Delta x\to 0$ вторым слагаемым $\alpha\Delta x$ можно пренебречь, и первое слагаемое $y'\Delta x$ будет являться главной частью приращения функции (исключая случай, когда $y'=0$).

Определение. Главная часть приращения функции, линейная относительно приращения независимой переменной, называется *дифференциалом* функции и обозначается знаком d, т. е.

$$dy = y'\Delta x. \qquad (2)$$

Таким образом, для всякой функции $y=f(x)$ производная y' зависит только от одной переменной x, тогда как ее дифференциал зависит от двух независимых друг от друга переменных: x и Δx.

463. Найти приращение и дифференциал функции $y=x^2$ в точке $x=2$ при $\Delta x=0,1$.

Решение. $\Delta y=(x+\Delta x)^2-x^2=x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2-x^2=2x\Delta x+(\Delta x)^2$;

$\Delta y\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,1}}=2\cdot 2\cdot 0,1+(0,1)^2=0,4+0,01=0,41$;

$dy=y'\cdot\Delta x=(x^2)'\cdot\Delta x=2x\cdot\Delta x$; $dy\Big|_{\substack{x=2\\ \Delta x=0,1}}=2\cdot 2\cdot 0,1=0,4$.

464. Найти приращение функции $y=\frac{1}{2}x^2$ в точке $x=3$ при $\Delta x=0,01$.

465. Сравнить приращение и дифференциал функции $y=2x^3+5x^2$.

466. Дана функция $y=2x^2-3x+3$. Вычислить приращение и дифференциал функции при переходе аргумента от значения $x_1=1$ к значению $x_2=1,001$.

2. Геометрический смысл дифференциала

Рассмотрим график непрерывной функции $y=f(x)$ (рис. 107). Производная функции в точке с абсциссой x равна тангенсу угла наклона касательной к положительному направлению оси Ox, т. е.

$$y'=\operatorname{tg}\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Из рисунка видно, что касательная разбивает приращение функции $\Delta y=NM_1$ на два отрезка: M_1K, соответствующий в равенстве (1) слагаемому $\alpha\Delta x$, и NK, соответствующий в равенстве (1) слагаемому $y'\Delta x$.

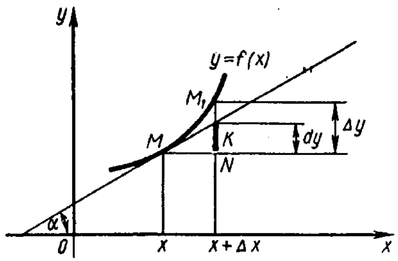

Рис. 107

Если приращение аргумента стремится к нулю (точка M_1 стремится занять положение M), то отрезок M_1K уменьшается значительно быстрее, чем отрезок NK.

Таким образом, приращение ординаты касательной NK является главной частью приращения функции $y=f(x)$.

Из треугольника MNK на-

находим $|NK|=|MN|\operatorname{tg}\alpha$. Так как $|MN|=\Delta x$, $\operatorname{tg}\alpha=y'$, то

$$|NK|=y'\Delta x=dy.$$

Итак, *дифференциал функции $y=f(x)$ геометрически изображается приращением ординаты касательной, проведенной в точке $M(x;\ y)$ при данных значениях x и Δx.*

3. Вычисление дифференциала

Рассмотрим функцию $y=x$. Из формулы $dy=y'\Delta x$ получаем $dx=\Delta x$, так как y можно заменить на x (по условию), а $y'=(x)'=1$.

Итак, дифференциал независимой переменной dx совпадает с его приращением Δx.

Учитывая это, дифференциал функции можно вычислить по формуле

$$dy=y'\,dx. \tag{3}$$

Так, если $y=x^3$, то $dy=(x^3)'dx=3x^2dx$; если $y=\sin x$, то $dy=\cos x\,dx$.

Очевидно, чтобы вычислить дифференциал функции, нужно ее производную умножить на dx.

Отсюда следует, что правила нахождения дифференциала остаются теми же, что и для нахождения производных.

Для удобства пользования выпишем основные формулы нахождения дифференциалов в виде таблицы:

I. $d(C)=0$.	II. $d(x)=dx$.
III. $d(u+v-w)=du+dv-dw$.	IV. $d(uv)=v\,du+u\,dv$.
V. $d(Cu)=C\,du$.	VI. $d\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{v\,du-u\,dv}{v^2}$.
VII. $d(y(u(x)))=y'_u u'_x dx$.	VIII. $d(\ln x)=\dfrac{dx}{x}$.
IX. $d(\log_a x)=\dfrac{dx}{x\ln a}$.	X. $d(x^n)=nx^{n-1}dx$.
XI. $d(\sqrt{x})=\dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$.	XII. $d(a^x)=a^x\ln a\,dx$.
XIII. $d(\sin x)=\cos x\,dx$.	XIV. $d(\cos x)=-\sin x\,dx$.
XV. $d(\operatorname{tg}x)=\dfrac{dx}{\cos^2 x}$.	XVI. $d(\operatorname{ctg}x)=-\dfrac{dx}{\sin^2 x}$.
XVII. $d(\arcsin x)=\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.	XVIII. $d(\arccos x)=-\dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
XIX. $d(\operatorname{arctg}x)=\dfrac{dx}{1+x^2}$.	XX. $d(\operatorname{arcctg}x)=-\dfrac{dx}{1+x^2}$.

467. Найти дифференциалы функций:

а) $y=\sqrt{x^3-3}$; б) $y=\dfrac{x-1}{x+2}$; в) $y=x(x+1)$.

Решение. а) $dy=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3-3}}dx$;

б) $dy=\frac{(x-1)'(x+2)-(x+2)'(x-1)}{(x+2)^2}dx=\frac{(x+2)-(x-1)}{(x+2)^2}dx=$
$=\frac{3}{(x+2)^2}dx=\frac{3dx}{(x+2)^2}$;

в) $dy=(x'(x+1)+(x+1)'x)dx=(x+1+x)dx=(2x+1)dx.$

468—477. Найти дифференциалы функций:

468. $y=\sqrt{2x}$. **469.** $y=\sqrt{x^2-3x}$.

470. $y=\frac{x}{x+5}$. **471.** $y=\frac{x-3}{x}$.

472. $y=\frac{x^2-1}{x+2}$. **473.** $y=\frac{x^2-3x+1}{x}$.

474. $y=x(x-3)$. **475.** $y=x^2(x+5)$.

476. $y=(x-3)(x+2)$. **477.** $y=(x^2-3x+2)(x^2+1)$.

4. Дифференциал сложной функции

Выведем формулу дифференциала сложной функции. При этом мы, конечно, можем воспользоваться формулой производной сложной функции. Однако сейчас мы убедимся в том, что нахождение дифференциала сложной функции имеет некоторые преимущества по сравнению с нахождением производной сложной функции.

Ранее было доказано, что $\Delta x=dx$ в том случае, когда аргумент x является независимой переменной. Поэтому и при решении предыдущих примеров, пользуясь формулой $dy=y'dx$, мы вычисляли дифференциалы лишь для тех функций, для которых аргумент x есть независимая переменная.

Пусть теперь дана функция $y=f(u(x))$, которая косвенно зависит от x через другую зависимую переменную u (например, $y=e^{\sin x}$ или $y=\operatorname{tg}x^5$), т. е. $f(u(x))$ — функция от функции или сложная функция. Очевидно, здесь x является независимой переменной, в то время как аргумент $u(x)$ есть зависимая переменная

Найдем дифференциал данной функции: $dy=(f(u(x)))'dx$. Но $(f(u(x)))'=f'_u u'_x$ согласно правилу производной сложной функции. Тогда

$$dy=f'_u u'_x dx.$$

Так как выражение $u'(x)dx$ есть дифференциал функции $u(x)$, то $u'(x)dx=du$ и, следовательно,

$$dy=f'(u)du. \tag{4}$$

Сравним теперь полученную формулу с формулой $dy=f'(x)dx$, где аргумент x есть независимая переменная и $dx=\Delta x$.

Хотя в формуле (4) аргумент u является зависимой переменной и $du \neq \Delta u$, но и в этом случае дифференциал функции равен произведению производной на дифференциал аргумента.

Это свойство дифференциала сохранять неизменной формулу вычисления по отношению к любому преобразованию аргумента называется *инвариантностью* дифференциала.

Свойство инвариантности дифференциала позволяет вычисление дифференциала производить более наглядно.

Так, если $y_1 = e^{\sin x}$, то, используя формулу (4), получим $dy_1 = e^{\sin x} d(\sin x)$; если $y_2 = \sin 3x$, то $dy_2 = \cos 3x\, d(3x)$ и т. д.

При необходимости вычисление дифференциала можно продолжить, раскрыв выражение $du = u'(x)dx$. Для приведенных выше примеров имеем

$$dy_1 = e^{\sin x} d(\sin x) = e^{\sin x} \cos x\, dx;$$

$$dy_2 = \cos 3x d(3x) = 3\cos 3x\, dx.$$

478—489. Найти дифференциалы функций:

478. $y = \sin 5x$. **479.** $y = \cos^2 x$.

480. $y = \operatorname{tg}^3 4x$. **481.** $y = \operatorname{arctg} 2x$.

482. $y = \arccos x^3$. **483.** $y = \ln \sin x$.

484. $y = \ln \cos x^3$ **485.** $y = \ln \sin^3 5x$.

486. $y = \sqrt{\dfrac{1-x}{x^2}}$. **487.** $y = \sqrt{\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}$.

488. $y = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$. **489.** $y = x^2 \sin \sqrt{x}$.

5. Применение дифференциала в приближенных вычислениях

Рассмотрим теперь вопрос об использовании дифференциала в приближенных вычислениях.

Для этого вернемся к формуле $\Delta y = y'\Delta x + \alpha \Delta x$, которую запишем в виде

$$\Delta y = dy + \alpha \Delta x,$$

где Δy — приращение функции, dy — дифференциал функции, а $\alpha \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Это позволяет сделать вывод о том, что

$$\Delta y \approx dy, \qquad (5)$$

т. е. приближенное значение приращения функции совпадает с ее дифференциалом.

Функция может иметь довольно сложное выражение и ее приращение не всегда просто найти, но при достаточно малых значениях $|\Delta x|$ приращение функции можно заменить ее дифференциалом, исключая точки, где $y' = 0$.

Равенство (5) применяется для приближенных вычислений.

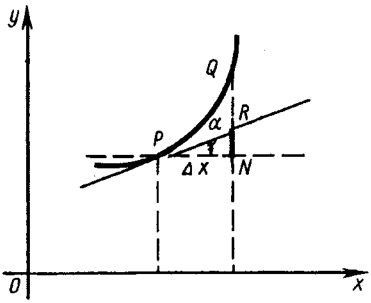

Рис. 108

Из рис. 108 видно, что дифференциал функции равен приращению $|NR|$ ординаты касательной, т. е. замена приращения функции на ее дифференциал геометрически означает, что *график функции заменяется отрезком PR касательной, проведенной к нему в точке касания P*. Такая замена естественна при достаточно малом $|\Delta x|$.

Итак, при достаточно малом $|\Delta x|$ приближенное равенство $\Delta y \approx dy$ обладает достаточно высокой степенью точности. Отсюда находим

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx dy$$

или

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+dy. \qquad (6)$$

Это одна из основных формул для приближенных подсчетов.

Приближенное вычисление приращения функции

490. Пользуясь понятием дифференциала функции, вычислить приближенно изменение функции $y=x^3-7x^2+80$ при изменении аргумента x от 5 до 5,01.

Решение. Находим

$$\Delta y \approx dy = y'\Delta x = (3x^2-14x)\Delta x.$$

При $x=5$, $\Delta x=5{,}01-5=0{,}01$ получим

$$\Delta y|_{\substack{x=5,\\ \Delta x=0{,}01}} = (3\cdot 5^2-14\cdot 5)0{,}01=0{,}05.$$

491. Как приближенно изменится значение функции $y=\frac{1}{3}x^3+$ $+x^2-5$ при изменении аргумента x от 3 до 3,1?

492. Найти приближенное значение приращения функции $y=3x^2+5x+1$ при $x=3$ и $\Delta x=0{,}001$.

493. С помощью дифференциала найти приближенно приращение функции $y=\ln x$ при $x=10$ и $\Delta x=0{,}01$.

494. На сколько увеличится объем шара при нагревании, если его радиус $R=5$ см удлинится на $\Delta R=0{,}002$ см?

495. Найти увеличение объема куба при нагревании, если его ребро 10 см удлинится на 0,01 см.

Вычисление погрешности приближенного приращения функции

496. Найти приближенно приращение функции $y=3x^2+2$ при $x=2$ и $\Delta x=0{,}001$. Определить абсолютную и относительную погрешности вычисления.

Решение. Так как приращение аргумента — величина малая, то приращение функции можно заменить ее дифференциалом:

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2\\ dx=0{,}001}} = 6x\,dx\Big|_{\substack{x=2,\\ dx=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 = 0{,}012.$$

Найдем ошибку, полученную при замене приращения функции ее дифференциалом. Для этого вычислим точное значение приращения функции:

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = 3(x+\Delta x)^2 + 2 - (3x^2+2) = 3x^2 + 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2 + \\ + 2 - 3x^2 - 2 = 6x\Delta x + 3(\Delta x)^2;$$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2,\\ \Delta x=0{,}001}} = 6\cdot 2\cdot 0{,}001 + 3\cdot 0{,}000001 = 0{,}012003.$$

Сравнивая точное значение Δy с приближенным, видим, что абсолютная погрешность есть

$$\Delta = |\Delta y - dy| = 0{,}000003.$$

Относительная погрешность составляет

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}000003}{0{,}012003} \approx 0{,}00025 = 0{,}025\ \%.$$

497. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функций $y = x^3 + 2x$ ее дифференциалом в точке $x=2$ при $\Delta x = 0{,}1$.

Решение. $\Delta y = ((x+\Delta x)^3 + 2(x+\Delta x)) - (x^3 + 2x) = 3x^2\Delta x + \\ + 3x(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 + 2\Delta x;$

$$\Delta y\Big|_{\substack{x=2,\\ \Delta x=0{,}1}} = 3\cdot 2^2\cdot 0{,}1 + 3\cdot 2\cdot 0{,}1^2 + 0{,}1^3 + 2\cdot 0{,}1 = 1{,}461;$$

$$dy = y'\Delta x = (3x^2+2)\Delta x; \quad dy\Big|_{\substack{x=2,\\ \Delta x=0{,}1}} = (3\cdot 2^2+2)\cdot 0{,}1 = 1{,}4;$$

$$|\Delta y - dy| = 1{,}461 - 1{,}4 = 0{,}061; \quad \delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{0{,}061}{1{,}461} \approx 0{,}042 = 4\ \%.$$

498. Найти абсолютную и относительную погрешности при замене приращения функции $y = x^2 - 2x$ ее дифференциалом в точке $x = 1$ при $\Delta x = 0{,}01$.

499. Найти абсолютную и относительную погрешности приближенного приращения функции $y = 2x^3 + 5$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}001$.

500. Ребро куба длиной 30 см увеличено на 0,1 см. Определить приближенно величину изменения объема куба и найти погрешность этого приближения.

Вычисление приращения функции с заданной точностью

501. С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,01 приращение функции $y = x\sqrt{x^2+5}$ при $x = 2$ и $\Delta x = 0{,}2$.

Решение. Находим дифференциал данной функции:

$$dy = y'dx = \left(\sqrt{x^2+5} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+5}}\right)dx.$$

При $x=2$ и $\Delta x=0{,}2$ получим

$$\Delta y \approx dy\Big|_{\substack{x=2,\\ dx=0,2}} = \left(\sqrt{4+5}+\frac{4}{\sqrt{4+5}}\right)\cdot 0{,}2 \approx 0{,}866 \approx 0{,}87.$$

502. С помощью дифференциала вычислить с точностью до 0,001 приращение функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ при $x=1$ и $\Delta x=0{,}2$.

Применение дифференциала для установления ошибок в вычислениях

503. Непосредственным измерением нашли, что диаметр круга равен 6,4 см, причем максимальная ошибка не превышает 0,05 см. Найти приближенно максимальную ошибку в оценке площади, вычисляемой по формуле $S=\frac{1}{4}\pi x^2$ (x — диаметр).

Решение. Очевидно, что точная величина максимальной ошибки есть ΔS, причем x изменяется от 6,4 до 6,45. Приближенная же величина максимальной ошибки есть соответствующий дифференциал dS. Находим

$$dS=S'(x)dx=\frac{1}{2}\pi x\,dx\Big|_{\substack{x=6,4\\ dx=0,05}}=\frac{1}{2}\pi\cdot 6{,}4\cdot 0{,}05=0{,}5024\ (\text{см}^2).$$

Относительная ошибка в оценке площади составляет

$$\frac{dS}{S}=\frac{2dx}{x}=\frac{2\cdot 0{,}05}{6{,}4}\approx 0{,}015=1{,}5\,\%.$$

504. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении площади квадратной комнаты, если длина стороны измерена с погрешностью не более 0,05 м и составляет 4,6 м.

505. Найти относительную погрешность, допущенную при измерении объема куба, если ребро, равное 12,5 см, измерено с погрешностью, не превышающей 0,01 см.

506. Доказать, что относительная погрешность корня равна относительной погрешности подкоренного числа, деленной на показатель степени корня.

507. Доказать, что относительная погрешность $\sqrt[3]{x}$ равна $dx/(3x)$.

508. Найти относительную погрешность, допускаемую при вычислении стороны квадрата, если его площадь 68,5 см^2 измерена с погрешностью 0,05 см.

509. Площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi R^2$. При измерении радиус R оказался равным 5,2 см, причем максимально возможная при этом погрешность измерения ΔR не превышает 0,05 см. Определить абсолютную и относительную погрешности, допускаемые при вычислении площади круга по указанной формуле.

Нахождение приближенного значения функции

510. Найти приближенное значение функции $y=\sqrt{3x^2+1}$ при $x=1{,}02$.

Решение. Воспользуемся формулой (6), т. е. $f(x+\Delta x)\approx$

$\approx f(x)+dy$. В данном случае следует принять $x=1$. Тогда $\Delta x=$ $=1{,}02-1=0{,}02$. Значение функции при $x=1$ определяется легко: $f(1)=\sqrt{3\cdot 1^2+1}=2$. Далее, находим

$$dy=(\sqrt{3x^2+1})'dx=\frac{6x\,dx}{2\sqrt{3x^2+1}}=\frac{3x\,dx}{\sqrt{3x^2+1}},$$

откуда

$$dy\Big|_{\substack{x=1\\ \Delta x=0{,}02}}=\frac{3\cdot 1\cdot 0{,}02}{\sqrt{3\cdot 1^2+1}}=\frac{0{,}06}{2}=0{,}03.$$

Следовательно,

$$f(1{,}02)\approx f(1)+0{,}03=2+0{,}03=2{,}03.$$

Если значение данной функции при $x=1{,}02$ вычислить непосредственно, то получим $f(1{,}02)=\sqrt{3\cdot 1{,}02^2+1}=2{,}03007\ldots$, т. е. разность между точным значением данной функции при $x=1{,}02$ и ее приближенным значением является числом очень малым: $2{,}03007-2{,}03=$ $=0{,}00007$.

Замечания. 1. Чтобы правильно применять формулу приближенного вычисления значения функции, нужно научиться подбирать функцию $f(x)$. Так, для нахождения $2{,}08^6$ нужно взять $f(x)=x^6$, $x=2$, $\Delta x=0{,}08$; для вычисления $\sqrt[3]{9}$ — взять $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x=8$, $\Delta x=1$.

2. При использовании дифференциала функции для приближенного вычисления значения функции и ее приращения нужно помнить, что формулы $\Delta y\approx dy=f'(x)\Delta x$ и $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+dy=f(x_0)+f'(x)\Delta x$ дают достаточно точные результаты только при условии, что $|\Delta x|$ близко к нулю.

Например, вычисляя значение функции $f(x)=x^3+2x$ при $x=3{,}986$, следует положить $x_0=4$, $\Delta x=-0{,}014$ (было бы ошибкой полагать $x_0=$ $=3$; $\Delta x=0{,}986$).

511. Вычислить $\operatorname{tg}46°$, исходя из значения функции $y=\operatorname{tg}x$ при $x=45°$ и заменяя ее приращение дифференциалом.

Решение. Здесь $x=45°$, $\Delta x=46°-45°=1°$. Чтобы воспользоваться формулой (6), нужно углы выразить в радианах: $x=\pi/4$, $\Delta x=$ $=0{,}0175$.

Вычисляем дифференциал функции при $x=\pi/4$ и $dx=\Delta x=0{,}0175$:

$$dy=\frac{1}{\cos^2 x}dx\Big|_{\substack{x=\pi/4,\\ dx=0{,}0175}}=\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\cdot 0{,}0175=0{,}0350.$$

Следовательно, $\Delta y\approx 0{,}0350$.

Теперь находим

$$\operatorname{tg}46°=y+\Delta y\Big|_{\substack{x=\pi/4\\ dx=0{,}0175}}\approx \operatorname{tg}45°+0{,}0350=1{,}0350.$$

Вычисления с помощью четырехзначных таблиц дают: $\operatorname{tg}46°=$ $=1{,}0355$.

512. Найти приближенное значение $\sqrt[5]{31}$.

Решение. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[5]{x}$ и найдем ее дифференциал: $dy=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}dx$. Вычислим приращение функции Δy при изменении x от 32 до 31, т. е. при $\Delta x=-1$:

$$\Delta y \approx dy = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} dx \Big|_{\substack{x=32, \\ dx=-1}} = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{8}(-1) = -0{,}025.$$

Следовательно,

$$\sqrt[5]{31} = y + \Delta y\Big|_{\substack{x=32 \\ dx=-1}} \approx y + dy = \sqrt[5]{32} - 0{,}025 = 1{,}975.$$

513. Найти приближенное значение функции $y = \sqrt[3]{x^2+2x}$ при $x = 2{,}004$, исходя из ее точного значения при $x_0 = 2$ и заменяя Δy на dy.

Решение. Здесь начальное значение $x_0 = 2$, наращенное значение $x = x_0 + \Delta x = 2{,}004$, $\Delta x = 2{,}004 - 2 = 0{,}004$.

Найдем начальное значение функции: $y|_{x=2} = \sqrt[3]{2^2+4} = \sqrt[3]{8} = 2$.

Найдем дифференциал:

$$dy = (\sqrt[3]{x^2+2x})' dx = ((x^2+2x)^{1/3})' dx = \frac{1}{3}(x^2+2x)^{-2/3}(2x+2)dx.$$

При $x = 2$ и $dx = 0{,}004$ получим $dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot 6\cdot 0{,}004 = 0{,}002$.

Вычислим приближенное значение функции: $y|_{x=2{,}004} = 2 + 0{,}002 = 2{,}002$.

514. Вычислить приближенно $3{,}002^4$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^4$. Здесь $x_1 = 3{,}002$, $x_0 = 3$, $\Delta x = 0{,}002$ и, следовательно, $f(x_1) = f(3{,}002) = 3{,}002^4$. Находим $f(x_0) = f(3) = 3^4 = 81$, $f'(x_0)\Delta x = 4\cdot 3^3\cdot 0{,}002 = 4\cdot 27\cdot 0{,}002 = 0{,}216$. Итак, $3{,}002^4 \approx 81 + 0{,}216 = 81{,}216$.

Проверка показывает, что точное значение числа $3{,}002^4$ равно 81,216116096016. Относительная погрешность достаточно мала и составляет 0,00014 %.

515. Вычислить приближенно $1{,}998^5$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = x^5$. Здесь $x_1 = 1{,}998$, $x_0 = 2$, $\Delta x = -0{,}002$, $f(x_1) = f(1{,}998) = 1{,}998^5$. Далее, находим $f(x_0) = f(2) = 2^5 = 32$, $f'(x_0)\Delta x = 5\cdot 2^4(-0{,}002) = 5\cdot 16(-0{,}002) = -0{,}16$.

В результате получаем $1{,}998^5 \approx 32 - 0{,}16 = 31{,}84$.

516. Найти приближенно $\sin 31°$.

Решение. Будем искать приближенное значение функции $y = \sin x$ при $x = 31°$, исходя из ее точного значения при $x = 30°$. Имеем $\sin 30° = 0{,}5$, $dx \approx \Delta x = 31° - 30° = 1°$ (или в радианах $dx = 0{,}0175$).

Найдем $dy = \cos x\, dx$. Далее, при $x = 30°$, $dx = 0{,}0175$ получим $dy = \cos 30°\cdot 0{,}0175 = 0{,}866\cdot 0{,}0175 = 0{,}015$.

Таким образом, $\sin 31° \approx \sin 30° + dy = 0{,}5 + 0{,}015 = 0{,}515$.

517—520. Вычислить приближенные значения следующих функций:

517. $y = x^3$ при $x = 10{,}03$.

518. $y = x^4 - 2x + 4$ при $x = 3{,}002$.

519. $y = \sqrt{x}$ при $x = 24{,}99$.

520. $y = \sqrt{x^3 - 2x}$ при $x = 1{,}96$.

521—535. Найти приближенные значения:

521. $2{,}005^4$.	522. $2{,}002^{10}$.	523. $2{,}995^5$.
524. $1{,}995^{10}$.	525. $1{,}998^6$.	526. $\sqrt{1{,}07}$.
527. $\sqrt{0{,}84}$.	528. $\sqrt[3]{0{,}95}$.	529. $\sqrt{25{,}4}$.
530. $\sqrt{81{,}8}$	531. $\sqrt{36{,}7}$.	532. $\sqrt[3]{26{,}8}$.
533. $\cos 61°$.	534. $\sin 60°3$.	535. $2^{2{,}98}$

§ 7. Исследование функций и построение графиков

Возрастание и убывание функций
Исследование функции на экстремум с помощью первой производной
Исследование функции с помощью второй производной
Наибольшее и наименьшее значения функции
Практическое применение производной
Вогнутость и выпуклость. Точки перегиба
Построение графиков функций

1. Возрастание и убывание функций

Понятие производной — одно из важнейших в математике. С помощью производной, учитывая ее механический смысл (скорость изменения некоторого процесса) и геометрический смысл (угловой коэффициент касательной), можно решать самые разнообразные задачи, относящиеся к любой области человеческой деятельности. В частности, с помощью производных стало возможным подробное исследование функций, что позволило очень точно строить их графики, находить их наибольшие и наименьшие значения и т. д.

Познакомимся с основными идеями, связанными с исследованием функций. Для этого рассмотрим график какой-нибудь функции $y = f(x)$, $x \in (a, b)$ (рис. 109).

Интуитивно ясно, что в интервалах (a, x_1) и (x_2, b) данная функция возрастает, а в интервале (x_1, x_2) — убывает.

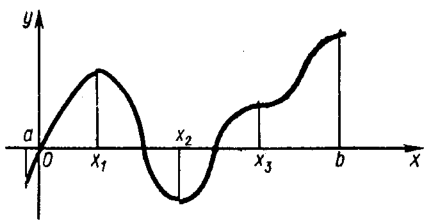

Рис. 109

В дальнейшем будем рассматривать только дифференцируемые функции.

Определение 1. Функция $y=f(x)$ называется *возрастающей* в некотором интервале, если в точках этого интервала большему значению аргумента соответствует большее значение функции, и *убывающей*, если большему значению аргумента соответствует меньшее значение функции.

Согласно определению возрастающей на некотором интервале функции имеем: если $x_2>x_1$, то $f(x_2)>f(x_1)$; если же $x_2<x_1$, то $f(x_2)<f(x_1)$. Отсюда следует, что если $x_2-x_1>0$, то $f(x_2)-f(x_1)>0$, а если $x_2-x_1<0$, то $f(x_2)-f(x_1)<0$.

Так как разности, стоящие в левых частях полученных неравенств, являются приращениями аргумента и функции, то приходим к заключению, что если $\Delta x>0$, то $\Delta y>0$, а если $\Delta x<0$, то и $\Delta y<0$. Иными словами, приращения Δx и Δy имеют одинаковые знаки.

Тогда в обоих случаях отношение приращения функции к приращению аргумента положительно, т. е. $\frac{\Delta y}{\Delta x}>0$. Далее, поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на рассматриваемом интервале, то, переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получим $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\geqslant 0$, а это значит, что $f'(x)>0$.

Рассуждая аналогично, можно показать, что в случае убывания функции ее производная отрицательна, т. е. $f'(x)<0$.

Все вышеизложенное можно сформулировать как необходимый признак возрастания (убывания) функции.

▲ **Теорема 1.** *Если дифференцируемая функция $y=f(x)$ возрастает (убывает) в данном интервале, то производная этой функции не отрицательна (не положительна) в этом интервале.*

Геометрически утверждение теоремы означает, что касательные к графику возрастающей функции образуют острые углы α с положительным направлением оси Ox или, быть может, в отдельных точках, вроде точки M (рис. 110), касательная парал-

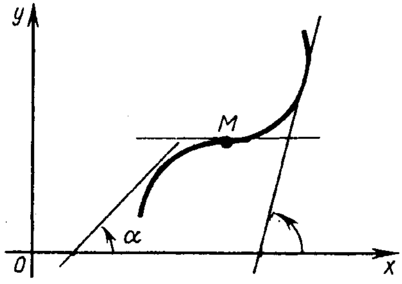

Рис. 110

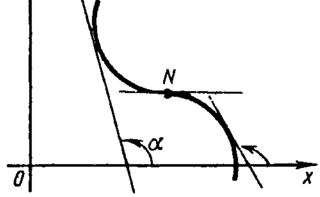

Рис. 111

лельна оси Ox; значит, $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha \geqslant 0$. Аналогично, касательные к графику убывающей функции образуют тупые углы α с положительным направлением оси Ox или, быть может, в отдельных точках, вроде точки N (рис. 111), касательная параллельна оси Ox; поэтому $f'(x) = \operatorname{tg}\alpha \leqslant 0$.

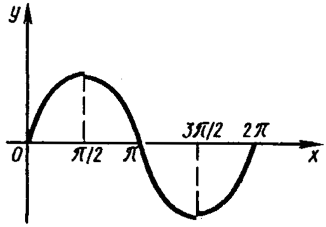

Рис. 112

Интервалы, на которых функция только возрастает или же только убывает, называются *интервалами монотонности* функции, а сама функция называется *монотонной* на этих интервалах.

Например, функция $y = \sin x$ (рис. 112) не монотонна на интервале $0 < x < 2\pi$, но является монотонной на интервале $\pi/2 < x < 3\pi/2$ (во всех точках этого интервала функция убывает).

Обратное заключение также справедливо, оно выражается следующей теоремой.

▲ **Теорема 2.** *Если производная функции $y = f(x)$ положительна (отрицательна) в некотором интервале, то функция в этом интервале монотонно возрастает (монотонно убывает).*

Поясним эту теорему геометрически. Имеем $f'(x) = k = \operatorname{tg}\alpha$. Если $f'(x) > 0$, то $\operatorname{tg}\alpha > 0$, т. е. угол α — острый, а это возможно лишь при возрастании функции (рис. 113).

Если же $f'(x) < 0$, то $\operatorname{tg}\alpha < 0$, т. е. угол α — тупой, а это возможно лишь при убывании функции (рис. 114).

Таким образом, возрастание или убывание функции на интервале вполне определяется знаком производной этой функции. В интервале знакопостоянства производной функция является монотонной.

536. Показать, что функция $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$ убывает в интервале $(-2, 1)$.

Решение. Достаточно убедиться в том, что производная функции при $-2 < x < 1$ отрицательна. Находим

$$y' = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1).$$

Множитель $x + 2$ на интервале $(-2, 1)$ положителен, а множитель $x - 1$ отрицателен. Значит, производная во всех точках указанного интервала отрицательна, а, следовательно, функция убывает.

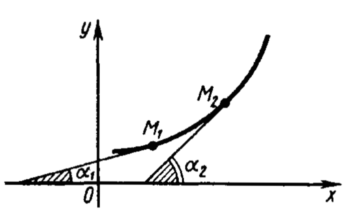

Рис. 113

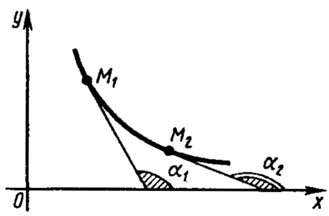

Рис. 114

537. Показать, что функция $y = \operatorname{tg} x$ в интервале $(-\pi/2, \pi/2)$ монотонно возрастает.

Решение. Находим производную $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$. В указанном интервале $\cos x$ изменяется от 0 до 1; поэтому $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0$. Следовательно, данная функция является возрастающей.

538. Исследовать поведение функции $f(x) = 3 + \sqrt{x}$ в точке $x = 4$.

Решение. Найдем производную; $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Вычислим значение производной при $x = 4$: $f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} > 0$. Отсюда заключаем, что данная функция возрастает в точке $x = 4$.

539. Показать, что функция $y = \sqrt{2x - x^2}$ возрастает в интервале $(0, 1)$ и убывает в интервале $(1, 2)$.

540. Показать, что функция $y = x^3 + x$ везде возрастает.

541. Показать, что функция $y = \operatorname{arctg} x - x$ везде убывает.

542. Показать, что функция $y = \frac{x^2 - 1}{x}$ возрастает в любом интервале, не содержащем точки $x = 0$.

Мы установили, что интервалы возрастания или убывания функции совпадают с интервалами, в которых производная этой функции сохраняет знак. Следовательно, переход от возрастания к убыванию или обратно возможен лишь в точках, где производная меняет знак. Такими точками могут служить только такие точки, в которых $f'(x) = 0$, а также точки разрыва.

Поэтому интервалы монотонности мы получим, если разделим область определения функции на части, границами которых служат те точки, в которых $f'(x) = 0$, и точки разрыва.

Сформулируем теперь правило нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$.

1^0. Вычисляют производную $f'(x)$ данной функции.

2^0. Находят точки, в которых $f'(x)$ равна нулю или не существует. Эти точки называются *критическими* для функции $f(x)$.

3^0. Найденными точками область определения функции $f(x)$ разбивается на интервалы, на каждом из которых производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Эти интервалы являются интервалами монотонности.

4^0. Исследуют знак $f'(x)$ на каждом из найденных интервалов. Если на рассматриваемом интервале $f'(x) > 0$, то на этом интервале $f(x)$ возрастает; если же $f'(x) < 0$, то на таком интервале $f(x)$ убывает.

Замечание. В зависимости от условий задачи правило нахождения интервалов монотонности может упрощаться.

543—563. Найти интервалы монотонности следующих функций:

543. $y = x^2 - 4x + 1$.

Решение. 1^0. Находим производную данной функции: $y' = 2x - 4$.

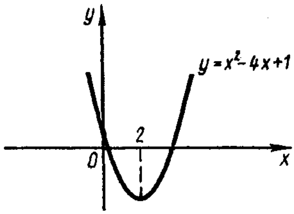

Рис. 115

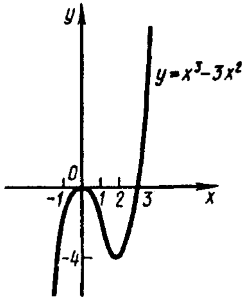

Рис. 116

2^0. Находим критические точки функции: $2x-4=0$; $2x=4$; $x=2$.

3^0. Область определения функции $(-\infty, \infty)$ разбивается на интервалы $(-\infty, 2)$ и $(2, \infty)$.

4^0. На интервале $(-\infty, 2)$ имеем $y'<0$; например, $(2x-4)|_{x=0}=-4$. Следовательно, на интервале $(-\infty, 2)$ функция убывает. На интервале $(2, \infty)$ имеем $y'>0$; например, $(2x-4)|_{x=3}=2\cdot 3-4=2$. Значит, на интервале $(2, \infty)$ функция возрастает (рис. 115).

544. $f(x)=x^3-3x^2$.

Решение. 1^0. Находим $f'(x)=3x^2-6x$.

2^0. Находим критические точки: $3x^2-6x=0$; $3x(x-2)=0$; $x_1=0$, $x_2=2$.

3^0. Область определения функции $(-\infty, \infty)$ разбивается на интервалы $(-\infty, 0)$, $(0, 2)$ и $(2, \infty)$.

4^0. Имеем $f'(-1)=3(-1)^2-6(-1)=9>0$; следовательно, в интервале $(-\infty, 0)$ функция возрастает; $f'(1)=3\cdot 1^2-6\cdot 1=-3<0$; значит, в интервале $(0, 2)$ функция убывает; $f'(3)=3\cdot 3^2-6\cdot 3=9>0$; поэтому в интервале $(2, \infty)$ функция возрастает (рис. 116).

545. $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$.

546. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ на интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Имеем

$$f'(x)=\left(\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\frac{x-\operatorname{tg} x}{x^2\cos x}.$$

Если $0<x<\pi/2$, то $x<\operatorname{tg} x$, $x^2\cos x>0$ и, значит, $f'(x)<0$. Отсюда следует, что $f(x)$ убывает на $(0, \pi/2)$.

547. $y=x(1+\sqrt{x})$

Решение. Так как $y=x(1+\sqrt{x})=x+x^{3/2}$, то $y'=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$. Область определения данной функции — промежуток $[0, \infty)$. Так как производная положительна в этом промежутке, то функция возрастает во всей области определения.

548. $y=x-2\sin x$, если $0\leqslant x\leqslant 2\pi$.

Решение. 1^0. Имеем $y'=1-2\cos x$.

2^0. Находим критические точки: $1-2\cos x=0$; $2\cos x=1$; $\cos x=1/2$; $x_1=\pi/3$, $x_2=5\pi/3$ (для данного условия).

3^0. Указанная область исследования $[0, 2\pi]$ разбивается на промежутки $[0, \pi/3]$, $(\pi/3, 5\pi/3)$, $(5\pi/3, 2\pi]$.

4^0. Находим $y'(\pi/4) = 1 - 2\cos(\pi/4) = 1 - 2\cdot\sqrt{2}/2 = 1 - \sqrt{2} < 0$, следовательно, в промежутке $[0, \pi/3)$ функция убывает; $y'(\pi/2) = 1 - 2\cos(\pi/2) = 1 - 0 = 1 > 0$; значит, в промежутке $(\pi/3, 5\pi/3)$ функция возрастает; $y'(11\pi/6) = 1 - 2\cos(11\pi/6) = 1 - 2\cdot\sqrt{3}/2 = 1 - \sqrt{3} < 0$; поэтому в промежутке $(5\pi/3, 2\pi)$ функция убывает.

549. $f(x) = 2x^2 - \ln x$.

Решение. 1^0. Функция существует только при $x > 0$. Находим производную:

$$f'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x} = \frac{(2x-1)(2x+1)}{x}.$$

2^0. Производная равна нулю в точке $x_1 = 1/2$ ($x_2 = -1/2$ — посторонний корень).

3^0. Область определения функции $(0, \infty)$ разобьем на два интервала $(0, 1/2)$ и $(1/2, \infty)$.

4^0. В интервале $(0, 1/2)$ производная отрицательна, а в интервале $(1/2, \infty)$ — положительна. Следовательно, рассматриваемая функция убывает в интервале $(0, 1/2)$ и возрастает в интервале $(1/2, \infty)$.

550. $f(x) = x^5 + 2x^3 + x$. **551.** $\varphi(x) = 1 - x^3$.

552. $y = x^5 - 5x$. **553.** $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

554. $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 4$. **555.** $y = x^3 - 3x^2 - 45x + 2$.

556. $y = \ln x$. **557.** $y = \sqrt{2x - x^2}$.

558. $y = \sin x$. **559.** $y = \ln\sqrt{1 + x^2}$.

560. $f(x) = \frac{e^x}{x}$. **561.** $f(x) = x + \cos x$.

562. $y = 2x + \sin x$. **563.** $y = x + \frac{1}{x}$.

2. Исследование функции на экстремум с помощью первой производной

На рис. 116. изображен график функции $y = x^3 - 3x^2$. Рассмотрим окрестность точки $x = 0$, т. е. некоторый интервал, содержащий эту точку. Как видно из рисунка, существует такая окрестность точки $x = 0$, что наибольшее значение функции $x^3 - 3x^2$ в этой окрестности принимается в точке $x = 0$. Например, на интервале $(-1, 1)$ наибольшее значение, равное нулю, функция принимает в точке $x = 0$. Точку $x = 0$ называют *точкой максимума** этой функции.

Аналогично, точку $x = 2$ называют *точкой минимума*** функции $x^3 - 3x^2$, так как значение функции в этой точке меньше, чем ее значение в остальных точках некоторой окрестности точки $x = 2$.

* От лат. maximum — «наибольший».

** От лат. minimum — «наименьший».

Определение 2. Точка $x=a$ называется *точкой максимума* (*минимума*) функции $f(x)$, если имеет место неравенство $f(a)>f(x)$ (соответственно $f(a)<f(x)$) для любого x из некоторой окрестности точки $x=a$.

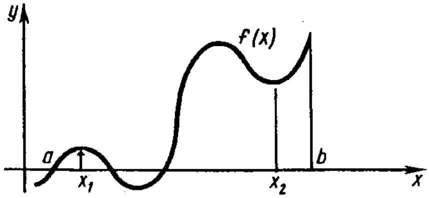

Рис. 117

Если $x=a$ — точка максимума (минимума) функции $f(x)$, то говорят, что $f(x)$ имеет *максимум* (*минимум*) в точке $x=a$. Максимум и минимум функции объединяют названием *экстремум* функции, а точки максимума и минимума называют *точками экстремума (экстремальными точками)*.

Не следует считать, что максимум функции является наибольшим значением во всей области определения этой функции; он является наибольшим лишь по сравнению со значениями функции, взятыми в некоторой окрестности точки максимума.

На данном интервале функция может иметь несколько максимумов и несколько минимумов, причем некоторые из максимумов могут быть меньше некоторых минимумов.

Из рис. 117 видно, что значение $f(x_1)$, представляющее собой максимум функции $f(x)$, не является наибольшим значением этой функции на интервале (a, b) и, более того, $f(x_1)$ меньше, чем значение $f(x_2)$, являющееся минимумом данной функции.

Аналогично, минимум функции не обязательно является наименьшим значением данной функции.

Определим, при каких условиях функция имеет максимум или минимум.

▲ **Теорема 3** (необходимый признак экстремума). *Если $x=a$ является точкой экстремума функции $y=f(x)$ и производная в этой точке существует, то она равна нулю: $f'(a)=0$.*

Доказательство. Производная функции $f(x)$ в точке $x=a$ не может быть отличной от нуля, так как в случае $f'(a)>0$ функция $f(x)$ возрастала бы в некотором интервале, содержащем точку a, а в случае $f'(a)<0$ — убывала бы в некотором интервале, содержащем точку a; другими словами, при $f'(a)>0$ и $f'(a)<0$ функция $f(x)$ не имеет экстремума в точке a, что противоречит условию. Значит, $f'(a)=0$.

Геометрически необходимый признак экстремума означает, что *если $x=a$ — точка экстремума функции $y=f(x)$, то касательная* (в том случае, когда она существует) *к графику этой функции в точке $(a; f(a))$ параллельна оси Ox* (рис. 118).

Легко убедиться в том, что необходимое условие экстремума функции не является достаточным, т. е. из того факта, что $f'(a)=0$, вовсе не следует, что функция $f(x)$ имеет экстремум при $x=a$. Например, для функции, изображенной на рис. 119, касательная

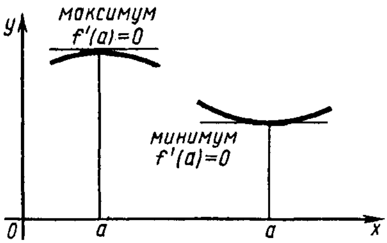

Рис. 118

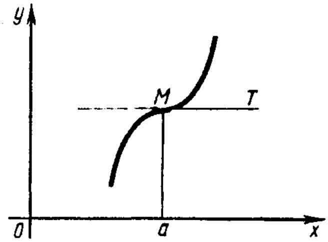

Рис. 119

MT параллельна оси Ox, т. е. $f'(a)=0$, однако экстремума в этой точке функция не имеет.

Таким образом, обращение первой производной в нуль является необходимым, но не достаточным условием экстремума.

▲ **Теорема 4** (достаточный признак экстремума). *Если производная $f'(x)$ при переходе x через a меняет знак, то a является точкой экстремума функции $f(x)$.*

Доказательство. Пусть при переходе x через a производная меняет знак с плюса на минус. Тогда слева от a производная положительна и, следовательно, здесь находится интервал возрастания функции. Справа же от a производная отрицательна, и поэтому здесь находится интервал убывания функции. Точка отделяющая интервал возрастания функции от интервала убывания, есть точка максимума.

Аналогично доказывается, что если при переходе x через a производная меняет знак с минуса на плюс, то a является точкой минимума.

Смысл теоремы 4 наглядно иллюстрирует рис. 120. Точка a — критическая, так как $f'(a)=0$. Слева от этой точки, т. е. при $x<a$, имеем $f'(x)>0$; касательная к кривой образует с осью Ox острый угол и функция возрастает.

Справа от этой точки, т. е. при $x>a$, имеем $f'(x)<0$; касательная к кривой образует с осью Ox тупой угол и функция убывает. При $x=a$ функция переходит от возрастания к убыванию, т. е. имеет максимум.

Для функции, изображенной на рис. 119, при переходе через критическую точку $x=a$ производная не меняет знак и в этой точке нет экстремума.

Таким образом, исследование производной $y'=f'(x)$ позволяет во многом изучить поведение функции $y=f(x)$. При этом нужно понимать, что в своих рассуждениях мы с помощью известного графика функции находили значения производной на тех или иных участках кривой. На практике же, конечно, поступают наоборот: рассматривают производную некоторой функции и с ее помощью исследуют характер функции.

Нетрудно выделить основные моменты этого исследования.

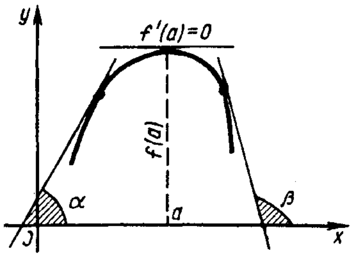

Рис. 120

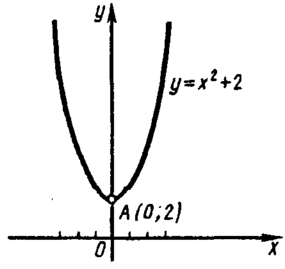

Рис. 121

1⁰. Находят производную $f'(x)$.

2⁰. Находят все критические точки из области определения функции.

3⁰. Устанавливают знаки производной функции при переходе через критические точки и выписывают точки экстремума.

4⁰. Вычисляют значения функции $f(x)$ в каждой экстремальной точке.

564—580. Исследовать на экстремум следующие функции:

564. $y=x^2+2$.

Решение. 1⁰. Находим производную: $y'=(x^2+2)'=2x$.

2⁰. Приравниваем ее нулю: $2x=0$, откуда $x=0$ — критическая точка.

3⁰. Определяем знак производной при значении $x<0$, например при $x=-1$: $y'_{x=-1}=2(-1)=-2$. Определяем знак производной при $x>0$, например при $x=1$: $y'_{x=1}=2\cdot 1=2$. Так как при переходе через $x=0$ производная изменяет знак с минуса на плюс, при $x=0$ функция имеет минимум.

4⁰. Находим минимальное значение функции, т. е. $f(0)=0^2+2=2$. Теперь можно на чертеже изобразить вид кривой вблизи точки $A(0;2)$ (рис. 121).

565. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

Решение. 1⁰. Находим производную $y'=x^2-4x+3$.

2⁰. Приравниваем ее нулю и решаем уравнение $x^2-4x+3=0$. Его корни $x_1=1$, $x_2=3$ — критические точки.

3⁰. Производную можно представить в виде произведения множителей: $y'=(x-1)(x-3)$. Исследуем критическую точку $x_1=1$, определяя знак y' вблизи этой точки слева и справа от нее. Так как $y'_{x<1}>0$, $y'_{x>1}<0$, то при $x_1=1$ функция имеет максимум. Аналогично, для точки $x_2=3$ получим $y'_{x<3}<0$, $y'_{x>3}>0$. Следовательно, при $x_2=3$ функция достигает минимума.

4⁰. Находим $y|_{x=1}=\frac{7}{3}$, $y|_{x=3}=1$.

График функции изображен на рис. 122.

566. $f(x)=x^3+3x^2+9x-6$.

Решение. Найдем $f'(x)=3x^2+6x+9=3(x^2+2x+3)$. Приравняв

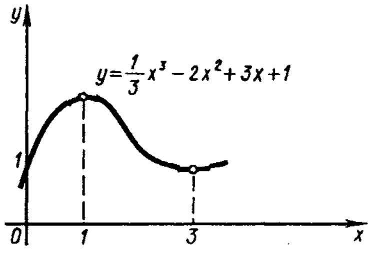

Рис. 122

производную нулю, видим, что уравнение $x^2+2x+3=0$ не имеет действительных корней, а это означает, что непрерывная функция $f(x)$ не имеет ни максимумов, ни минимумов. Действительно, $f'(x)=3((x+1)^2+2)>0$ при любом значении x; следовательно, функция $f(x)$ монотонно возрастает на всей области определения и не может иметь экстремумов.

567. $y=(x-5)e^x$.

Решение. 1^0. $y'=(x-5)'e^x+(e^x)'(x-5)=e^x+e^x(x-5)=e^x(x-4)$.

2^0. $e^x(x-4)=0$; $e^x\neq 0$; $x-4=0$; $x=4$.

3^0. В интервале $(-\infty, 4)$ производная отрицательна, а в интервале $(4, \infty)$ положительна. Следовательно, при $x=4$ функция имеет минимум.

4^0. $f(4)=y_{\min}=-e^4$.

568. $y=1-\sqrt[5]{(x-2)^4}$.

Решение. 1^0. $y'=-\frac{4}{5}(x-2)^{-1/5}=-\frac{4}{5\sqrt[5]{x-2}}$.

2^0. Производная не обращается в нуль ни при каких значениях x и не существует лишь при $x=2$. Это и есть критическая точка.

3^0. В интервале $(-\infty, 2)$ производная положительна, в интервале $(2, \infty)$ отрицательна; следовательно, при $x=2$ функция имеет максимум.

4^0. Находим $f(2)=y_{\max}=1$.

569. $f(x)=\sin x+\cos x$.

Решение. 1^0. $f'(x)=\cos x-\sin x$.

2^0. Решим уравнение $\cos x-\sin x=0$; разделив обе его части на $\cos x$, получим $1-\operatorname{tg} x=0$, $\operatorname{tg} x=1$, т. е. $x=\pi/4$.

3^0. При $x<\pi/4$, например при $x=0$, имеем $f'(0)=\cos 0-\sin 0=1>0$; при $x>\pi/4$, например при $x=\pi/3$, получим $f'(\pi/3)=\cos(\pi/3)-\sin(\pi/3)=1/2-\sqrt{3}/2<0$. Значит, при $x=\pi/4$ функция имеет максимум.

4^0. $f(\pi/4)=\sin(\pi/4)+\cos(\pi/4)=\sqrt{2}/2+\sqrt{2}/2=\sqrt{2}$, т. е. $(\pi/4; \sqrt{2})$ — точка максимума.

Замечание. При исследовании функции на экстремум производную $f'(x)$ полезно предварительно разложить на множители; этим упрощается исследование ее знака в окрестности критического значения.

Для оформления записи исследования функции можно пользоваться таблицей, в первой строке которой записаны интервалы знакопостоянства производной и критические точки функции; во второй — знаки первой производной в этих интервалах и ее значения в критических точках; в третьей — поведение функции в этих интервалах и ее значения в критических точках.

570. $y=xe^x$.

Решение. 1^0. Находим производную:

$$y'=(xe^x)'=x'e^x+(e^x)'x=e^x+xe^x=e^x(1+x).$$

2^0. Находим критические точки: $e^x(1+x)=0$, $x=-1$.

3^0. Исследуем знаки производной слева и справа от критической точки:

$$y'(-2)=e^{-2}(1-2)=\frac{1}{e^2}(-1)<0,\ y'(1)=e(1+1)=2e>0.$$

Следовательно, при $x=-1$ функция имеет минимум $y_{\min}=y(-1)=$ $=(-1)e^{-1}=-1/e=-0{,}369$.

Составим таблицу:

x	$(\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	убывает	$y_{\min}=-1/e$	возрастает

571. $y=x^2-x-6$. **572.** $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$.

573. $y=1-6x-x^2$. **574.** $y=x^3-6x+1$.

575. $y=\frac{1}{3}x^3+x^2-3x$. **576.** $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2+2$.

577. $f(x)=ax^2+bx+c$. **578.** $y=(2x+1)\sqrt[3]{x-2}$.

579. $f(x)=2^x x^{-2}$. **580.** $y=5^x+5^{-x}$.

581. Может ли точка экстремума функции быть одновременно и точкой экстремума ее производной?

3. Исследование функции на экстремум с помощью второй производной

Часто бывает рациональнее исследовать функцию на экстремум с помощью второй производной. Рассмотрим сущность этого метода.

Знак первой производной данной функции характеризует возрастание и убывание функции. Точно так же знак второй производной связан с возрастанием и убыванием первой производной.

Если первая производная в некотором интервале дифференцируема и возрастает, то в каждой точке этого интервала вторая производная положительна; если же первая производная убывает, то вторая производная в каждой точке этого интервала отрицательна.

Теперь выясним, как изменяется первая производная в точках экстремума и близких к ним точках с увеличением аргумента. Первая производная при переходе через точку максимума меняет знак с плюса на минус; иными словами, она от положительных значений переходит через нуль к отрицательным, т. е. убывает, а значит, ее производная должна быть отрицательна. Итак, в точке максимума данной функции первая производная равна нулю, а вторая производная отрицательна.

Аналогично можно показать, что в точке минимума функции первая производная равна нулю, а вторая положительна.

Отсюда вытекает правило исследования функции на экстремум с помощью второй производной:

1⁰. Находят первую производную $f'(x)$.

2⁰. Приравняв ее к нулю, находят действительные корни полученного уравнения (т. е. критические значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$).

3⁰. Находят вторую производную $f''(x)$.

4⁰. Во вторую производную подставляют поочередно все критические значения; если при этой подстановке вторая производная окажется положительной, то в этой точке функция имеет минимум; если же вторая производная окажется отрицательной, то функция имеет максимум.

Замечание. Если при подстановке критического значения во вторую производную она обратится в нуль, то ничего определенного относительно существования экстремума сказать нельзя, а исследование нужно продолжить с помощью первой производной.

582—599. Исследовать на экстремум с помощью второй производной следующие функции:

582. $y=4x-x^2$.

Решение. 1^0. Находим первую производную: $y'=4-2x$.

2^0. Решая уравнение $4-2x=0$, получим критическую точку $x=2$.

3^0. Вычисляем вторую производную: $y''=-2$.

4^0. Так как y'' отрицательна в любой точке, то и $y''(2)=-2<0$. Это означает, что функция в точке $x=2$ имеет максимум. Найдем его значение: $y(2)=4\cdot 2-2^2=4$, т. е. $y_{max}=4$.

583. $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+6x$.

Решение. 1^0. $y'=x^2-5x+6$.

2^0. $x^2-5x+6=0$, т. е. $x_1=2$, $x_2=3$ — критические точки.

3^0. $y''=2x-5$.

4^0. Так как $y''_{x=2}=2\cdot 2-5=-1<0$, то при $x_1=2$ имеем максимум, равный $y_{max}=4/3$. Так как $y''_{x=3}=2\cdot 3-5=1>0$, то при $x_2=3$ имеем минимум $y_{min}=9/2$.

584. $y=x^5$.

Решение. 1^0. Находим первую производную: $y'=5x^4$.

2^0. Решая уравнение $5x^4=0$, получаем критическую точку $x=0$.

3^0. Вычисляем вторую производную и находим ее значение в критической точке: $y''=20x^3$, $y''(0)=0$.

4^0. Так как вторая производная в критической точке равна нулю, то имеем сомнительный случай.

Поэтому исследуем функцию с помощью первой производной. Для этого берем сначала $x_1=-1<0$, а затем $x_2=1>0$. Тогда $y'(-1)=5(-1)^4=5\cdot 1=5>0$ и $y'(1)=5\cdot 1^2=5>0$, т. е. при переходе x через критическую точку $x=0$ производная не меняет знак, а это значит, что функция не имеет ни максимума, ни минимума.

585. $y=x^6$.

Решение. 1^0. $y'=6x^5$.

2^0. $6x^5=0$, т. е. $x=0$.

3^0. $y''=30x^4$.

4^0. Так как $y''(0)=0$, то способ исследования с помощью второй производной неприменим.

Исследуем функцию на экстремум с помощью первой производной. Если $x<0$, то $y'<0$, а если $x>0$, то $y'>0$. Следовательно, в точке $x=0$ функция имеет минимум $y=0$.

586. $y=x^4-8x^2$.

Решение. 1^0. $y'=4x^3-16x$.

2^0. $4x^3-16x=0$; $x^3-4x=0$; $x(x^2-4)=0$; $x^2-4=0$ и $x=0$. Таким образом, $x_1=-2$, $x_2=0$, $x_3=2$ — критические точки.

3^0. $y''=12x^2-16$.

4^0. Имеем $y''(-2)=12(-2)^2-16=48-16=32>0$; $y''(0)=12\cdot0^2-{}$ $-=-16<0$; $y''(2)=12\cdot2^2-16=48-16=32>0$.

Вычисляем минимум и максимум функции в соответствующих точках:

$$y_{\min}=y(-2)=(-2)^4-8(-2)^2=-16,\quad y_{\max}=y(0)=0^4-8\cdot0^2=0,$$
$$y_{\min}=y(2)=2^4-8\cdot2^2=-16.$$

587. $f(x)=\sin x+\cos x$ в интервале $(0,2\pi)$.

Решение. 1^0. Имеем $f'(x)=\cos x-\sin x$.

2^0. Найдем критические точки: $\cos x-\sin x=0$; $1-\operatorname{tg}x=0$; $\operatorname{tg}x=1$; $x_1=\pi/4$, $x_2=5\pi/4$.

3^0. Находим $f''(x)=-\sin x-\cos x$.

4^0. Исследуем знаки второй производной в критических точках:

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sin\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{4}=-\sqrt{2}<0,\quad f''\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-\sin\frac{5\pi}{4}-\cos\frac{5\pi}{4}=$$
$$=\sqrt{2}>0.$$

Следовательно, при $x=\pi/4$ функция имеет максимум $f(\pi/4)=\sqrt{2}$, а при $x=5\pi/4$ — минимум $f(5\pi/4)=-\sqrt{2}$.

588. $y=x+\cos 2x$ в интервале $(0,\pi/4)$.

Решение. 1^0. Имеем $y'=1-2\sin 2x$.

2^0. Определим критические точки, принадлежащие заданному интервалу: $1-2\sin 2x=0$, $\sin 2x=1/2$, $2x=\pi/6$, $x=\pi/12$.

3^0. Находим $y''=-4\cos 2x$.

4^0. Так как $y''(\pi/12)=-4\cos(\pi/6)=-2\sqrt{3}<0$, то при $x=\pi/12$ функция имеет максимум:

$$y_{\max}=y\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{\sqrt{3}}{2}\approx1{,}13.$$

589. $y=x^2e^{-x}$.

Решение. 1^0. $y'=2xe^{-x}-xe^{-x}=x^2e^{-x}(2-x)$.

2^0. $y'=0$ при $x_1=0$ и $x_2=2$.

3^0. $y''=(2-2x)e^{-x}-(2x-x^2)e^{-x}-e^{-x}(2-4x+x^2)$.

4^0. $y''(0)=2>0$, $y''(2)=e^{-2}(-2)<0$; $y_{\min}=y(0)=0$, $y_{\max}=y(2)=$ $=4e^{-2}$.

590. $y=2x^3+6x^2-18x+120$;

591. $u(x)=3x^4-4x^3$.

592. $y=2x^2-x^4$.

593. $y=\dfrac{4x}{1+x^2}$.

594. $f(x)=\dfrac{3x^4+1}{x^3}$.

595. $y=\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}$.

596. $y=\frac{x^2}{x^2+5x+6}$.

597. $y=\frac{2}{5}x^2\sqrt{x}-\frac{4}{3}x\sqrt{x}$.

598. $y=\sin x$.

599. $y=\frac{\ln x}{x}$.

4. Наибольшее и наименьшее значения функции

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. В этом случае, как известно, она принимает как наибольшее, так и наименьшее значения на этом отрезке. Во многих прикладных вопросах бывает важно найти те точки отрезка $[a, b]$, которым отвечают наибольшее и наименьшее значения функции.

При решении этой задачи возможны два случая:

1) либо наибольшее (наименьшее) значение функции достигается внутри отрезка и тогда эти значения окажутся в числе экстремумов функции;

2) либо наибольшее (наименьшее) значение достигается на концах отрезка $[a, b]$.

Итак, чтобы найти наибольшее и наименьшее значения непрерывной на отрезке $[a, b]$ функции $y=f(x)$, нужно:

1^0. Найти все критические точки, принадлежащие промежутку $[a, b]$, и вычислить значения функции в этих точках.

2^0. Вычислить значения функции на концах отрезка $[a, b]$, т. е. найти $f(a)$ и $f(b)$.

3^0. Сравнить полученные результаты; наибольшее из найденных значений является наибольшим значением функции на отрезке $[a, b]$; аналогично, наименьшее из найденных значений есть наименьшее значение функции на этом отрезке.

600. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^3-6x$ на отрезке $[-3, 4]$.

Решение. 1^0. Найдем критические точки функции в промежутке $(-3, 4)$. Имеем $y'=3x^2-6$; решая уравнение $3x^2-6=0$, получим $x_1=\sqrt{2}$ и $x_2=-\sqrt{2}$. Эти точки принадлежат данному отрезку.

Вычислим значения функции в критических точках:

$$y(-\sqrt{2})=(-2)^3-6(-\sqrt{2})=-2\sqrt{2}+6\sqrt{2}=4\sqrt{2};$$
$$y(\sqrt{2})=(\sqrt{2})^3-6\sqrt{2}=2\sqrt{2}-6\sqrt{2}=-4\sqrt{2}.$$

2^0. Находим значения функции на концах отрезка: $y(-3)=-9$, $y(4)=40$.

3^0. Сравнивая значения функции в критических точках и ее значения на концах отрезка, заключаем, что $y=-9$ является наименьшим, а $y=40$ — наибольшим значением функции на указанном отрезке.

601. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=2x^3-6x+5$ на отрезке $[-5/2, 3/2]$.

Решение. 1^0. Находим критические точки, принадлежащие интервалу $(-5/2, 3/2)$:

$$f'(x)=6x^2-6=6(x^2-1);\quad 6(x^2-1)=0;\quad x_1=-1,\ x_2=1.$$

Вычислим значения функции в этих точках:

$$f(-1)=2(-1)^3-6(-1)+5=9;$$

$$f(1)=2\cdot 1^3-6\cdot 1+5=1.$$

2^0. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f\left(-\frac{5}{2}\right)=2\left(-\frac{5}{2}\right)^3-6\left(-\frac{5}{2}\right)+5= =-11\frac{1}{4},$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right)=2\left(\frac{3}{2}\right)^3-6\cdot\frac{3}{2}+5=2\frac{3}{4}.$$

3^0. Таким образом, наибольшее значение данной функции на рассматриваемом отрезке есть $f(-1)=9$, а наименьшее $f\left(-\frac{5}{2}\right)=-11\frac{1}{4}$ (рис. 123).

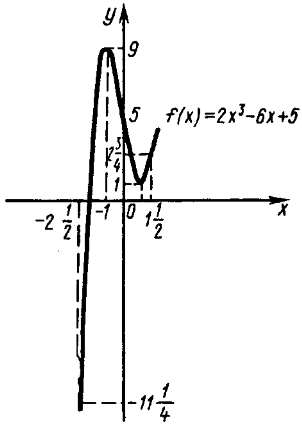

Рис. 123

602. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=x^5-5x^4+5x^3+3$ на отрезке $[-1, 2]$.

Решение. 1^0. Находим критические точки, принадлежащие интервалу $(-1, 2)$, и значения функции в этих точках:

$$y'=5x^4-20x^3+15x^2;\ 5x^4-20x^3+15x^2=0;\ 5x^2(x^2-4x+3)=0;$$
$$x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=3.$$

Критическая точка $x_3=3$ не принадлежит заданному отрезку.

Вычисляем значения функции в двух других критических точках: $y(0)=3$, $y(1)=4$.

2^0. Вычислим значения функции на концах заданного отрезка: $y(-1)=-8$; $y(2)=-5$.

3^0. Сравнивая полученные результаты, заключаем, что наибольшее значение функции $y(1)=4$, наименьшее $y(-1)=-8$.

603. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)=\sqrt{100-x^2}$ на отрезке $[-6, 8]$.

Решение. 1^0. Находим критические точки на отрезке $[-6, 8]$:

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{100-x^2}}=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}.$$

На рассматриваемом отрезке имеем только одну критическую точку $x=0$; при этом $f(0)=10$.

2^0. Вычислим значения функции на концах отрезка:

$$f(-6)=\sqrt{100-36}=8,\ f(8)=\sqrt{100-64}=6.$$

3^0. Обозначая через M наибольшее, а через m — наименьшее значение функции на отрезке, получаем $M=f(0)=10$, $m=f(8)=6$; здесь наименьшее значение достигается на конце отрезка.

Замечание. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функций можно упростить, если воспользоваться следующими свойствами непрерывных функций:

1) если функция $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна и возрастает, то $m=f(a)$ и $M=f(b)$;

2) если функция $y=f(x)$ на отрезке $[a, b]$ непрерывна и убывает, то $m=f(b)$ и $M=f(a)$;

3) если функция $y=f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке только одну точку максимума x_0 (и ни одной точки минимума), то наибольшее значение на данном отрезке есть $M=f(x_0)$;

4) если функция $y=f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, имеет на этом отрезке только одну точку минимума x_0 (и ни одной точки максимума), то наименьшее значение на данном отрезке есть $m=f(x_0)$.

604—609. Найти наибольшее значение M и наименьшее значение m следующих функций на указанных отрезках:

604. $f(x)=x^2-4x+3$ на $[0, 3]$.

605. $y=x^2-6x+8$ на $[1, 4]$.

606. $y=x^3-3x^2+3x+2$ на $[2, 5]$.

607. $f(x)=3x^4+4x^3+1$ на $[-2, 1]$.

608. $f(x)=x\ln x-x$ на $[1/e, e]$.

609. $f(x)=2\sin x-\cos 2x$ на $[0, \pi/2]$.

5. Практическое применение производной

Рассмотрим задачи, связанные с практическим применением производной. При их решении не дается готовой функции для исследования, а ее нужно составить самостоятельно по условию задачи. При этом сначала следует установить, какую величину выбрать за независимую переменную. В задачах, где выбор может быть сделан не единственным образом, следует остановиться на таком выборе, при котором исследуемая функция оказывается более простой.

610. Разложить число 100 на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

Решение. Обозначим первое число через x. Тогда второе число равно $100-x$. Затем составим функцию $y=x(100-x)$. По условию, аргумент x должен быть таким, чтобы функция приняла максимальное значение, т. е. чтобы произведение в правой части равенства было наибольшим. Поэтому найдем то значение x, при котором функция имеет максимум:

$$y=100x-x^2;\quad y'=100-2x;\quad 100-2x=0;\quad x=50.$$

Найдем вторую производную: $y''=-2$. Так как $y''(50)=-2<0$, то при $x=50$ функция достигает максимума. Значит, первое число $x=50$ и второе $100-x=100-50=50$. Итак, оба числа должны быть одинаковы.

611. Найти число, которое, будучи сложено со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

Решение. Обозначим искомое число через x. Тогда надо найти такое x, при котором функция $y=x+x^2$ имеет минимум. Находим это значение x:

$y'=1+2x;\ 1+2x=0;\ 2x=-1;\ x=-1/2;\ y''=2,\ y''(-1/2)=2>0,$

т. е. при $x=-1/2$ достигается минимум. Итак, искомое число равно $-1/2$.

612. Путь s, пройденный за время t материальной точкой, брошенной вертикально вверх с начальной скоростью v_0, выражается формулой $s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t$, где g — ускорение силы тяжести. Определить высоту наибольшего подъема точки.

Решение. Задача сводится к нахождению наибольшего значения функции $s(t)$. Так как из физических соображений следует, что в начальный и конечный моменты $s=0$ и что в течение всего полета $s>0$, то наибольшее значение s должно совпадать с ее максимумом. Находим производную: $s'=-gt+v_0$; критическая точка есть $t=v_0/g$. При переходе через эту точку s' меняет знак с плюса на минус, т. е. функция имеет максимум. В наличии максимума можно убедиться и с помощью знака второй производной: $s''=-g<0$.

Подставляя значение $t=v_0/g$ в формулу для s, получим высоту наибольшего подъема точки: $s_{\max}=v_0^2/(2g)$.

613. Требуется вырыть силосную яму объемом 32 м^3, имеющую квадратное дно, так чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?

Решение. Пусть сторона дна есть x, тогда площадь дна составит x^2, высота ямы $\frac{32}{x^2}$, а площадь стенки $\frac{x\cdot 32}{x^2}=\frac{32}{x}$. Сумму площадей дна и четырех стенок обозначим через S, т. е.

$$S=x^2+4\frac{32}{x}.$$

Найдем производную S по x:

$$S'=2x-\frac{4\cdot 32}{x^2};\ S'=0;\ x=4.$$

Поскольку $S''=2+\frac{2\cdot 4\cdot 32}{x^3}$, $S''(4)>0$, заключаем, что при $x=4$ функция имеет минимум.

Итак, сторона дна ямы равна 4 м, а высота ямы есть $32/4^2=2$ м.

614. Имеется квадратный лист жести, сторона которого $a=60$ см. Вырезая по всем его углам равные квадраты и загибая оставшуюся часть, нужно изготовить коробку (без крышки). Каковы должны быть размеры вырезаемых квадратов, чтобы коробка имела наибольший объем?

Решение. По условию, сторона квадрата $a=60$. Обозначим сторону вырезаемых по углам квадратов через x. Дном коробки является квадрат со стороной $a-2x$, а высота коробки равна стороне x вырезаемого квадрата. Следовательно, объем коробки выразится функцией

$$V=(a-2x)^2x.$$

Найдем значение x, при котором функция примет наибольшее значение. Для этого сначала преобразуем функцию, а затем исследуем ее на экстремум:

$$V=(a^2-4ax+4x^2)x;\quad V=4x^3-4ax^2+a^2x;$$

$$V'=12x^2-8ax+a^2;\quad 12x^2-8ax+a^2=0;$$

$$x=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-12a^2}}{12}=\frac{4a\pm\sqrt{4a^2}}{12}=\frac{4a\pm 2a}{12};\quad x_1=\frac{a}{2},\ x_2=\frac{a}{6}.$$

Очевидно, что значение $x=a/2$ не отвечает условию, так как в этом случае квадрат был бы разрезан на четыре равные части и никакой коробки не получилось бы. Поэтому исследуем функцию на экстремум в критической точке $x_2=a/6$:

$$V''=24x-8a;\quad V''\left(\frac{a}{6}\right)=24\frac{a}{6}-8a=4a-8a=-4a<0,$$

т. е. при $x=a/6$ достигается максимум. Итак, сторона вырезаемого квадрата должна быть равна $x=a/6$. В данном конкретном случае при $a=60$ см получим $x=10$ см.

615. Из круглого бревна радиуса R требуется вырезать прямоугольную балку максимальной прочности. Известно, что прочность балки прямо пропорциональна произведению ее ширины на квадрат высоты. Какими должны быть размеры балки, чтобы ее прочность была максимальной?

Решение. Обозначим ширину балки через x, ее высоту — через y, а прочность (на изгиб) — через J, имеем $J=kxy^2$, где $k>0$ — коэффициент пропорциональности.

Таким образом, нужно найти максимум функции $J=kxy^2$. Чтобы выразить прочность балки через одну из неизвестных величин, заметим, что $x^2+y^2=4R^2$, откуда $y^2=4R^2-x^2$ и $J=kx(4R^2-x^2)$.

Находим производную и приравниваем ее нулю:

$$J'=4kR^2-3kx^2=0\quad\text{или}\quad k(4R^2-3x^2)=0.$$

Так как $k\neq 0$, то $4R^2-3x^2=0$, откуда $x=\pm 2R/\sqrt{3}$.

По смыслу задачи исследованию подлежит только положительный корень $x=2R/\sqrt{3}$. Поскольку $J''=-6kx<0$ при $x=2R/\sqrt{3}$, заключаем, что при $x=2R/\sqrt{3}$ прочность балки окажется максимальной.

616. Оросительный канал имеет форму равнобочной трапеции, боковые стороны которой равны меньшему основанию. При каком угле наклона боковых сторон площадь сечения канала является наибольшей?

Решение. Обозначим меньшее основание трапеции через a, угол наклона боковых сторон — через α и площадь сечения — через S (рис. 124). По условию, $|AB|=|AD|=|BC|=a$.

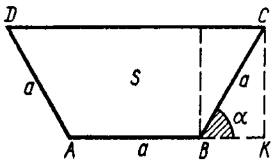

Рис. 124

Из треугольника BCK найдем $|BK|=a\cos\alpha$. Тогда $|CD|=a+2a\cos\alpha$. Высота трапеции равна $|CK|=a\sin\alpha$. Определим площадь трапеции:

$$S=\frac{|AB|+|DC|}{2}|CK|=\frac{a+a+2a\cos\alpha}{2}a\sin\alpha=$$

$$=a^2(1+\cos\alpha)\sin\alpha.$$

Чтобы найти наибольшее значение площади $S=S(\alpha)$, нужно найти критические точки, принадлежащие интервалу $(0, \pi/2)$, вычислить значения функции $S(\alpha)$ в этих точках и на концах интервала $(0, \pi/2)$, а затем из полученных результатов выбрать наибольший.

Найдем производную:

$$S'(\alpha)=a^2((1+\cos\alpha)'\sin\alpha+(1+\cos\alpha)(\sin\alpha)')=$$
$$=a^2(-\sin^2\alpha+\cos\alpha+\cos^2\alpha)=a^2(2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1).$$

Приравняем производную нулю и решим полученное уравнение:

$$2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1=0;\quad \cos\alpha_1=1/2;\quad \cos\alpha_2=-1,$$

откуда $\alpha_1=\pm\pi/3+2\pi n$, $\alpha_2=\pi+2\pi n$. Интервалу $(0, \pi/2)$ принадлежит только критическая точка $\alpha_1=\pi/3$.

Найдем $S(\alpha_1)=S\left(\frac{\pi}{3}\right)=a^2\left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$, $S(0)=0$, $S\left(\frac{\pi}{2}\right)=a^2$. Сравнивая полученные результаты, заключаем, что функция $S(\alpha)$ принимает наибольшее значение при $\alpha=\pi/3$.

Таким образом, площадь сечения канала является наибольшей, если угол наклона боковых сторон равен 60°.

617. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a руб., и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна окажется наиболее экономичным?

Решение. Плавание окажется наиболее экономичным, если затраты на 1 км пути будут наименьшими. Из условия вытекает, что за сутки расходы составят $a+kv^3$ (k — коэффициент пропорциональности); при этом за сутки пути судно пройдет $24v$ км. Следовательно, расходы на 1 км пути составят

$$P=\frac{a+kv^3}{24v}.$$

Эта функция при $v=0$ имеет бесконечный разрыв, но нулевая скорость для нас не представляет интереса.

Найдем производную: $P'_v=\frac{2kv^3-a}{24v^2}$. Критическое значение v получим, решая уравнение $P'_v=0$, т. е. $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$. При переходе через это значение P' меняет знак с минуса на плюс; следовательно, функция имеет минимум.

Итак, наиболее экономичная скорость плавания есть $v=\sqrt[3]{\frac{a}{2k}}$.

618. Разложить число a на два слагаемых так, чтобы их произведение было наибольшим.

619. Найти такое число, чтобы разность между этим числом и его квадратом была наибольшей.

620. Найти такое число, чтобы разность между этим числом и квадратным корнем из него была наименьшей.

621. Окно имеет форму прямоугольника, завершенного полукругом. Периметр окна равен a. Каковы должны быть размеры окна, чтобы оно пропускало наибольшее количество света?

622. Тело движется по закону $s=18t+9t^2-t^3$. Найти его максимальную скорость.

623. Количество Q вещества, получающегося в процессе химической реакции, выражается формулой $Q=3+9t^2-t^3$, где t — время. Найти максимальную скорость реакции.

624. Прилегающую к дому прямоугольную площадку нужно оградить решеткой длиной 120 м. Определить размеры площадки, так чтобы она имела наибольшую площадь.

625. Определить размеры открытого бассейна объемом 256 м^3, имеющего квадратное дно, так чтобы на облицовку его стен и дна было израсходовано наименьшее количество материала.

626. Какой из равнобедренных треугольников с заданным периметром $2p$ имеет наибольшую площадь?

627. Найти отношение высоты к диаметру конуса, имеющего при заданном объеме наименьшую боковую поверхность.

628. Из всех цилиндров с площадью полной поверхности $S=48\pi$ см^2 найти тот, который имеет наибольший объем.

6. Вогнутость и выпуклость. Точки перегиба

Чтобы исследовать более подробно особенности поведения функции, введем понятия вогнутости и выпуклости и точек перегиба графика функции. Рассмотрим кривые, изображенные на рис. 125.

Будем предполагать, что линия, заданная уравнением $y=f(x)$, имеет в точке $(a;\ f(a))$ касательную, не параллельную оси ординат.

Определение 3. Кривая называется *выпуклой* в точке $x=a$, если в некоторой окрестности этой точки она расположена под своей касательной в точке $(a;\ f(a))$.

Кривая называется *вогнутой* в точке $x=a$, если в некоторой окрестности этой точки она расположена над своей касательной в точке $(a;\ f(a))$.

Кривая выпукла (соответственно вогнута) в некотором промежутке, если она выпукла (вогнута) во всех точках этого промежутка.

Промежутки выпуклости и вогнутости кривой можно находить с помощью производной.

▲ **Теорема 5** (признак вогнутости и выпуклости). *Если вторая производная функции $y=f(x)$ в данном промежутке положительна, то кривая вогнута в этом промежутке, а если отрицательна — выпукла в этом промежутке.*

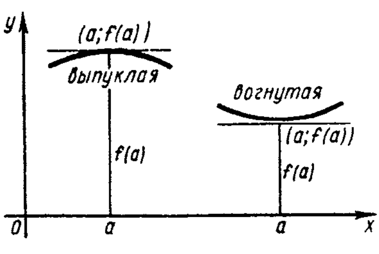

Рис. 125

Не проводя строгого доказательства, ограничимся лишь геометрическими соображениями, иллюстрирующими справедливость этой теоремы. Если

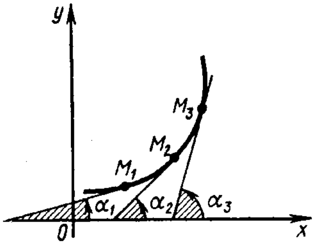

Рис. 126

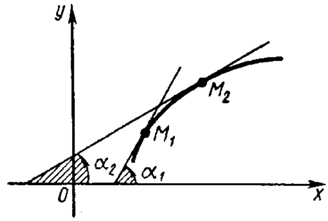

Рис. 127

$f''(x)=(f'(x))'>0$, то $f'(x)$ — возрастающая функция. Следовательно, проведя касательные к графику функции в точках M_1, M_2, ... (рис. 126), получим, что тангенсы углов α_1, α_2, ... растут вместе с ростом x: $\operatorname{tg}\alpha_1<\operatorname{tg}\alpha_2<...$, т. е. функция $y'=\operatorname{tg}\alpha$ возрастает, поэтому ее производная $(y')'=y''$ положительна. А это означает, что графиком функции $f(x)$ является вогнутая кривая.

Аналогично можно показать, что из условия $f''(x)<0$ в некотором промежутке следует выпуклость кривой в этом промежутке (рис. 127).

Для нахождения интервалов выпуклости графика функции используют следующее правило:

1^0. Находят вторую производную функции и точки, в которых она равна нулю или не существует.

2^0. Определяют интервалы, на которые область определения функции разбивается найденными точками.

3^0. Устанавливают знаки второй производной в каждом из указанных интервалов. Если $f''(x)<0$, то в рассматриваемом интервале кривая выпукла; если $f''(x)>0$ — вогнута.

629. Исследовать на выпуклость и вогнутость кривую $y=x^2-x$.

Решение. 1^0. Найдем вторую производную: $y'=2x-1$; $y''=2$.

2^0. Так как вторая производная положительна для любого x, то кривая вогнута на всей области определения $(-\infty, \infty)$.

630. Определить промежутки выпуклости кривой $y=x^3$.

Решение. 1^0. Найдем вторую производную: $y'=3x^2$; $y''=6x$. Она равна нулю в точке $x=0$.

2^0. Точка $x=0$ разбивает область определения функции на интервалы $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

3^0. Условием выпуклости кривой является $f''(x)<0$. Тогда $6x<0$, $x<0$, т. е. кривая выпукла в интервале $(-\infty, 0)$.

631. Найти промежутки выпуклости и вогнутости кривой $y=x^4-2x^3+36x^2-x+7$.

Решение. 1^0. Найдем вторую производную:

$$y'=4x^3-6x^2+72x-1;\quad y''=12x^2-12x+72=12(x+2)(x-3);\quad y''=0$$
$$\text{при } x_1=-2 \text{ и } x_2=3.$$

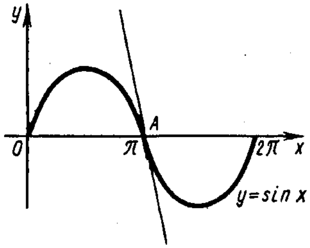

Рис. 128

2^0. Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -2)$, $(-2, 3)$ и $(3, \infty)$.

3^0. В промежутке $(-\infty, -2)$ кривая вогнута, так как везде в этом промежутке $y''>0$; в промежутке $(-2, 3)$ — выпукла, так как $y''<0$; в промежутке $(3, \infty)$ — вогнута $(y''>0)$.

632—635. Исследовать функции на выпуклость и вогнутость:

632. $y = x^3 - 3x^2 - 18x + 7$. **633.** $y=(x-1)(x-2)(x-3)$.

634. $y=(x-1)^4(3x+7)$. **635.** $y = \frac{x^2+4}{x}$.

Как мы уже отмечали, иногда кривая в одной своей части выпукла, а в другой вогнута; так, например, часть синусоиды (рис. 128) выпукла выше оси Ox и вогнута ниже оси Ox, причем точка A служит границей между ними. Касательная, проведенная к кривой в этой точке, является общей для ее выпуклой и вогнутой части; эта касательная в то же время пересекает кривую в точке касания; поэтому синусоида в точке A ни выпукла, ни вогнута. Эта точка носит название точки перегиба.

Точкой перегиба кривой называется такая точка, которая отделяет выпуклую часть кривой от вогнутой.

▲ **Теорема 6** (признак существования точки перегиба). *Если вторая производная $f''(x)$ непрерывна и меняет знак при переходе через $x = x_0$, то $(x_0;\ f(x_0))$ является точкой перегиба кривой $y = f(x)$.*

Замечание. Так как $f''(x)$ непрерывна и в точке $x = x_0$ меняет знак, то при $x = x_0$ вторая производная равна нулю. Точки, в которых вторая производная данной функции обращается в нуль, принято называть *критическими точками* II рода. Возможны случаи, когда вторая производная в точке перегиба не существует, но мы их не рассматриваем.

Доказательство. Пусть, например, $f''(x_0)=0$ в точке x_0 и $f''(x)$ знак меняет с плюса на минус. Это означает, что слева от x_0 кривая вогнута, а справа — выпукла, т. е. точка x_0 отделяет область вогнутости от выпуклости и является точкой перегиба.

Из признака существования точки перегиба следует правило ее нахождения:

1^0. Находят вторую производную исследуемой функции $f(x)$.

2^0. Находят все критические точки II рода из области определения функции.

3^0. Устанавливают знаки второй производной функции при переходе через критические точки II рода. Изменение знака $f''(x)$ указывает на наличие точки перегиба.

4^0. Находят ординаты точек перегиба.

636. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривую $f(x)=x^3-3x^2+5$.

Решение. 1^0. Определяем первую и вторую производные: $f'(x)=$ $=3x^2-6x$; $f''(x)=6x-6=6(x-1)$.

2^0. Из уравнения $f''(x)=0$ имеем $6(x-1)=0$, т. е. $x=1$ — критическая точка II рода.

3^0. Если $x<1$, то $f''(x)<0$ и в промежутке $(-\infty, 1)$ кривая выпукла. Если $x>1$, то $f''(x)>0$ и в промежутке $(1, \infty)$ кривая вогнута, а $x=1$ — абсцисса точки перегиба.

4^0. При $x=1$ получим $f(1)=3$, т. е. $M(1; 3)$ — точка перегиба.

637. Исследовать на выпуклость, вогнутость и точки перегиба кривую $y=x^3-6x^2+4$.

Решение. 1^0. $y'=3x^2-12x$; $y''=6x-12$.

2^0. Из уравнения $6x-12=0$ находим $x=2$.

3^0. Если $x<2$, то $y''<0$; следовательно, в интервале $(-\infty, 2)$ кривая выпукла. Если $x>2$, то $y''>0$; значит, в интервале $(2, \infty)$ кривая вогнута.

Итак, при переходе через $x=2$ вторая производная $y''(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, кривая имеет точку перегиба, абсцисса которой равна 2.

4^0. Подставляя в уравнение кривой $x=2$, найдем ординату точки перегиба: $y=2^3-6\cdot 2^2+4=-12$. Итак, $(2; -12)$ — точка перегиба.

638. Найти точки перегиба кривой $y=\dfrac{8}{x^2+4}$.

Решение. 1^0. $y'=-\dfrac{16x}{(x^2+4)^2}$; $y''=-\dfrac{16(x^2+4)^2-2(x^2+4)2x\cdot 16x}{(x^2+4)^4}=$
$=\dfrac{16(x^2+4)-64x^2}{(x^2+4)^3}=\dfrac{48x^2-64}{(x^2+4)^3}$.

2^0. $\dfrac{48x^2-64}{(x^2+4)^3}=0$, отсюда $48x^2-64=0$, $x^2=\dfrac{4}{3}$, $x_{1,2}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $x_1=$ $=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $x_2=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

3^0. Исследуем значение $x_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Если $x<\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, например $x=0$, то $y''=\dfrac{-64}{64}=-1<0$; если $x>\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, например $x=2$, то $y''=\dfrac{48\cdot 4-64}{8^3}>0$.
Итак, при $x_1=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ имеем точку перегиба.

Исследуем значение $x_2=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Если $x<-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, например $x=-2$, то $y''=\dfrac{128}{512}>0$; если $x>-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, например $x=0$, то $y''=-1<0$. Значит, при $x=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ также имеем точку перегиба.

4^0. Находим

$$y_1=\frac{8}{(2/\sqrt{3})^2+4}=\frac{3}{2},\quad y_2=\frac{8}{(-2/\sqrt{3})^2+4}=\frac{3}{2}.$$

Следовательно, $(2/\sqrt{3}; 3/2)$ и $(-2/\sqrt{3}; 3/2)$ — точки перегиба.

639. Исследовать функцию $y=x^3-3x^2-9x+11$ на максимум, минимум и точку перегиба.

Решение. Найдем первую и вторую производные:

$$f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3); \quad f''(x)=6x-6.$$

Приравняем первую производную нулю. Из уравнения $x^2-2x-3=0$ находим $x_1=-1$, $x_2=3$. Подставив эти значения во вторую производную, получим $f''(-1)=-12<0$, $f''(3)=12>0$. Следовательно, при $x=-1$ функция имеет максимум, а при $x=3$ — минимум.

Найдем ординаты точек максимума и минимума: $f(-1)=-1-3+9+11=16$, $f(3)=-16$. Таким образом, $A(-1;\ 16)$ точка максимума, $B(3,\ -16)$ — точка минимума.

Приравняем вторую производную нулю. Имеем $f''(x)=6x-6=0$, откуда $x=1$. Определим знак $f''(x)$ в интервалах $(-\infty, 1)$ и $(1, \infty)$: $f''(0)=-6<0$, $f''(2)=6>0$. Следовательно, при $x=1$ график имеет точку перегиба. Найдем ординату точки перегиба: $f(1)=1-3-9+11=0$. Итак, $C(1;\ 0)$ — точка перегиба данной кривой.

640—643. Исследовать на вогнутость, выпуклость и точки перегиба функции:

640. $y=x^3-3x^2+1$. **641.** $y=x^{5/3}+x$.

642. $y=-x^3+3x^2$. **643.** $y=x^4-6x^2+5$.

7. Построение графиков функций

При построении графиков функций с помощью производных полезно придерживаться такого плана:

1^0. Находят область определения функции и определяют точки разрыва, если они имеются.

2^0. Выясняют, не является ли функция четной или нечетной; проверяют ее на периодичность.

3^0. Определяют точки пересечения графика функции с координатными осями, если это возможно.

4^0. Находят критические точки функции.

5^0. Определяют промежутки монотонности и экстремумы функции.

6^0. Определяют промежутки вогнутости и выпуклости кривой и находят точки перегиба.

7^0. Используя результаты исследования, соединяют полученные точки плавной кривой. Иногда для большей точности графика находят несколько дополнительных точек; их координаты вычисляют, пользуясь уравнением кривой.

Этот план исследования функции и построения ее графика является примерным, его не всегда надо придерживаться пунктуально: можно менять порядок пунктов, некоторые совсем опускать, если они не подходят к данной функции. В частности, если нахождение точек пересечения с осями координат связано с большими трудностями, то это можно не делать; если выражение для второй производной окажется очень сложным, то можно ограничиться построением графика на основании результатов исследования первой производной; если функция — четная, то ее график симметричен относительно оси Oy, поэтому достаточно построить график для положительных значений аргумента, принадлежащих области определения функции, и т. п.

644—674. Исследовать функции и построить их графики:

644. $f(x)=x^2+2x-3$.

Решение. 1^0. Функция определена на интервале $(-\infty, \infty)$. Точек разрыва нет.

2^0. Имеем $f(-x)=(-x)^2+2(-x)-3=x^2-2x-3$. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3^0. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат. Если $y=0$, то $x^2+2x-3=0$, откуда $x=-1\pm\sqrt{1+3}=-1\pm 2$, т. е. $x_1=-3$, $x_2=1$. Значит, кривая пересекает ось абсцисс в точках $(-3; 0)$ и $(1; 0)$. Если $x=0$, то из равенства $y=x^2+2x-3$ следует $y=-3$, т. е. кривая пересекает ось ординат в точке $(0; -3)$.

4^0. Найдем критические точки функции. Имеем $y'=2x+2$; $2x+2=0$; $2(x+1)=0$; $x=-1$.

5^0. Область определения функции разделится на промежутки $(-\infty, -1)$ и $(-1, \infty)$. Знаки производной $f'(x)$ в каждом промежутке можно найти непосредственной подстановкой точки из рассматриваемого промежутка. Так, $f'(-2)=-2<0$, $f'(2)=2>0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty, -1)$ функция убывает, а в промежутке $(-1, \infty)$ — возрастает. При $x=-1$ функция имеет минимум, равный $f(-1)=$ $=f_{\min}=(-1)^2+2(-1)-3=1-2-3=-4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	$f_{\min}=-4$	$\nearrow$

6^0. Находим $f''(x)=2$, т. е. $f''(x)>0$. Следовательно, кривая вогнута на всей области определения и не имеет точек перегиба.

7^0. Построим все найденные точки в прямоугольной системе координат и соединим их плавной линией (рис. 129).

645. $y=x^3-12x+4$.

Решение. 1^0. Область определения $(-\infty, \infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2^0. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)\neq f(x)$ и $f(-x)\neq -f(x)$.

3^0. Если $x=0$, то $y=4$, т. е. график функции пересекает ось ординат в точке $(0, 4)$.

4^0. Имеем $y'=0$, $y'=3x^2-12$, $3x^2-$ $-12=0$, $3(x+2)(x-2)=0$; $x_1=-2$, $x_2=2$ — критические точки функции.

5^0. Исследуем функцию на монотон-

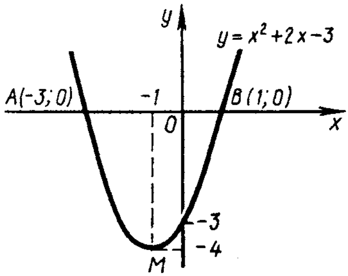

Рис. 129

ность и экстремум. Ее область определения разделится на промежутки $(-\infty, -2)$, $(-2, 2)$ и $(2, \infty)$. Имеем $y'_{x=-3}=3(-3)^2-12=15>0$, $y'_{x=0}=-12<0$, $y'_{x=3}=3\cdot 3^2-12=15>0$. Значит, в промежутках $(-\infty, -2)$ и $(2, \infty)$ функция возрастает, а в промежутке $(-2, 2)$ — убывает. При $x=-2$ функция имеет максимум: $y_{x=-2}=(-2)^3-12(-2)+4=-8$, а при $x=2$ — минимум: $y_{x=2}=2^3-12\cdot 2+4=-12$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 2)$	2	$(2, \infty)$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	$y_{max}=20$	↘	$y_{min}=-12$	↗

6^0. Находим $y''=(3x^2-12)'=6x$; $6x=0$; $x=0$. Определим знаки второй производной слева и справа от точки $x=0$: $y''_{x=-1}=-6<0$; $y''_{x=1}=6>0$. Следовательно, в промежутке $(-\infty, 0)$ кривая выпукла, а в промежутке $(0, \infty)$ — вогнута. При $x=0$ имеем точку перегиба; ее ордината $y=0-12\cdot 0+4=4$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0; \infty)$
y''	$-$	0	$+$
y	Выпукла	Точка перегиба (0; 4)	Вогнута

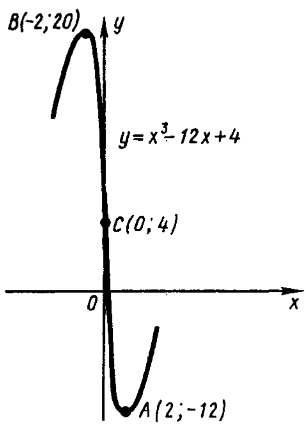

Рис. 130

7^0. Кривая изображена на рис. 130.

646. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2$.

Решение. 1^0. Область определения функции — интервал $(-\infty, \infty)$. Точек разрыва нет.

2^0. Здесь $f(-x)=f(x)$, так как x входит только в четных степенях. Следовательно, функция четная и ее график симметричен относительно оси Oy.

3^0. Чтобы определить точки пересечения графика с осью ординат, полагаем $x=0$, тогда $y=0$. Значит, кривая пересекает ось Oy в точке (0; 0).

Чтобы определить точки пересечения графика с осью абсцисс, полагаем $y=0$:

$$\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2=0;\ x^4-6x^2=0;$$

$$x^2(x^2-6)=0.$$

Отсюда $x^2=0$, $x_{1,2}=0$, т. е. две точки пересечения слились в одну точку касания; кривая в точке (0; 0) касается оси Ox. Далее, имеем $x^2-6=0$, т. е. $x_{3,4}=\pm\sqrt{6}\approx\pm2{,}45$.

Итак, в начале координат O (0; 0) кривая пересекает ось Oy и касается оси Ox, а в точках A (—2,45; 0) и B (2,45; 0) пересекает ось Ox.

4⁰. Найдем критические точки функции:

$$y'=x^3-3x;\ x^3-3x=0;\ x(x^2-3)=0;\ x_1=0;\ x^2-3=0;$$
$$x_{2,3}=\pm\sqrt{3}\approx\pm1{,}7.$$

Эти точки разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, 0)$, $(0, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, \infty)$.

5⁰. Исследуем критические точки с помощью второй производной. Находим $y''=3x^2-3$. При $x=0$ получим $y''_{x=0}=-3$, т. е. $y_{max}=0$, и, значит, O (0; 0) — точка максимума. Далее при $x=\sqrt{3}$ имеем $y''_{x=\sqrt{3}}=6$, т. е. $y_{min}=\frac{1}{4}(\sqrt{3})^4-\frac{3}{2}(\sqrt{3})^2=-2{,}25$. Таким образом, $D(\sqrt{3};\ -2{,}25)$ — точка минимума, а вследствие симметрии минимум достигается также в точке $C(-\sqrt{3};\ -2{,}25)$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3}, 0)$	0	$(0, \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3}, \infty)$
y'	—	0	+	0	—	0	+
y	↘	$y_{min}=-2{,}25$	↗	$y_{max}=0$	↘	$y_{min}=-2{,}25$	↗

6⁰. Имеем $y''=3(x^2-1)=0$, $3(x-1)(x+1)=0$, $x_{1,2}=\pm1$. Точки $x=-1$ и $x=1$ разбивают область определения функции на интервалы $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ имеем $y''>0$, т. е. здесь кривая вогнута, а в интервале $(-1, 1)$ имеем $y''<0$, т. е. здесь она выпукла. При $x=-1$ и $x=1$ получаем точки перегиба E и F, ординаты которых одинаковы: $y(-1)=y(1)=-1{,}25$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
y''	+	0	—	0	+
y	Вогнута	Точка перегиба (—1;—1,25)	Выпукла	Точка перегиба (1; 1,25)	Вогнута

7⁰. График изображен на рис. 131.

647. $y=e^{-x^2}$.

Решение. 1⁰. Функция определена и непрерывна на интервале $(-\infty, \infty)$.

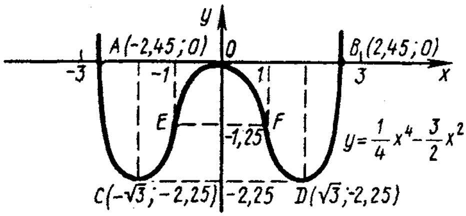

Рис. 131

2^0. Функция четная, так как $f(-x)=f(x)$. Ее график симметричен относительно оси ординат.

3^0. Если $x=0$, то $y=e^{-x^2}=e^0=1$, т. е. график функции пересекает ось ординат в точке (0; 1).

Ось абсцисс график функции не пересекает, так как равенство $e^{-x^2}=0$ ни при каких значениях x не выполняется.

4^0. Найдем критические точки функции. Имеем $y'=e^{-x^2}(-x^2)'=$ $=-2xe^{-x^2}$. Из уравнения $-2xe^{-x^2}=0$ следует, что $x=0$ — единственная критическая точка.

5^0. Точка $x=0$ делит область определения функции на промежутки $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$.

Так как $y'_{x=-1}=-2(-1)e^{-1}=2/e>0$, $y'_{x=1}=-2\cdot 1\cdot e^{-1}=-2/e<0$, то в промежутке $(-\infty, 0)$ функция возрастает, а в промежутке $(0, \infty)$ — убывает. При $x=0$ она имеет максимум, равный 1.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	+	0	—
y	↗	$y_{\max}=1$	↘

6^0. Находим

$$y''=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=4e^{-x^2}\left(x^2-\frac{1}{2}\right)=4e^{-x^2}\left(x+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

откуда $y''=0$ при $x=\pm\sqrt{2}/2\approx\pm 0{,}7$. В интервалах $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ и $(\sqrt{2}/2, \infty)$ имеем $y''>0$, т. е. кривая вогнута, а в интервале $(-\bar{2}/2, \sqrt{2}/2)$ $y''<0$, т. е. кривая выпукла. Точки $A(-\sqrt{2}/2; 1/\sqrt{e})$ и $B(\sqrt{2}/2; 1/\sqrt{e})$ являются точками перегиба.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, \sqrt{2}/2)$	$-\sqrt{2}/2$	$(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$	$\sqrt{2}/2$	$(\sqrt{2}/2, \infty)$
y''	+	0	—	0	+
y	Вогнута	Точка перегиба $(-\sqrt{2}/2; 1/\sqrt{e})$	Выпукла	Точка перегиба $(\sqrt{2}/2; 1/\sqrt{e})$	Вогнута

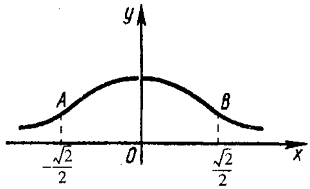

Рис. 132

7^0. График изображен на рис. 132.

648. $y=\ln(x^2+1)$.

Решение. 1^0. Область определения $(-\infty, \infty)$. Точек разрыва нет, поскольку $x^2+1>0$ при любом действительном x.

2^0. Так как $y(-x)=\ln((-x)^2+1)=\ln(x^2+1)=y(x)$, то функция четная; ее график симметричен относительно оси ординат.

3^0. Если $x=0$, то $y=\ln 1=0$, а если $y=0$, то $\ln(x^2+1)=0$, откуда $x^2+1=1$, т. е. $x=0$. Это значит, что график функции пересекает оси координат в единственной точке — начале координат.

4^0. Найдем критические точки функции. Имеем $y'=\frac{1}{x^2+1}\cdot(x^2+1)'=$ $=\frac{2x}{x^2+1}$; $\frac{2x}{x^2+1}=0$; т. е. $x=0$ — критическая точка.

5^0. Точка $x=0$ разбивает область определения функции на два интервала $(-\infty, 0)$ и $(0, \infty)$. Так как $f'_{x<0}<0$, $f'_{x>0}>0$, то в первом из них функция убывает, во втором — возрастает, причем при $x=0$ она достигает минимума: $y_{\min}=y_{x=0}=0$.

Составим таблицу:

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, \infty)$
y'	$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$y_{\min}=0$	$\nearrow$

6^0. Находим

$$y''=\frac{(2x)'(x^2+1)-(x^2+1)'2x}{(x^2+1)^2}=\frac{2(x^2+1)-2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=$$

$$=\frac{2x^2-2-4x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

Точки $x=-1$ и $x=1$ разбивают область определения функции на три интервала: $(-\infty, -1)$, $(-1, 1)$ и $(1, \infty)$. В интервалах $(-\infty, -1)$ и $(1, \infty)$ имеем $y''<0$, т. е. здесь кривая выпукла, а в интервале $(-1, 1)$ имеем $y''>0$, т. е. здесь кривая вогнута. При $x=-1$ и $x=1$ получаем точки перегиба A и B; при этом $y(-1)=y(1)=\ln 2$.

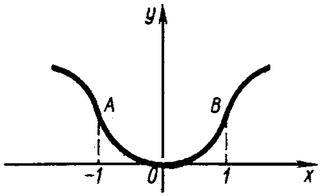

Рис. 133

Составим таблицу:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
y''	$-$	0	$+$	0	$-$
y	Выпукла	Точка перегиба $(-1; \ln 2)$	Вогнута	Точка перегиба $(1; \ln 2)$	Выпукла

7⁰. График изображен на рис. 133.

649. $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}$.

Решение. 1⁰. Функция определена на всей оси Ox, за исключением точек $x=\sqrt{3}$ и $x=-\sqrt{3}$, в которых функция имеет разрыв.

2⁰. Функция нечетная, так как $f(-x)=-f(x)$. Ее график симметричен относительно начала координат. В связи с этим можно исследовать функцию только для точек справа от оси ординат.

3⁰. Если $x=0$, то $y=0$, т. е. график функции проходит через начало координат. Других точек пересечения графика с осями координат нет.

4⁰. Находим

$$y'=\frac{(x^3)'(3-x^2)-(3-x^2)'x^3}{(3-x^2)^2}=\frac{3x^2(3-x^2)+2x\cdot x^3}{(3-x^2)^2}=$$

$$=\frac{9x^2-3x^4+2x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}=\frac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}.$$

Из уравнения $x^2(9-x^2)=0$ получим (при условии $x\geqslant 0$) $x_1=0$, $x_2=3$.

5⁰. Производная может менять знак при прохождении через эти точки и через эту точку разрыва функции $x=\sqrt{3}$, в которой производная не существует.

Так как $x^2\geqslant 0$ и $(3-x^2)^2\geqslant 0$, то знак производной определяется знаком разности $9-x^2$. Поэтому при $0<x<\sqrt{3}$ и $\sqrt{3}<x<3$ имеем $y'>0$; следовательно, y возрастает в этих промежутках; при $x>3$ имеем $y'<0$; значит, y убывает в этом промежутке. Итак, в точке $x=3$ функция имеет максимум, равный $y_{\max}=f(3)=-9/2$.

Составим таблицу для рассматриваемой части области определения:

x	$(0, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, 3)$	3	$(3, \infty)$
y'	$+$	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$\nearrow$	$y_{\max}=-9/2$	$\searrow$

6^0. Находим

$$y''=\left(\frac{9x^2-x^4}{(3-x^2)^2}\right)'=\frac{(9x^2-x^4)'(3-x^3)^2-(9x^2-x^4)((3-x^2)^2)'}{(3-x^2)^4}=$$

$$=\frac{(18x-4x^3)(3-x^2)^2-(9x-x^4)2(3-x^2)(-2x)}{(3-x^2)^4}=$$

$$=\frac{2x(9-2x^2)(3-x^2)+2x(18x^2-2x^4)}{(3-x^2)^3}=$$

$$=\frac{2x(27-9x^2-6x^2+2x^4+18x^2-2x^4)}{(3-x^2)^3}=\frac{2x(27+3x^2)}{(3-x^2)^3}=\frac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}.$$

Очевидно, что $y''=0$ только при $x=0$; кроме того, y'' не существует при $x=\sqrt{3}$ (напомним, что мы рассматриваем значения $x\geqslant 0$).

В интервале $(0, 1/\sqrt{3})$ имеем $y''>0$, т. е. кривая вогнута, а в интервале $(1/\sqrt{3}, \infty)$ имеем $y''<0$, т. е. кривая выпукла.

Вследствие симметрии графика относительно начала координат заключаем, что $y''>0$ в интервале $(-\sqrt{3}, 0)$ и $y''>0$ в интервале $(-\infty, -\sqrt{3})$. Это означает, что $(0, 0)$ — точка перегиба.

7^0. График изображен на рис. 134.

650. $y=\dfrac{\sin^2 x}{2+\sin x}$.

Р е ш е н и е. 1^0. Область определения $(-\infty, \infty)$. Функция непрерывна во всей области определения.

2^0. Функция не является ни четной, ни нечетной, так как $f(-x)=$ $=\dfrac{\sin^2 x}{2-\sin x}$ и $f(-x)\neq f(x)$, $f(-x)\neq -f(x)$.

Функция имеет период 2π. Учитывая это, проведем ее исследование и построим график только в пределах одного периода, например, на промежутке $[0, 2\pi]$. Затем, пользуясь периодичностью функции, продолжим график на всю область определения.

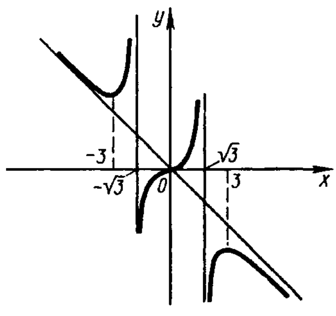

Рис. 134

3^0. Из уравнения $\dfrac{\sin^2 x}{2+\sin x}=0$ находим, что кривая пересекает ось абсцисс при $x=0$, π, 2π. С осью ординат кривая пересекается в начале координат.

4^0. Находим производную:

$$y'=\frac{(2+\sin x)\cdot 2\sin x\cos x-\sin x^2\cos x}{(2+\sin x)^2}=$$

$$=\frac{\sin x\cos x(4+\sin x)}{(2+\sin x)^2}.$$

Из уравнения $\frac{\sin x \cos x(4+\sin x)}{(2+\sin x)^2}=0$ следует, что $\sin x \cos x=0$ (так как $4+\sin x \neq 0$). Последнее равенство в пределах промежутка $[0, 2\pi]$ имеет место при $x=0$, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π. Других критических точек нет.

5⁰. Найденные точки делят промежуток $[0, 2\pi]$ на интервалы $(0, \pi/2)$, $(\pi/2, \pi)$, $(\pi, 3\pi/2)$ и $(3\pi/2, 2\pi)$. Результаты исследования знака производной в этих интервалах и значения функции в точках экстремума сведем в таблицу:

x	0	$(0, \pi/2)$	$\pi/2$	$(\pi/2, \pi)$	π	$(\pi, 3\pi/2)$	$3\pi/2$	$(3\pi/2, 2\pi)$	2π
y'	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0
y	$y_{\min}=0$	$\nearrow$	$y_{\max}=\frac{1}{3}$	$\searrow$	$y_{\min}=0$	$\nearrow$	$y_{\max}=1$	$\searrow$	$y_{\min}=0$

6⁰. Построим график, не исследуя вогнутости и выпуклости кривой. Из рис. 135 видно, что в каждом из исследуемых интервалов имеется точка перегиба. Вычислив y'' и приравняв ее нулю, можно определить точное положение этих точек.

651. $y=8-2x-x^2$.

652. $y=x^3-3x^2+4$.

653. $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2$.

654. $f(x)=x^3-3x$.

655. $y=4x^2-x^4-3$.

656. $f(x)=x^4-2x^2+3$.

657. $y=\frac{1}{2}x^4-3x^2+2$.

658. $f(x)=1-\frac{5}{2}x^2-x^5$.

659. $y=\frac{4x^3-x^4}{5}$.

660. $y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3-x^2$.

661. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

662. $y=\frac{1}{1+x^2}$.

663. $f(x)=\frac{1}{3}-4x+2{,}5x^2-\frac{1}{3}x^3$.

664. $y=3-3x+x^3$.

665. $y=\frac{2x^2}{1+x^2}$.

666. $f(x)=\frac{1}{6}x^3-2x$.

667. $y=2x^3-6x$.

668. $y=\frac{1}{9}x(x-4)^3$.

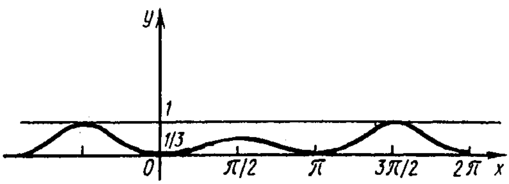

Рис. 135

669. $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

670. $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$.

671. $y=\frac{x}{9+x^2}$.

672. $y=\frac{3x^2}{x^2+1}$.

673. $y=-\frac{1}{3}x^3+3{,}5x^2-10x-\frac{1}{3}$.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Какие величины называются постоянными и переменными? Приведите примеры абсолютно-постоянных величин.

2. Что называется интервалом и отрезком? Какие виды промежутков вы еще знаете?

3. Дайте определение функции и приведите примеры функциональной зависимости.

4. Как определить частное значение функции? Проверьте, правильно ли вычислено $f(2)=5$, если $f(x)=x^3-x+1$?

5. Что называется областью определения функции? Проверьте правильность найденной области определения $[5, \infty)$ для функции $y=\sqrt{x-5}$ и $(-1{,}5; \infty)$ для функции $y=\lg(2x+3)$.

6. Какие существуют способы задания функции? Перечислите преимущества и недостатки каждого.

7. Дайте определения возрастающей и убывающей функции. Приведите примеры.

8. Какая функция называется сложной? Приведите примеры.

9. Перечислите виды основных элементарных функций, запишите их математические выражения, изобразите их графически.

10. Дайте определение предела переменной величины. Перечислите свойства пределов.

11. Как прочитать запись $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$? Дайте определение предела функции в точке.

12. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции? Найдите приращение аргумента x и приращение функции $y=x^3$ при изменении аргумента от 1 до 2.

13. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает? Определите интервалы непрерывности функции $f(x)=\frac{1}{x+2}$.

14. Дайте определение предела функции на бесконечности. Объясните основной метод раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ на примере вычисления предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-x^2+5x}{x^3+2x-3}$.

15. Сформулируйте и запишите первый и второй замечательные пределы.

16. Как найти мгновенную скорость прямолинейного неравномерного движения?

17. Как вычислить угловой коэффициент касательной к кривой в данной точке?

18. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.

19. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.

20. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?

21. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?

22. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.

23. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?

24. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?

25. В чем заключается механический смысл производной?

26. Что называется производной второго порядка и каков ее механический смысл?

27. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?

28. Чем можно оправдать, что при малых значениях Δx приращение функции приближенно равно ее дифференциалу? Что выражает геометрически формула $\Delta y \approx dy$?

29. Найдите с помощью дифференциала приближенное значение $\cos 60°20'$.

30. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. Каковы знаки приращений аргумента и функции в интервалах возрастания и убывания? В чем заключается признак возрастания и убывания функции?

31. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.

32. Как отыскивают экстремумы функций с помощью второй производной? Почему в точке максимума вторая производная отрицательна, а в точке минимума — положительна?

33. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?

34. Как ищется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке? Найдите эти значения для функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ на отрезке $[-1, 4]$.

35. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?

36. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.

37. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

Ответы

4. Нет, так как $f(2) = 2^3 - 2 + 1 = 7$. **5.** Правильно. **12.** $\Delta x = 1$, $\Delta y = 7$. **13.** $(-\infty, -2) \cup (-2, \infty)$. **14.** 2. **29.** $\cos 60°20' \approx 0{,}495$. **34.** $y_{\text{наиб}} = 17$ при $x = 4$, $y_{\text{наим}} = -3$ при $x = -1$ и $x = 2$.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите область определения функции $y = \sqrt{4x - x^2 - 3}$.

2. Найдите производную функции $y = \sin^2 5x$.

3. Исследуйте на экстремум функцию $y = 2x^2 - x + 5$.

4. Найдите приближенное значение приращения функции $y = 2x^3 + 5$ при изменении аргумента от $x_1 = 3$ до $x_2 = 3{,}01$

5. Определите наименьшее и наибольшее значения функции $y = 1 - 2x - x^2$ на отрезке $[-2, 2]$.

Вариант 2

1. Найдите область определения функции

$$y=\frac{1}{\sqrt{2+x-x^2}}+\lg(2x-1).$$

2. Найдите производную функции $f(x)=\frac{\cos 2x}{\cos x-\sin x}$ в точке $x=\frac{\pi}{4}$.

3. Исследуйте на экстремум функцию $y=x^3-6x^2$.

4. Найдите приближенное значение функции $f(x)=5x^3-2x+3$ при $x=1{,}02$.

5. Исследуйте функцию $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+1$ и постройте ее график.

Ответы

Вариант 1. 1. $[1, 3]$. 2. $5\sin 10x$. 3. $y_{\min}=y(1/4)=39/8$. 4. 0,54. 5. $y_{\text{наиб}}=y(-1)=2$; $y_{\text{наим}}=y(2)=-7$. Вариант 2. 1. $(1/2,\ 2)$. 2. $f'(x)=\cos x-\sin x$, $f'(\pi/4)=0$. 3. $y_{\max}=y(0)=0$, $y_{\min}=y(4)=-32$. 4. 6,26.