Глава III

Векторы и координаты

§ 1. Векторы и действия над ними

Векторные величины. Понятие вектора
Действия над векторами
Разложение вектора в базисе
Декартова система координат

1. Векторные величины. Понятие вектора

Некоторые физические величины (сила, скорость, ускорение) характеризуются не только числовым значением, но и направлением. Например, чтобы охарактеризовать движение тела в данный момент, недостаточно указать скорость движения, а нужно еще указать направление движения тела, т. е. направление скорости. Таким образом, скорость является векторной величиной. Другими примерами векторных величин могут служить сила притяжения, центробежное ускорение и т. п.

Если на некотором отрезке задано начало отрезка и его конец, то такой отрезок называется *направленным*.

Любой направленный отрезок называется *вектором*.

Вектор, заданный парой несовпадающих точек A и B, обозначается $\overrightarrow{AB}$, причем в этой записи A — начало вектора, B — его конец.

Векторы могут быть записаны с помощью строчных букв: $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ...

1. Записать векторы, изображенные на рис. 14.

Решение. Так как первая буква в записи вектора должна обозначать начало вектора, то на рис. 14 изображены следующие векторы: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{OC}$.

Нулевым вектором называется вектор, начало и конец которого совпадают. Например, $\overrightarrow{AA}$ или $\vec{0}$ является нулевым вектором. *Длиной* вектора называется длина порождающего его отрез-

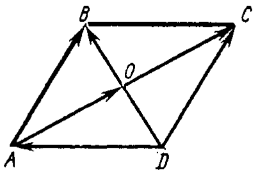


Рис. 14

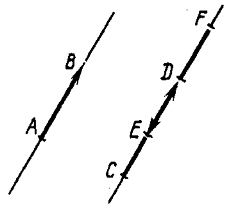


Рис. 15

ка. Так как длина вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, $|\vec{a}|$, то часто вместо «длина вектора» говорят «модуль вектора».

Обратим внимание на то, что длина вектора зависит от длины отрезка и не зависит от направления.

Мы видим, что длина нулевого вектора равна нулю: $|\overrightarrow{AA}| = 0$. Таким образом, каждый вектор, отличный от нулевого, имеет свою длину и направление.

Два вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Так, на рис. 15 коллинеарными являются следующие векторы: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{FE}$.

Мы видим, что среди коллинеарных векторов есть такие, у которых направления совпадают. Эти векторы называют *сонаправленными* и пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Если направления векторов противоположно направлены, то их и называют *противоположно направленными* и пишут $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FE}$; $\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \overrightarrow{FE}$.

Два коллинеарных вектора называют *равными,* если они сонаправлены и имеют равные длины; другими словами, $\vec{a} = \vec{b}$, если $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

Справедливы следующие утверждения:

Любой вектор равен самому себе, т. е. $\vec{a} = \vec{a}$.

Если два вектора по отдельности равны третьему, то они равны между собой, т. е. если $\vec{a} = \vec{c}$ *и* $\vec{b} = \vec{c}$, *то* $\vec{a} = \vec{b}$.

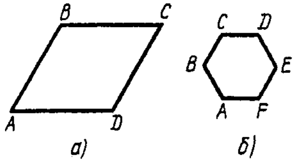


Рис. 16

2. Указать равные векторы на рис. 16, *а, б*.

Решение. а) Так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$ коллинеарны (лежат на параллельных прямых) и сонаправлены, а в силу свойства параллелограмма $|AB| = |DC|$, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$.

б) Шестиугольник $ABCDFE$ — правильный и, следовательно, $|AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EF| = |FA|$. Далее, так как векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AF}$ коллинеарны и сонаправлены, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FE}$, $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF}$.

2. Действия над векторами

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется такой вектор $\vec{c}$, начало которого совпадает с началом вектора $\vec{a}$, а конец — с концом вектора $\vec{b}$, при условии, что начало вектора $\vec{b}$ перенесено в конец вектора $\vec{a}$.

Таким образом, чтобы сложить два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать на плоскости произвольную точку M и отложить от нее вектор $\overrightarrow{MA} = \vec{a}$, а затем от точки A отложить вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{MB}$ является искомой суммой векторов $\vec{a} + \vec{b}$, т. е. $\overrightarrow{MB} = \vec{a} + \vec{b}$ (рис. 17).

3. Сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, изображенные на рис. 18.

Решение. Возьмем произвольную точку M и отложим от нее вектор $\vec{a}$. Из конца A этого вектора отложим вектор $\vec{b}$. Соединив точку M с концом B вектора $\vec{b}$, получим вектор, представляющий собой сумму векторов $\vec{a} + \vec{b}$ (рис. 18).

4. Найти сумму векторов, изображенных на рис. 19, *а—в*.

Для того чтобы построить сумму n данных векторов, нужно от произвольной точки M отложить первый вектор, затем из его конца отложить второй вектор и т. д. Тогда вектор, начало которого совпадает с началом первого вектора, а конец — с концом послед-

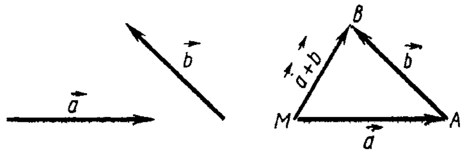


Рис. 17

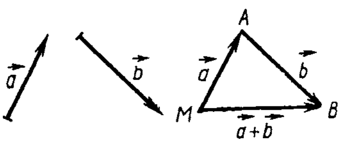


Рис. 18

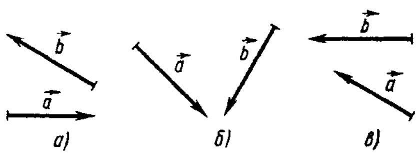


Рис. 19

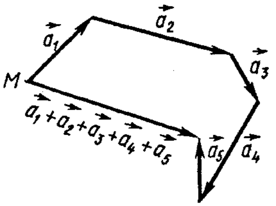


Рис. 20

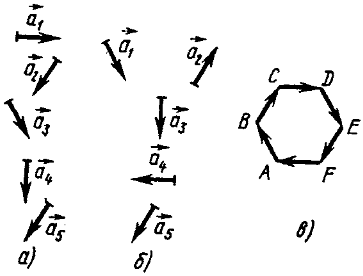


Рис. 21

него, и является вектором суммы n векторов (рис. 20).

5. Найти сумму векторов, изображенных на рис. 21, *а—в*.

Два вектора называются *противоположными*, если их сумма равна нулевому вектору. Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначают $-\vec{a}$, т. е. $\vec{a}+(-\vec{a})=0$.

Таким образом, противоположные векторы имеют равные длины и противоположно направлены.

Разностью векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют сумму вектора $\vec{a}$ и $-\vec{b}$, т. е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

Чтобы найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, нужно выбрать произвольную точку M и отложить от нее векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если соединить концы векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, то получится вектор $\overrightarrow{BA}=\vec{a}-\vec{b}$ или вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}$ (рис. 22).

6. Найти разность векторов, изображенных на рис. 23: а) $\vec{a}-\vec{b}$; б) $\vec{b}-\vec{a}$; в) $\vec{a}-\vec{b}$.

7. Построить сумму и разность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ (рис. 24).

Решение. Чтобы найти сумму векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, из конца вектора $\overrightarrow{AB}$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, сонаправленный вектору $\overrightarrow{AD}$ и такой, что $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$. Соединив точки C и D, получим параллелограмм $ABCD$ (поскольку $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$ и $|\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BC}|$). Очевидно, что $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, откуда, заменяя $\overrightarrow{BC}$ на $\overrightarrow{AD}$, находим $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$. Кроме того, справедливо равенство $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$, откуда $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$.

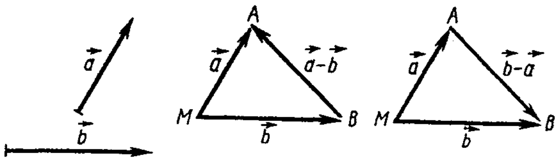


Рис. 22

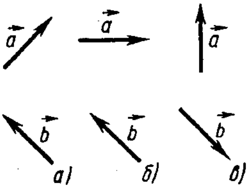


Рис. 23

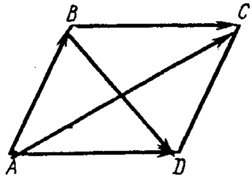


Рис. 24

Итак, вектор большей диагонали $\overrightarrow{AC}$ параллелограмма, построенного на заданных векторах $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$, равен сумме этих векторов (правило параллелограмма), а разность векторов $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AB}$ равна вектору $\overrightarrow{BD}$, т. е. вектору меньшей диагонали.

Это правило нахождения вектора суммы и разности векторов часто используется в физике.

Отметим свойства суммы векторов:

1) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ — переместительный закон;

2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ — сочетательный закон;

3) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ *на* вещественное *число* k называется вектор $k\vec{a}$, который имеет длину, равную $k|\vec{a}|$, и коллинеарен $\vec{a}$. При этом если $k>0$, то векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{ka}$ сонаправлены; если же $k<0$, то векторы $\vec{a}$ и $\overrightarrow{ka}$ противоположно направлены (рис. 25).

8. Пусть задан вектор $\vec{c}$ (рис. 26). Построить векторы: $\overrightarrow{4c}$; $-4\vec{c}$; $1{,}5\vec{c}$.

Решение. Искомые векторы изображены на рис. 26.

9. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 27). Построить вектор $3\vec{a}+5\vec{b}$.

Решение. Искомый вектор изображен на рис. 27.

10. Даны векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ (рис. 28). Построить вектор $3\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c}$.

Решение. Искомый вектор изображен на рис. 28.

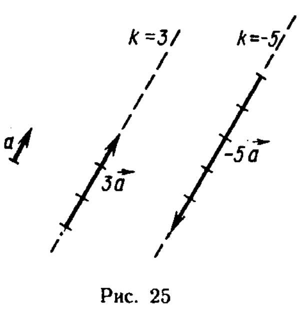


Рис. 25

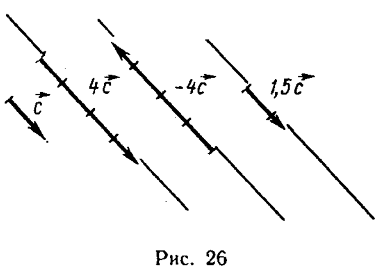


Рис. 26

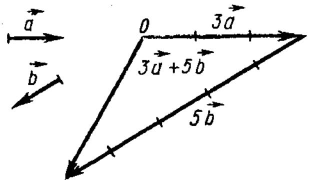


Рис. 27

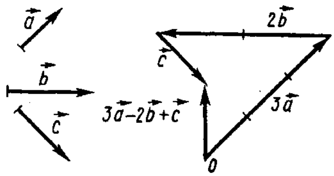


Рис. 28

11. По заданным на рис. 28 векторам $\vec{a}$ $\vec{b}$ и $\vec{c}$ построить вектор: а) $\vec{d}=2\vec{a}+3\vec{b}-5\vec{c}$; б) $\vec{d}=\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}-3\vec{c}$; в) $\vec{d}=3\vec{a}-5\vec{b}+$ $+2\vec{c}$.

3. Разложение вектора в базисе

Линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, ..., $\vec{a}_n$ называется сумма произведений этих векторов на какие-либо числа k_1, k_2, k_3, ..., k_n.

Например, $3\vec{a}-5\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$ — линейная комбинация векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

Справедливо следующее утверждение: *любой вектор $\vec{m}$ на плоскости может быть представлен единственным способом в виде линейной комбинации двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b}$* (рис. 29).

Согласно правилу параллелограмма вектор $\vec{m}$ равен сумме векторов, на которых построен параллелограмм. Стороны параллелограмма представляют собой векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{b}$, где x и y — числа.

Говорят, что вектор $\vec{m}$ разложен в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$.

Базисом на плоскости называется пара неколлинеарных векторов, взятых в определенном порядке.

Числа x и y называются *координатами* вектора $\vec{m}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$.

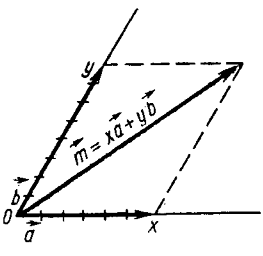


Рис. 29

12. Разложить векторы $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ (рис. 30) в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Р е ш е н и е. Имеем $\overrightarrow{AB}=3\vec{e}_2$, $\overrightarrow{AC}=1{,}5\vec{e}_1$, $\overrightarrow{CA}=-1{,}5\vec{e}_1$; $\overrightarrow{BC}=1{,}5\vec{e}_1-3\vec{e}_2$.

13. Разложить вектор $\vec{m}$ в базисе $(\vec{a}, \vec{b})$ (рис. 31).

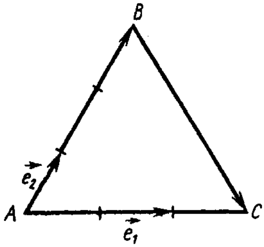


Рис. 30

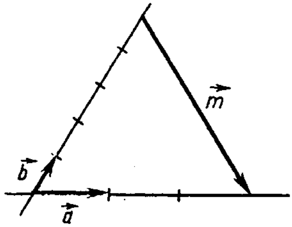


Рис. 31

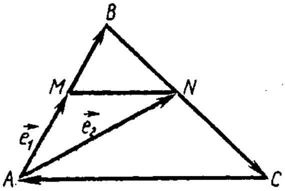


Рис. 32

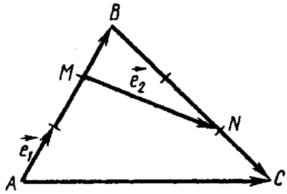


Рис. 33

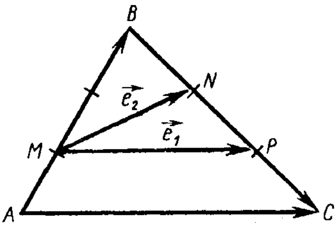


Рис. 34

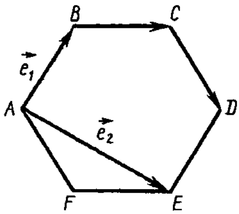


Рис. 35

14—19. Разложить в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ следующие векторы:

14. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ (M, N — середины сторон треугольника ABC; рис. 32).

15. $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ (рис. 33).

16. $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ (рис. 34).

17. $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ (рис. 35).

4. Декартова система координат

Если в качестве базиса взять два взаимно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}$ и $\vec{j}$, то говорят, что вектор разложен в декартовой системе координат. Точка O, принятая за начало векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, называется *началом координат*. Прямые, проведенные через векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, называются *осями координат*, соответственно

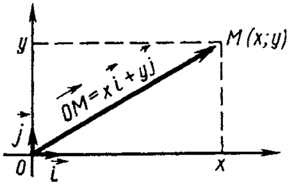


Рис. 36

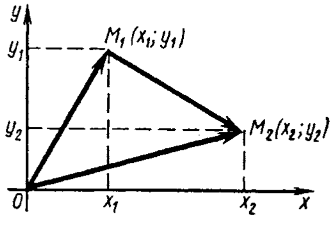


Рис. 37

осью абсцисс и *осью ординат* (рис. 36). При этом справедливо равенство $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}=(x;\ y)$, где x, y — координаты вектора $\overrightarrow{OM}$. Вектор $\overrightarrow{OM}$ имеет те же координаты, что и точка M.

Если вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$ не проходит через начало координат (рис. 37), то

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}=(x_2;\ y_2)-(x_1;\ y_1)=(x_2-x_1;\ y_2-y_1),$$

т. е. *для нахождения координат вектора нужно из координат его конца вычесть координаты начала.*

18. Даны точки $A(3;\ 2)$, $B(-1;\ 5)$, $C(0;\ 3)$. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

Решение. Чтобы найти координаты вектора, из координат конца вектора вычтем координаты начала. Тогда получим: $\overrightarrow{AB}=(-1-3;\ 5-2)=(-4;\ 3)$; $\overrightarrow{BC}=(0-(-1);\ 3-5)=(1;\ -2)$; $\overrightarrow{AC}=(0-3;\ 3-2)=(-3;\ 1)$.

19. Найти координаты векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$, если $A(2;\ 3)$, $B(-1;\ -3)$, $C(-7;\ 5)$.

20. Найти координаты векторов $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$, если $A(0;\ -1)$, $B(-3;\ 0)$, $C(0;\ 0)$.

§ 2. Прямоугольные координаты на плоскости

Действия над векторами, заданными своими координатами
Длина вектора, расстояние между двумя точками на плоскости
Деление отрезка в данном отношении

1. Действия над векторами, заданными своими координатами

Если векторы заданы в декартовой системе координат своими координатами, то:

1) *при сложении двух и большего числа векторов их одно-*

именные координаты складываются, т. е. если $\vec{a}(x_1; y_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2)$, то $\vec{a}+\vec{b}=(x_1+x_2; y_1+y_2)$;

2) *при вычитании векторов их одноименные координаты вычитаются*, т. е. если $\vec{a}=(x_1; y_1)$, $\vec{b}=(x_2; y_2)$, то $\vec{a}-\vec{b}=(x_1-x_2; y_1-y_2)$;

3) *при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число*, т. е. если $\vec{a}=(x; y)$, то $\overrightarrow{ka} = (kx; ky)$.

21. Даны векторы $\vec{a}=(3; 5)$, $\vec{b}=(2; -7)$. Найти: а) $\vec{a}+\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{b}$; в) $4\vec{a}$; г) $-0{,}5\vec{b}$.

Решение. Согласно приведенным правилам, получим:

а) $\vec{a}+\vec{b}=(3+2; 5-7)=(5; -2)$;

б) $\vec{a}-\vec{b}=(3-2; 5-(-7))=(1; 12)$;

в) $4\vec{a}=(4\cdot 3; 4\cdot 5)=(12; 20)$;

г) $-0{,}5\vec{b}=(-0{,}5\cdot 2; -0{,}5\cdot(-7))=(-1; 3{,}5)$.

22. Даны векторы $\vec{a}_1=(-2; 4)$; $\vec{a}_2=(3; 1)$. Найти: а) $\vec{a}_1+\vec{a}_2$; б) $\vec{a}_1-\vec{a}_2$; в) $3\vec{a}_1$; г) $5\vec{a}_2$.

23. Даны точки $A(3; -1)$; $B(0; -5)$; $C(-2; 1)$. Найти: $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; $\vec{m}=2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-0{,}5\overrightarrow{CA}$.

24. Даны точки $A(4; 0)$; $B(-1; 3)$; $C(5; 7)$. Найти: $\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$; $\vec{m}=-3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-5\overrightarrow{AC}$.

Так как при умножении вектора на число получается коллинеарный вектор, то можно вывести условие коллинеарности векторов. Пусть $\vec{a}=(x; y)$; тогда $k\vec{a}=(kx; ky)$, т. е. если $x_2=kx_1$ и $y_2=ky_1$, то векторы коллинеарны. Таким образом, если одноименные координаты двух векторов пропорциональны, то векторы коллинеарны.

2. Длина вектора, расстояние между двумя точками на плоскости

Длина вектора, выходящего из начала координат, равна квадратному корню из суммы квадратов его координат (рис. 38, *а*), т. е.

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2}. \qquad (1)$$

25. Найти длину вектора: а) $\vec{a}=(5; 12)$; б) $\vec{b}=(7; -1)$.

Решение. Согласно формуле (1), имеем:

а) $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$;

б) $|\vec{b}|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}$.

26. Найти длины векторов $\vec{a}=(5; 2\sqrt{6})$, $\vec{b}=(-5; 7)$, $\vec{c}=(-6; 8)$, $\vec{d}=(7; -7)$.

Если вектор задан двумя точками $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$,

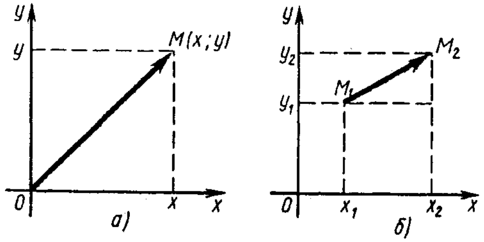


Рис. 38

(рис. 38, *б*), то $\overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1;\ y_2 - y_1)$ и длину вектора можно найти по формуле

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \qquad (2)$$

По этой же формуле можно найти расстояние между двумя точками, так как длина вектора равна длине порождающего его отрезка.

27. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(5;\ 2)$, $B(8;\ -2)$.

Решение. Применяя формулу (2), получим

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(8-5)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5.$$

28. Даны точки $A(3;\ 5)$; $B(-3;\ 3)$, $C(5;\ -8)$. Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$.

29. Дан треугольник с вершинами $A(7;\ 7)$, $B(4;\ 3)$, $C(3;\ 4)$. Найти его периметр.

30. На оси абсцисс найти точку, которая находится на расстоянии 5 единиц от точки $M(1;\ 3)$.

Решение. Обозначим искомую точку через $A(x;\ 0)$ (так как по условию она принадлежит оси абсцисс). Тогда длина отрезка AM выразится формулой $|AM| = \sqrt{(x_M - x_A)^2 + (y_M - y_A)^2}$, откуда, подставляя в нее кординаты точек и известное расстояние, имеем

$$5 = \sqrt{(1-x)^2 + (3-0)^2}.$$

Возведем обе части этого равенства в квадрат, а затем раскроем скобки и приведем подобные члены:

$$25 = (1-x)^2 + 3^2;\ 25 = 1 - 2x + x^2 + 9;\ 25 = x^2 - 2x + 10 \text{ или}$$
$$x^2 - 2x - 15 = 0.$$

Решим квадратное уравнение:

$$D = b^2 - 4ac = 4 - 4\cdot 1\cdot(-15) = 4 + 60 = 64;\ \sqrt{D} = 8;$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a};\ x_1 = \frac{2-8}{2} = -3;\ x_2 = \frac{2+8}{2} = 5.$$

Итак, получаем две точки: $A_1(-3;\ 0)$, $A_2(5;\ 0)$ (рис. 39).

31. На оси ординат найти точку, которая находится на расстоянии 13 единиц от точки $M(12;\ 14)$.

32. Найти координаты точки, расстояние от которой до оси ординат и до точки $A(8;\ 6)$ равно 5.

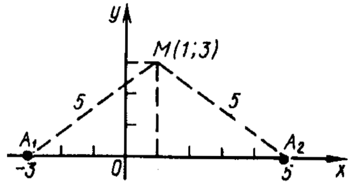


Рис. 39

3. Деление отрезка в данном отношении

Если отрезок MN, координаты концов которого известны, точка K делит в заданном отношении $|MK|:|KN|=\lambda$ (λ — число), то координаты точки K можно найти по формулам

$$x_K=\frac{x_M+\lambda x_N}{1+\lambda};\quad y_K=\frac{y_M+\lambda y_N}{1+\lambda}. \qquad (3)$$

Пусть точка C делит отрезок AB на две равные части; тогда $|AC|:|CB|=1:1$, т. е. $\lambda_C=1$. Подставив это значение в формулы (3), получим

$$x_C=\frac{x_A+y_B}{2};\quad y_C=\frac{y_A+y_B}{2}. \qquad (4)$$

33. Точка K делит отрезок MN в отношении $|MK|:|KN|=2:3$. Найти координаты точки K, если $M(7;\ 4)$; $N(-3;\ 9)$.

Р е ш е н и е. Подставляя $\lambda=2/3$ и координаты точек M и N в формулу (3), находим

$$x_K=\frac{x_M+\lambda x_N}{1+\lambda}=\frac{7+\frac{2}{3}(-3)}{1+\frac{2}{3}}=\frac{7-2}{\frac{5}{3}}=3;$$

$$y_K=\frac{y_M+\lambda y_N}{1+\lambda}=\frac{4+\frac{2}{3}\cdot 9}{1+\frac{2}{3}}=\frac{4+6}{\frac{5}{3}}=6.$$

Итак, $K(3;\ 6)$.

34. Разделить отрезок AB, заданный точками $A(5;\ 1)$ и $B(-4;\ -14)$, на три равные части.

Р е ш е н и е. Пусть M и N — точки деления (рис. 40). Составим отношения для этих точек. Имеем $|AM|:|MB|=1:2$, т. е. $\lambda_M=1/2$; $|AN|:|NB|=2:1$, т. е. $\lambda_N=2$. Теперь, подставляя эти отношения и координаты точек A и B в формулу (3), находим

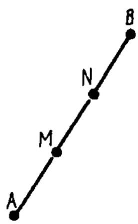


Рис. 40

$$x_M=\frac{x_A+\lambda_M x_B}{1+\lambda_M}=\frac{5+\frac{1}{2}(-4)}{1+\frac{1}{2}}=2,$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda_M y_B}{1+\lambda_M} = \frac{1+\frac{1}{2}(-14)}{1+\frac{1}{2}} = -4, \text{ т. е. } M(2;\ -4);$$

$$x_N = \frac{x_A + \lambda_N x_B}{1+\lambda_N} = \frac{5+2(-4)}{1+2} = -1,$$

$$y_N = \frac{y_A + \lambda_N y_B}{1+\lambda_N} = \frac{1+2(-14)}{1+2} = -9, \text{ т. е. } N(-1;\ -9).$$

35. Отрезок AB задан точками $A(2;\ 3)$, $B(10;\ 11)$. Найти координаты точки C, если известно, что $|AC| : |CB| = 3:5$.

36. Отрезок AB, заданный точками $A(-5;\ -2)$, $B(4;\ 2{,}5)$, разделен в отношении $|AM|:|MN|:|NB| = 3:4:2$. Найти точки деления.

37. Началом отрезка служит точка $A(-3;\ -5)$, а серединой — точка $C(3;\ -2)$. Найти конец отрезка — точку B.

38. Найти длину медианы AM треугольника с вершинами $A(7;\ -4)$, $B(-1;\ 8)$, $C(-12;\ -1)$.

39. Отрезок AB разделен на 5 равных частей. Найти точки деления, если $A(6;\ -2)$, $B(12;\ -6)$.

§ 3. Скалярное произведение векторов

Определение скалярного произведения
Скалярное произведение векторов в координатной форме
Нахождение угла между векторами

1. Определение скалярного произведения

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т. е.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi, \tag{1}$$

где $\varphi = (\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 180°$.

Если хотя бы один из двух векторов равен нулевому вектору, то их произведение считается равным нулю.

Углом между векторами называется угол между их направлениями (рис. 41).

40. В равностороннем треугольнике ABC со стороной, равной 6 (рис. 42), найти скалярное произведение векторов: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$.

Решение. а) Так как угол φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ (и их направлениями) равен 60°, то для скалярного произведения этих векторов получим

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|\cdot\cos\widehat{BAC} = 6\cdot6\cdot\cos 60° = 36\cdot0{,}5 = 18.$$

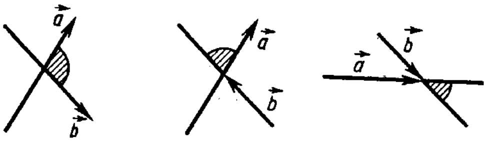


Рис. 41

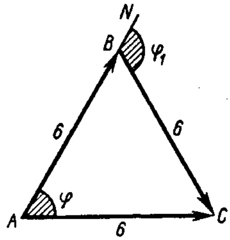


Рис. 42

б) Угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ (т. е. угол между их направлениями) есть угол $\varphi_1 = 120°$, поэтому

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = |\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\cos \widehat{NBC} = 6\cdot6\cdot\cos 120° = 6\cdot6\cdot(-0{,}5) = -18,$$

так как $\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -0{,}5$.

41. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$, если известно, что треугольник ABC — прямоугольный и равнобедренный, $\widehat{C} = 90°$, а катеты равны 5.

Перечислим свойства скалярного произведения:

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ (переместительный закон);

$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b}+\vec{b}\vec{c}$ (распределительный закон);

$k(\vec{a}\vec{b}) = (k\vec{a})\vec{b} = \vec{a}(k\vec{b})$ (сочетательный закон).

Кроме того, отметим, что

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0 = |\vec{a}|^2,$$

т. е. *скалярный квадрат вектора равен квадрату модуля вектора,* (квадрату его длины).

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90° = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot 0 = 0.$$

Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны.

42. Заданы два вектора, такие, что $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$, а угол между ними 45°. Найти $(\vec{a}+\vec{b})^2$.

Решение. Имеем $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2$. Так как $|\vec{a}| = 5$ и $|\vec{b}| = 3$, то $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 25$, $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 9$, откуда $2\vec{a}\vec{b} = 2|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos 45° = 2\cdot5\cdot3\cdot0{,}5\sqrt{2} = 15\sqrt{2}$. Итак,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2 = 25 + 15\sqrt{2} + 9 = 34 + 15\sqrt{2}.$$

43. Заданы векторы, такие что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 7$, а угол φ между ними равен 30°. Найти $(3\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+3\vec{b})$.

44. Заданы векторы, такие, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$, а угол φ между ними равен 60°. Найти $(\vec{a}+\vec{b})^2$; $(3\vec{a}-5\vec{b})\cdot2\vec{a}$.

2. Скалярное произведение векторов в координатной форме

Пусть два ненулевых вектора заданы своими координатами: $\vec{a}=(x_a;\ y_a)$, $\vec{b}=(x_b;\ y_b)$. Это значит, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ разложены в базисе $(\vec{i};\ \vec{j})$, т. е. $\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}$, $\vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}$. Найдем их произведение:

$$\vec{a}\vec{b}=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j})(x_b\vec{i}+y_b\vec{j})=x_ax_b\vec{i}^2+x_by_b\vec{i}\vec{j}+x_ay_a\vec{i}\vec{j}+y_ay_b\vec{j}^2. \qquad (2)$$

Так как $\vec{i}$ и $\vec{j}$ — единичные и взаимно перпендикулярные векторы, то $\vec{i}^2=1$; $\vec{j}^2=1$; $\vec{i}\vec{j}=0$. Подставив эти значения в равенство (2), получим

$$\vec{a}\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b. \qquad (3)$$

Итак, *скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат.*

45. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a}=(3;\ 5)$ и $\vec{b}=(-2;\ 7)$.

Решение. Здесь $x_a=3$, $x_b=-2$, $y_a=5$, $y_b=7$. Используя формулу (3), получим

$$\vec{a}\vec{b}=3\cdot(-2)+5\cdot7=-6+35=29.$$

46—51. Найти скалярное произведение векторов:

46. $\vec{a}=(5;\ 7)$, $\vec{b}=(4;\ 3)$.
47. $\vec{a}=(-3;\ 5)$, $\vec{b}=(16;\ 1)$.
48. $\vec{a}=(2;\ 0)$, $\vec{b}=(-3;\ -7)$.
49. $\vec{a}=(-3;\ 1)$, $\vec{b}=(1;\ -3)$.
50. $\vec{a}=(5;\ -7)$, $\vec{b}=(7;\ 5)$.
51. $\vec{a}=(2;\ 0)$ $\vec{b}=(0;\ -3)$.

3. Нахождение угла между векторами

Из определения скалярного произведения двух векторов можно получить формулу

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}\cdot|\vec{b}|}, \qquad (4)$$

которая позволяет найти угол между векторами.

Учитывая, что $\vec{a}\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b$, $|\vec{a}|=\sqrt{x_a^2+y_a^2}$ и $|\vec{b}|=\sqrt{x_b^2+y_b^2}$, формулу (4) можно записать в координатной форме:

$$\cos\varphi=\frac{x_ax_b+y_ay_b}{\sqrt{x_a^2+y_a^2}\cdot\sqrt{x_b^2+y_b^2}}.$$

52. Найти угол между векторами: а) $\vec{a}=(4;\ 0)$ и $\vec{b}=(2;\ -2)$; б) $\vec{a}=(5;\ -3)$ и $\vec{b}=(3;\ 5)$.

Решение. а) Используя формулу (5), находим

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot2-0\cdot(-2)}{\sqrt{16+0}\cdot\sqrt{4+4}}=\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

б) Имеем

$$\cos\varphi=\frac{5\cdot3+(-3)\cdot5}{\sqrt{25+9}\cdot\sqrt{9+25}}=\frac{0}{34}=0;\ \varphi=\arccos 0=\frac{\pi}{2},$$

т. е. заданные векторы перпендикулярны.

53. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, если $A(1;\ 6)$, $B(1;\ 0)$, $C(-2;\ 3)$.

54. Найти углы треугольника с вершинами $A(6;\ 7)$, $B(3;\ 3)$, $C(1;\ -5)$.

55. Найти угол между векторами $\vec{a}=(6;\ -2)$ и $\vec{b}=(9;\ -12)$.

56. Найти угол между векторами $\vec{a}=(-2;\ 3)$ и $\vec{b}=(4;\ -1)$.

§ 4. Прямоугольные координаты в пространстве

Для вектора в пространстве также определены основные понятия: модуль вектора, направление вектора, равенство векторов. Любой вектор $\vec{m}$ пространства можно разложить по трем заданным некомпланарным векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

$$\vec{m}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}.$$

Если в пространстве заданы три попарно перпендикулярных единичных вектора $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, отложенные от некоторой точки O, то будем называть эту тройку *прямоугольным базисом* в пространстве, а точку O — *началом* прямоугольной *системы координат* в пространстве. Оси, определяемые единичными векторами, будем называть соответственно *осью абсцисс, осью ординат* и *осью аппликат*. Разложение вектора в базисе $(\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k})$ имеет вид

$$\vec{m}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}. \qquad (1)$$

Координаты точки M, т. е. числа x, y, z, называются *координатами вектора* $\overrightarrow{OM}$ (рис. 43).

Если началом вектора является точка $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$, а концом — точка $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, то координаты этого вектора вычисляются по формуле

$$\overrightarrow{AB}=(x_B-x_A;\ y_B-y_A;\ z_B-z_A). \qquad (2)$$

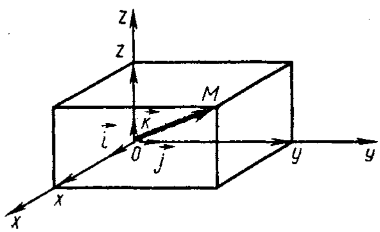


Рис. 43

Действия с векторами, заданными в координатной форме, выполняются по следующим правилам:

1) *координаты суммы двух*

и более векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, т. е. если $\vec{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $\vec{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$, то $\vec{a}+\vec{b}=(x_a+x_b;\ y_a+y_b;\ z_a+z_b)$;

2) *координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов*, т. е. если $\vec{a}=(x_a;\ y_a;\ z_a)$, $\vec{b}=(x_b;\ y_b;\ z_b)$, то $\vec{a}-\vec{b}=(x_a-x_b;\ y_a-y_b;\ z_a-z_b)$;

3) *координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат данного вектора на это число*, т. е. если $\vec{a}=(x;\ y)$, то $k\vec{a}=(kx;\ ky;\ kz)$.

Длина вектора, выходящего из начала координат, вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{OM}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}. \tag{3}$$

Длина вектора, заданного двумя точками $A(x_A;\ y_A;\ z_A)$ и $B(x_B;\ y_B;\ z_B)$, вычисляется по формуле

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}. \tag{4}$$

Координаты точки M, делящей отрезок AB в заданном отношении λ, находятся по формулам

$$x_M=\frac{x_A+\lambda x_B}{1+\lambda};\quad y_M=\frac{y_A+\lambda y_B}{1+\lambda};\quad z_M=\frac{z_M+\lambda z_B}{1+\lambda}. \tag{5}$$

57. Назвать координаты векторов: $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-5\vec{k}$; $\vec{b}=-2\vec{i}+5\vec{j}-0{,}5\vec{k}$; $\vec{c}=2\vec{i}+5\vec{k}$.

58. Найти сумму векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(1;\ -3;\ -2)$, $\vec{b}=(3;\ 6;\ -1)$.

59. Найти разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $\vec{a}=(5;\ 3;\ -2)$, $\vec{b}=(-1;\ 0;\ -1)$.

60. Дан вектор $\vec{a}=(3;\ -2;\ 7)$. Найти: $5\vec{a}$; $-3\vec{a}$.

61. Вектор задан точками $A(-3;\ 5;\ 0)$ и $B(2;\ 3;\ -1)$. Найти: $3\overrightarrow{AB}$, $-0{,}5\overrightarrow{AB}$.

62. Векторы заданы точками $A(3;\ 5;\ 7)$, $B(-1;\ 4;\ 2)$, $C(0;\ -3;\ 5)$, $D(6;\ -7;\ 8)$. Найти: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DC}$; $2\overrightarrow{AB}$; $-3\overrightarrow{CD}$; $0{,}5\overrightarrow{BD}$; $3\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BC}-4\overrightarrow{AD}$.

63. Вычислить длины векторов $\vec{a}=(5;\ -3;\ \sqrt{2})$; $\vec{b}=(-2;\ 3;\ 1)$; $\vec{c}=(0;\ 12;\ 5)$; $\vec{d}=(-5;\ 7;\ 2)$.

64. Вычислить длину вектора, заданного своими координатами: а) $A(5;\ 3;\ 1)$, $B(4;\ 5;\ 1)$; б) $C(3;\ -2;\ -5)$, $D(7;\ 6;\ -1)$.

65. Найти середину отрезка, заданного точками $A(3;\ -7;\ 11)$, $B(-1;\ 3;\ -3)$.

66. Найти периметр треугольника с вершинами $A(3;\ -2;\ 8)$, $B(-1;\ 0;\ 6)$, $C(5;\ 1;\ -7)$.

67. Найти длину медианы AM треугольника с вершинами $A(2;\ -2;\ 0)$, $B(7;\ -3;\ 1)$, $C(1;\ -1;\ 5)$.

68. Найти точку пересечения медиан треугольника ABC, где $A(1;\ 4;\ -3)$, $B(2;\ -1;\ 9)$, $C(0;\ 3;\ -6)$.

69. Найти угол между векторами: а) $\vec{a}=(3;\ 5;\ -2)$ и $\vec{b}=(4;\ 1;\ -7)$; б) $\vec{c}=(0;\ -1;\ 2)$ и $\vec{d}=(1;\ -2;\ 3)$.

70. Даны точки $A(1;\ 0;\ -2)$, $B(4;\ 3;\ 7)$, $C(2;\ -3;\ 5)$, $D(-1;\ 6;\ 0)$. Найти угол между векторами: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$.

§ 5. Уравнение линии на плоскости

Уравнение линии
Понятие о параметрическом уравнении линии
Общее уравнение прямой
Правило составления уравнения прямой
Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный нормальный вектор
Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный направляющий вектор
Уравнение прямой, проходящей через две данные точки
Уравнение прямой в отрезках

1. Уравнение линии

Пусть дано уравнение с двумя переменными. Решением этого уравнения является пара действительных чисел, причем, вообще говоря, имеется бесконечное множество таких пар. Если построить на координатной плоскости все точки, соответствующие всем парам чисел, являющихся решением этого уравнения, то получится множество точек, которое называется *графиком* этого *уравнения*.

Уравнением линии на плоскости называется уравнение с двумя переменными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки, лежащей на линии, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на этой линии.

Говорят, что координаты точки удовлетворяют уравнению, если при подстановке их в данное уравнение оно превращается в тождество.

71. Определить, лежат ли точки $A(2;\ 5)$ и $B(1;\ 2{,}2)$ на линии, заданной уравнением $3x-5y+8=0$.

Решение. Подставив в уравнение координаты точки A, получим $3\cdot2-5\cdot5+8\neq0$, $6-25+8\neq0$. Следовательно, точка A не принадлежит заданной линии.

Подставим координаты точки B: $3\cdot1-5\cdot2{,}2+8=0$; $11-11=0$. Следовательно, точка B лежит на заданной линии.

72. Проверить, принадлежит ли точка $A(-5;\ 13)$ линии, заданной уравнением $x^2/25+y^2/169=1$.

73. Проверить, лежит ли точка $B(2;\ 0)$ на линии, заданной уравнением $4x^2-3y^2+6xy-2x+1=0$.

74. Точки $A(x;\ 3)$ и $B(-5;\ y)$ принадлежат линии, заданной уравнением $7x+2y=41$. Найти неизвестные координаты точек.

Решение. Так как точки A и B принадлежат заданной линии, то их координаты удовлетворяют уравнению этой линии. Подставив известные координаты в данное уравнение, получим уравнение с одним неизвестным:

$$A(x;\ 3);\ 7x+2\cdot 3=41;\ 7x=35;\ x=5,\ \text{т. е. } A(5;\ 3);$$

$$B(-5;\ y);\ 7\cdot(-5)+2y=41;\ 2y=76;\ y=38,\ \text{т. е. } B(-5;\ 38).$$

2. Понятие о параметрическом уравнении линии

Параметром называется вспомогательная переменная, входящая в формулы и выражения. В одних случаях параметры рассматривают как постоянные числа в условиях данной задачи, а в других случаях они рассматриваются как переменные. Например, в квадратном уравнении $ax^2+bx+c=0$ величины a, b и c являются параметрами. При решении конкретного уравнения a, b и c считаются постоянными.

Чаще всего параметр обозначают буквой t. Например, $x-2=3t$; $y-5=2t$ — это уравнения прямой, проходящей через точку $A(2;\ 5)$ и коллинеарной вектору $\vec{b}(3;\ 2)$.

Пусть линия на плоскости является траекторией движения. Тогда каждую точку этой линии можно записать парой $(x(t);\ y(t))$, где $x=x(t)$ и $y=y(t)$ представляют собой функции параметра t. Уравнения $x=x(t)$ и $y=y(t)$ называются *параметрическими уравнениями* линии. Так, уравнения $x=R\cos t$ и $y=R\sin t$ являются параметрическими уравнениями окружности с радиусом R и центром в начале координат (рис. 44).

Параметрические уравнения линии можно привести к уравнению с двумя переменными. Для этого надо исключить параметр t из параметрических уравнений, выразив его из одного уравнения и подставив в другое.

75. Заданы параметрические уравнения линии: $x=R\cos t$, $y=R\sin t$. Привести их к уравнению с двумя переменными.

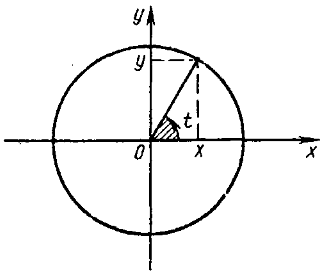


Рис. 44

Решение. Из второго уравнения выразим $\sin t=\frac{y}{R}$. Зная, что $\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}$, находим $\cos t=\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}}$.

Теперь подставим это выражение в первое уравнение:

$$x=R\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2}};\ x=R\sqrt{\frac{R^2-y^2}{R^2}};$$

$$x=\sqrt{R^2-y^2},\ \text{т. е. } x^2+y^2=R^2.$$

Получили известное из школьного курса уравнение окружности с радиусом R и центром в начале координат.

76. Параметрические уравнения линии $x = 2\cos t$, $y = 3\sin t$, где $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, привести к уравнению с двумя переменными.

Р е ш е н и е. Выразив из второго уравнения $\sin t = \frac{y}{3}$ и учитывая, что $\cos t = \sqrt{1 - \sin^2 t}$, находим $\cos t = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$. Далее, подставив это выражение в первое уравнение, имеем

$$x = 2\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}};\ x^2 = 4\left(1 - \frac{y^2}{9}\right);\ \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{y^2}{9};\ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

3. Общее уравнение прямой

Прямые — самые простые линии на плоскости. Им соответствуют и самые простые уравнения — уравнения первой степени.

Справедливо следующее утверждение: *всякая прямая на плоскости определяется уравнением первой степени с двумя переменными x и y* и обратно, *всякое уравнение вида $Ax + By + C = 0$ при любых действительных значениях коэффициентов A, B, C, кроме случая одновременного равенства нулю коэффициентов A и B, определяет прямую.*

Уравнение $Ax + By + C = 0$ называется *общим уравнением* прямой. Коэффициенты A, B, C принято записывать в виде целых чисел.

Рассмотрим частные случаи общего уравнения прямой.

1. Пусть $A = 0$. Тогда уравнение примет вид $By + C = 0$. Преобразуем его:

$$By = -C;\ y = -C/B;\ -C/B = b;\ y = b.$$

Получили уравнение прямой, параллельной оси абсцисс (рис. 45).

2. Пусть $B = 0$. Тогда уравнение примет вид $Ax + C = 0$. Преобразуем его:

$$Ax = -C;\ x = -C/A;\ -C/A = a;\ x = a.$$

Получили уравнение прямой, параллельной оси ординат (рис. 45).

3. Пусть $A = 0$, $C = 0$. Тогда уравнение примет вид $By = 0$, откуда $y = 0$. Получили уравнение оси абсцисс (рис. 45).

4. Пусть $B = 0$, $C = 0$. Тогда уравнение примет вид $Ax = 0$, т. е. $x = 0$. Получили уравнение оси ординат (рис. 45).

5. Пусть $C = 0$. Тогда уравнение примет вид $Ax + By = 0$. Преобразуем его: $By = -Ax$; $y = -(A/B)x$, где $B > 0$. Обозначив $-A/B = k$ и подставив в уравнение, имеем $y = kx$.

Получили уравнение прямой, которое, как известно из школьного курса, называется *уравнением прямой с угловым коэффициентом*. Эта прямая проходит через начало координат, а ее угловой коэффициент есть $k = -A/B$.

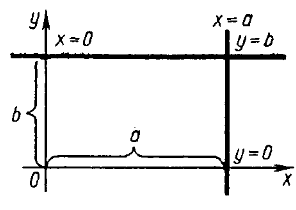


Рис. 45

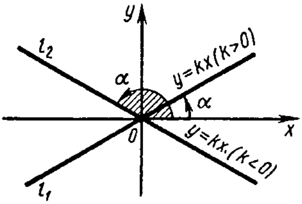


Рис. 46

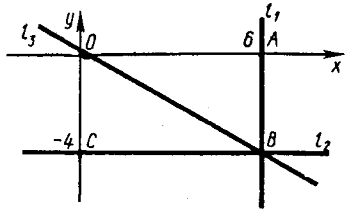


Рис. 47

Напомним, что угловым коэффициентом называется тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси абсцисс: $k = \mathrm{tg}\,x$.

Если угол наклона острый, то угловой коэффициент $k>0$; если же угол наклона тупой, то угловой коэффициент $k<0$ (рис. 46).

77. Составить уравнения прямых, изображенных на рис. 47.

Решение. Так как прямая l_1 параллельна оси ординат, то ее уравнение имеет вид $x = a$. Эта прямая отсекает на оси абсцисс отрезок, равный 6. Итак, $x = 6$ — уравнение прямой l_1.

Прямая l_2 параллельна оси абсцисс. Поскольку эта прямая проходит через точку (0; —4), ее уравнение есть $y = -4$.

Прямая l_3 проходит через начало координат и ее уравнение имеет вид $y = kx$. Найдем ее угловой коэффициент: $k = \mathrm{tg}\,\alpha$; $k = -4/6$; $k = -2/3$. Получили уравнение $y = -(2/3)x$. Приведем его к общему виду: $3y = -2x$; $2x + 3y = 0$. Итак, уравнение прямой l_3 есть $2x + 3y = 0$.

78. Прямоугольник $ABCD$ расположен во II координатном угле (рис. 48). Стороны его равны 6 и 8 единицам. Составить уравнения всех сторон прямоугольника и диагонали BD.

79. Составить уравнения сторон AO и OB правильного треугольника AOB и его высоты AC (рис. 49).

4. Правило составления уравнения прямой

Положение прямой на плоскости относительно системы координат можно задать различными способами. Прямая может быть задана точкой и направлением; точкой и перпендикулярным пря-

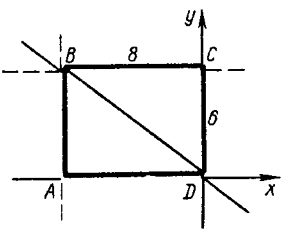


Рис. 48

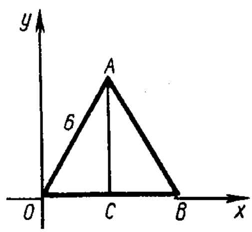


Рис. 49

мой вектором; двумя точками; отрезками, которые прямая отсекает на осях координат (частный случай задания прямой двумя точками).

Мы видим, что во всех случаях задания прямой обязательно должна быть известна хотя бы одна точка, через которую проходит искомая прямая. Кроме того, должно быть задано какое-либо дополнительное условие: коллинеарность, перпендикулярность или вторая точка, принадлежащая прямой.

Правило составления уравнения прямой l, для которой известны координаты точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и задано какое-либо второе условие, состоит в следующем:

1^0. На прямой l выбирают произвольную точку с текущими координатами x, y: $M(x;\ y)\in l$.

2^0. Находят координаты вектора, лежащего на прямой l и такого, что его начало есть точка $M_1(x_1;\ y_1)$, а конец — точка $M(x;\ y)$, т. е. $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$.

3^0. Записывают координаты вектора, заданного дополнительными условиями (коллинеарности, перпендикулярности, двумя точками), т. е. направляющего или нормального вектора $\vec{n}$.

4^0. Используют условие коллинеарности или перпендикулярности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$.

5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный нормальный вектор

Нормальным вектором прямой l называется любой ненулевой вектор $\vec{n}=(A;\ B)$, перпендикулярный этой прямой.

Пусть заданы точка $M_1(x_1;\ y_1)$ и нормальный вектор $\vec{n}=(A;\ B)$ (рис. 50). Для составления уравнения прямой, проходящей через точку M_1 и имеющей нормальный вектор $\vec{n}$, воспользуемся общим правилом:

1^0. Выберем на прямой l произвольную точку $M(x;\ y)$.

2^0. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M}$: $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$.

3^0. Запишем координаты заданного нормального вектора $\vec{n}$: $\vec{n}=(A;\ B)$.

4^0. Воспользуемся условием перпендикулярности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$; их скалярное произведение равно нулю, т. е. $\overrightarrow{M_1M}\cdot\vec{n}=0$. Так как скалярное произведение векторов, заданных своими координатами, равно сумме произведений одноименных координат, то уравнение прямой l примет вид

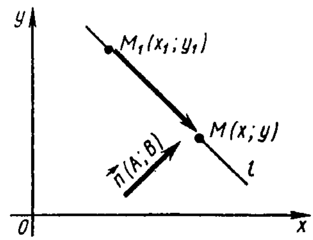


Рис. 50

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0. \qquad (1)$$

Преобразуем это уравнение:

$$Ax-Ax_1+By-By_1=0;\ Ax+By+(-Ax_1-By_1)=0.$$

Полагая $-Ax_1-By_1=C$, получим уравнение прямой l в виде $Ax+By+C=0$.

Заметим, что если известно общее уравнение прямой, то координаты нормального вектора $\vec{n}=(A;\ B)$ равны коэффициентам при x и y в этом уравнении.

80. Известны точка $M_1(7;\ -8)$ и нормальный вектор прямой $\vec{n}=(-2;\ 3)$. Составить уравнение прямой.

Решение. 1^0. Выбираем точку $M(x;\ y)$.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-7;\ y+8)$.

3^0. Нормальный вектор $\vec{n}=(2;\ 3)$, т. е. $A=2$, $B=3$.

4^0. Запишем уравнение искомой прямой:

$$2(x-7)+3(y+8)=0,$$

откуда

$$2x-14+3y+24=0;\ 2x+3y+10=0$$

— искомое уравнение в общем виде.

81. Составить уравнение высоты AD треугольника, заданного точками $A(-5;\ 3)$, $B(3;\ 7)$, $C(4;\ -1)$.

Решение. 1^0. Высота AD проходит через точки $A(-5;\ 3)$ и точку $D(x;\ y)$ с неизвестными координатами.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{AD}=(x+5;\ y-3)$.

3^0. Найдем вектор $\overrightarrow{BC}$, заданный точками $B(3;\ 7)$ и $C(4;\ -1)$; имеем $\overrightarrow{BC}=(1;\ -8)$.

4^0. Так как по условию векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ перпендикулярны, то $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD}=0$, откуда получаем уравнение прямой AD:

$$1\cdot(x+5)-8(y-3)=0.$$

Далее, имеем

$$x+5-8y+24=0;\ x-8y+29=0$$

— уравнение прямой AD в общем виде.

82. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $B(5;\ 3)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(5;\ 0)$.

83. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $C(-3;\ 5)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n}=(-3;\ 2)$.

84. Составить уравнение высоты BD в треугольнике с вершинами $A(7;\ 0)$, $B(3;\ 6)$, $C(-1;\ 1)$.

85. Составить уравнения диагоналей ромба, заданного точками $A(2;\ 2)$, $B(3;\ 5)$, $C(4;\ 2)$, $D(3;\ -1)$.

86. Составить уравнения сторон квадрата, заданного точками $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, $C(5;\ -1)$, $D(2;\ -2)$.

87. Составить уравнение серединного перпендикуляра к отрезку, заданному точками $A(2;\ 4)$ и $B(5;\ -7)$.

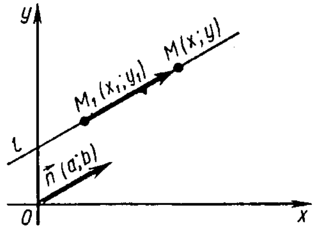


Рис. 51

6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку и имеющей заданный направляющий вектор

Направляющим вектором прямой l называется всякий ненулевой вектор $\vec{n}=(a;\ b)$, параллельный этой прямой. Любая прямая имеет бесконечное множество направляющих векторов, коллинеарных между собой.

Пусть заданы точка $M_1(x_1;\ y_1)$, через которую проходит прямая l (рис. 51), и ее направляющий вектор $\vec{n}=(a;\ b)$.

Используя общее правило, составим уравнение прямой l.

1^0. Выберем произвольную точку $M(x;\ y)\in l$.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$.

3^0. Запишем направляющий вектор $\vec{n}=(a;\ b)$.

4^0. Воспользуемся условием коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_1M}$ и $\vec{n}$; их одноименные координаты должны быть пропорциональны. Поэтому уравнение прямой l имеет вид

$$\frac{x-x_1}{a}=\frac{y-y_1}{b}. \qquad (2)$$

Преобразуем это уравнение:

$$bx-bx_1=ay-ay_1;\ bx-ay+(-bx_1+ay_1)=0.$$

Полагая $b=A;\ -a=B,\ -bx_1+ay_1=C$, получим $Ax+By+C=0$ — уравнение общего вида.

88. Составить уравнение прямой, проходящей через точку $A(3;\ -2)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{n}=(-5;\ 3)$.

Решение. 1^0. Выбираем точку $M(x;\ y)\in l$.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{AM}=(x-3;\ y+2)$.

3^0. Направляющий вектор $\vec{n}=(-5;\ 3)$.

4^0. Запишем уравнение прямой:

$$\frac{x-3}{-5}=\frac{y+2}{3},$$

откуда $3x-9=-5y-10$; $3x+5y+1=0$ — искомое уравнение в общем виде.

89. Треугольник задан точками $A(5;\ 2)$, $B(-1;\ -4)$, $C(-5;\ -3)$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку B параллельно AC.

Решение. 1^0. Выбираем точку $M(x;\ y)$.

2^0. Найдем вектор $\overrightarrow{BM}=(x+1;\ y+4)$.

3^0. Найдем вектор, заданный точками $A(5;\ 2)$ и $C(-5;\ -3)$; имеем $\overrightarrow{AC}=(-10;\ -5)$.

4^0. Так как искомая прямая и прямая AC параллельны, то их направляющие векторы коллинеарны. Запишем искомое уравнение прямой:

$$\frac{x+1}{-10}=\frac{y+4}{-5},$$

откуда $x+1=2y+8$; $x-2y-7=0$ — искомое уравнение в общем виде.

90. Составить уравнение средней линии трапеции, заданной точками $A(2;\ 1)$, $B(1;\ 4)$, $C(3;\ 6)$, $D(6;\ 5)$.

91. Составить уравнение средней линии треугольника с вершинами $A(-1;\ 2)$, $B(5;\ 3)$, $C(4;\ -2)$.

7. Уравнение прямой, проходящей через две данные точки

Пусть заданы две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$. Через них можно провести прямую и притом только одну (рис. 52). Для составления ее уравнения воспользуемся общим правилом:

1^0. Выберем на прямой l точку $M(x;\ y)$.

2^0. Найдем координаты вектора $\overrightarrow{M_1M}$: $\overrightarrow{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$.

3^0. Найдем координаты направляющего вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$: $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$.

4^0. Векторы $\overrightarrow{M_1M}$ и $\overrightarrow{M_1M_2}$ коллинеарны, так как лежат на одной прямой; значит, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \qquad (3)$$

92. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $A(2;\ 3)$ и $B(7;\ 5)$.

Решение. Подставив в формулу (3) координаты данных точек, получим

$$\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-3}{5-3},$$

откуда

$$\frac{x-2}{5}=\frac{y-3}{2};\ 2x-4=5y-15;\ 2x-5y+11=0$$

— искомое уравнение прямой.

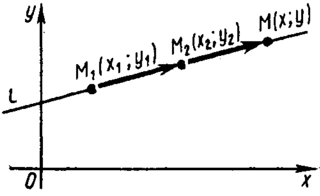


Рис. 52

93—98. Составить уравнения прямых, заданных двумя точками:

93. $A(1;\ 3)$, $B(4;\ 1)$.

94. $C(-1;\ 5)$, $D(3;\ -7)$.

95. $M(-3;\ 0)$, $N(0;\ 5)$.

96. $P(0;\ 0)$, $Q(-3;\ 5)$.

97. $A(3;\ -5)$, $B(3;\ 7)$.

98. $C(7;\ -1)$, $D(-1;\ -1)$.

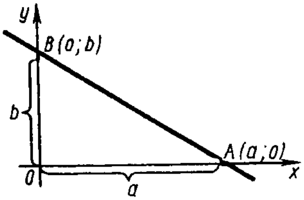


Рис. 53

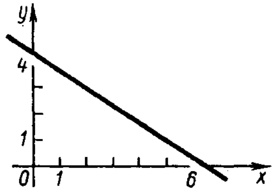


Рис. 54

99. Составить уравнения сторон треугольника с вершинами $A(-1;\ 2)$, $B(5;\ 3)$, $C(4;\ -2)$.

100. Составить уравнения диагоналей квадрата $ABCD$, заданного точками $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 2)$, $C(5;\ -1)$, $D(2;\ -2)$.

101. Составить уравнения медиан треугольника ABC, где $A(7;\ 0)$, $B(3;\ 6)$; $C(-1;\ 1)$.

8. Уравнение прямой в отрезках

Пусть задана прямая l, отсекающая на оси абсцисс отрезок, равный a, а на оси ординат — отрезок, равный b (рис. 53). Точки пересечения прямой с осями координат таковы: $A(a;\ 0)$; $B(0;\ b)$. Составим уравнение прямой, проходящей через эти две точки:

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0};\quad \frac{x-a}{-a}=\frac{y}{b};\quad \frac{x}{-a}+1=\frac{y}{b}.$$

Итак, искомое уравнение имеет вид

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (4)$$

Уравнением прямой в отрезках удобно пользоваться для построения прямой. Поэтому при необходимости уравнение прямой приводят к виду уравнения в отрезках и строят прямую.

102. Построить прямую: а) $2x+3y-12=0$; б) $5x-3y=-15$.

Р е ш е н и е. а) Преобразуем уравнение:

$$2x+3y=12;\ \frac{x}{6}+\frac{y}{4}=1.$$

Значит, на оси абсцисс откладываем 6 единиц, а на оси ординат 4 единицы и проводим прямую (рис. 54).

б) Преобразуем уравнение:

$$5x-3y=-15;\ -\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1.$$

Отложим на оси абсцисс -3 единицы, а на оси ординат 5 единиц и проведем прямую (рис. 55).

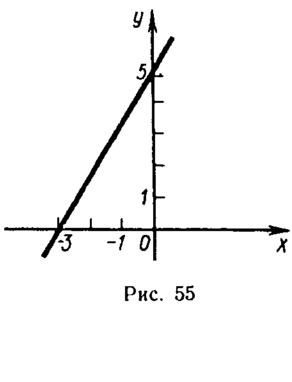


Рис. 55

103. Построить прямые: $2x+5y+20=0$; $3x-4y-12=0$; $6x+y-3=0$; $x-8y+4=0$.

§ 6. Исследование взаимного расположения прямых

Параллельность прямых
Перпендикулярность прямых
Угол между двумя прямыми

1. Параллельность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ (l_1) и $A_2x+B_2y+C_2=0$ (l_2). Нормальные векторы этих прямых имеют такие координаты: $\vec{n}_1=(A_1;\ B_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;\ B_2)$. Если $l_1 \| l_2$, т. е. прямые параллельны, то их нормальные векторы коллинеарны. Это означает, что одноименные координаты векторов пропорциональны:

$$A_1/A_2=B_1/B_2. \tag{1}$$

Отсюда получаем

$$A_1/B_1=A_2/B_2, \text{ или } -A_1/B_1=-A_2/B_2.$$

Так как $-A_1/B_1=k_1$ и $-A_2/B_2=k_2$, то

$$k_1=k_2. \tag{2}$$

Итак, *две прямые параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при соответствующих координатах пропорциональны* ($A_1/A_2=B_1/B_2$) *или когда угловые коэффициенты прямых равны между собой* ($k_1=k_2$).

104. Указать, какая пара уравнений соответствует параллельным прямым:

а) $2x-3y+5=0$, $6x-9y+1=0$; б) $6x-3y-1=0$, $2x-5y+5=0$; в) $6x+10y+1=0$, $3x+5y=0$.

Решение. Составим пропорции из коэффициентов при одноименных координатах. Имеем:

а) $2/6=(-3)/(-9)$; б) $6/2\neq 3/(-5)$; в) $6/3=10/5$.

Поскольку у первой и третьей пар уравнений коэффициенты пропорциональны, эти уравнения соответствуют параллельным прямым. Коэффициенты второй пары уравнений не пропорциональны; следовательно, соответствующие прямые не параллельны.

105. Установить, параллельны ли прямые:

а) $5x-y+4=0$, $10x-2y+1=0$; б) $3x+2y+3=0$, $3x-2y-1=0$;

в) $6x-3y+7=0$, $2x+y+1=0$; г) $y+5x-3=0$, $10x+2y-7=0$.

2. Перпендикулярность прямых

Пусть на плоскости заданы две прямые $A_1x+B_1y+C_1=0$ (l_1) и $A_2x+B_2y+C_2=0$ (l_2). Тогда координаты их нормальных векторов таковы: $\vec{n}_1=(A_1;\ B_1)$, $\vec{n}_2=(A_2;\ B_2)$. Если $l_1 \perp l_2$, то скалярное произведение этих векторов должно быть равно нулю, т. е. $\vec{n}_1\vec{n}_2=0$, откуда

$$A_1A_2+B_1B_2=0. \tag{3}$$

После преобразований получим

$$\frac{A_1A_2}{B_1B_2}+1=0;\quad \frac{A_1}{B_1}\cdot\frac{A_2}{B_2}=-1;$$

учитывая, что $-A_1/B_1=k_1$, $-A_2/B_2=k_2$, находим $k_1k_2=-1$, т. е.

$$k_2=-1/k_1. \tag{4}$$

Итак, *две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда коэффициенты при одноименных координатах удовлетворяют равенству $A_1A_2+B_1B_2=0$ или когда угловые коэффициенты этих прямых обратны по величине и противоположны по знаку* ($k_2=-1/k_1$).

106. Указать, какая пара уравнений соответствует перпендикулярным прямым:

а) $2x+3y-7=0$, $3x-2y=0$; б) $5x-2y+1=0$, $4x+10y-1=0$; в) $6x-4y+7=0$, $8x-12y-1=0$.

Решение. Составим равенства из коэффициентов при одноименных координатах:

а) $2\cdot3+3\cdot(-2)=0$; $6-6=0$;
б) $5\cdot4-2\cdot10=0$; $20-20=0$;
в) $6\cdot8-4\cdot(-12)=0$; $48+48\neq0$.

Следовательно, две первые пары уравнений соответствуют взаимно перпендикулярным прямым, а уравнения третьей пары — не перпендикулярным прямым.

107. Установить, перпендикулярны ли прямые:

а) $2x-y+1=0$, $x-2y+1=0$; б) $3x+2y+17=0$, $2x-3y+8=0$;
в) $5x-y+4=0$, $x+5y-1=0$; г) $5x-3y+1=0$; $15x+9y-7=0$.

108. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной прямой $3x-5y+2=0$.

109. Составить уравнение прямой, проходящей через точку (2; 3) и перпендикулярной прямой $4x+3y-12=0$.

110. Составить уравнение перпендикуляра к отрезку MN, где $M(7;\ 3)$ и $N(-3;\ 2)$, проходящего через его середину.

111. Составить уравнение перпендикуляра к прямой $5x-3y+7=0$, проходящего через точку $(-1;\ 3)$.

3. Угол между двумя прямыми

Углом между двумя прямыми называется величина меньшего из углов, образованных этими прямыми.

Угол между двумя прямыми можно найти по формуле

$$\cos\varphi=\left|\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right|, \qquad (5)$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — нормальные векторы прямых l_1 и l_2.

Эта формула удобна для вычисления угла между прямыми, заданными их уравнениями.

112. Найти угол между прямыми $x+5y-3=0$ и $2x-3y+4=0$.

Решение. Найдем координаты нормальных векторов заданных прямых: $\vec{n}_1=(1;\ 5)$, $\vec{n}_2=(2;\ -3)$. Согласно формуле (5) получим

$$\cos\varphi=\left|\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}\right|=\left|\frac{1\cdot2+5\cdot(-3)}{\sqrt{1+25}\cdot\sqrt{4+9}}\right|=\left|\frac{2-15}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}\right|=$$

$$=\left|\frac{-13}{\sqrt{13}\sqrt{13\cdot2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\varphi=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

113. Найти угол между прямыми $5x+4y-31=0$ и $2y-3x+1=0$.

114. Найти угол между прямыми, если одна из них проходит через точки $M_1(4;\ 2)$ и $N_1(1;\ -7)$, а вторая — через точки $M_2(-1;\ 3)$ и $N_2(8;\ 6)$.

115. Найти угол между прямой $3x+2y+4=0$ и прямой, проходящей через точки $M_1(2;\ -2)$, $M_2(4;\ -3)$.

116. Найти углы треугольника, стороны которого заданы уравнениями $18x+6y-17=0$, $14x-7y+15=0$ и $5x+10y-9=0$.

117. Найти углы треугольника, заданного вершинами $A(-6;\ -3)$; $B(6;\ 7)$, $C(2;\ -1)$.

§ 7. Кривые второго порядка

Уравнение второй степени с двумя переменными
Окружность и ее уравнение
Эллипс и его уравнение
Гипербола и ее уравнение
Парабола и ее уравнение

1. Уравнение второй степени с двумя переменными

Уравнение второй степени с двумя переменными определяет на плоскости кривую второго порядка и притом единственную.

Такое уравнение имеет вид

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0.$$

В этом уравнении коэффициенты могут принимать любые действительные значения при условии, что коэффициенты A, B и C одновременно не равны нулю (так как в противном случае уравнение не будет уравнением второй степени).

Чтобы по условию задачи составить уравнение кривой, заданной множеством точек на плоскости, нужно установить зависимость между координатами x и y произвольной точки, принадлежащей этому множеству, и параметрами (постоянными величинами, заданными в условии задачи) и записать эту зависимость в виде уравнения.

2. Окружность и ее уравнение

Окружностью называется множество всех точек плоскости, равноудаленных от одной точки, называемой центром. Пусть центром окружности является точка $O(a;\ b)$, а расстояние до любой точки $M(x;\ y)$ окружности равно r.

Тогда согласно формуле расстояния между двумя точками имеем

$$|OM|=\sqrt{(x_M-x_O)^2+(y_M-y_O)^2}.$$

Подставив в это выражение координаты точек M и O и расстояние r, получим

$$r=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2},$$

откуда после возведения в квадрат находим

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$

Это каноническое уравнение окружности с центром $O(a;\ b)$ и радиусом r.

118. Составить уравнение окружности с центром $O(3;\ -2)$ и радиусом $r=5$.

Решение. Подставив $a=3$, $b=-2$ и $r=5$ в равенство (1), получим $(x-3)^2+(y+2)^2=25$.

119. Составить уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом r.

Решение. В этом случае $a=0$; $b=0$. Тогда уравнение примет вид $x^2+y^2=r^2$.

120. Составить уравнения окружностей: с центром $(-2;\ -5)$ и радиусом $r=\sqrt{3}$; б) с центром $(-5;\ 0)$ и радиусом $r=3$; в) с центром $(0;\ -7)$ и радиусом $r=2$.

121. Построить окружность $x^2+y^2+6x-4y-3=0$.

Решение. Чтобы построить окружность, необходимо найти ее центр и радиус. Для этого выделим в уравнении полные квадраты, т. е. приведем уравнение к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$. Имеем

$$x^2+y^2+6x-4y-3=0;\ (x^2+6x)+(y^2-4y)=3.$$

Прибавив к обеим частям сумму $9+4$, получим

$$(x^2+6x+9)+(y^2-4y+4)=3+9+4, \text{ т. е. } (x+3)^2+(y-2)^2=16.$$

Из этого уравнения видно, что $a=-3$, $b=2$, $r=4$, т. е. центр окружности — точка $O(-3;\ 2)$, а ее радиус равен 4.

122. Постройте окружности: а) $x^2+y^2-10x-6y-2=0$, б) $x^2+y^2-10x+9=0$; в) $x^2+y^2+8x+7=0$.

3. Эллипс и его уравнение

Эллипсом называется множество точек на плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называемых *фокусами*) есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами.

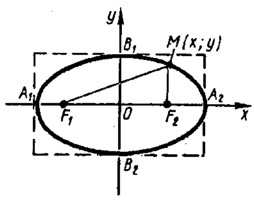
Фокусы эллипса принято обозначать буквами F_1 и F_2, расстояние между фокусами — через $2c$, сумму расстояний от любой точки эллипса до фокусов — через $2a$ $(2a>2c)$.

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{2}$$

где a, b и c связаны между собой равенством $a^2-b^2=c^2$ (или $b^2-a^2=c^2$).

Рассмотрим два основных случая расположения эллипса относительно осей координат (рис. 56, 57). Эти случаи представлены в следующей таблице:



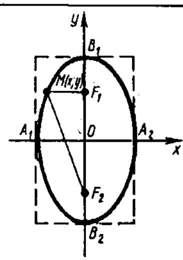


	Рис. 56	Рис. 57
Положение фокусов	$F_1;\ F_2 \in Ox$	$F_1;\ F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1(-c;\ 0)$, $F_2(c;\ 0)$	$F_1(0;\ c)$, $F_2(0;\ -c)$
Соотношение между a и b	$a>b$	$b>a$
Большая ось	$\|A_1A_2\|=2a$	$\|B_1B_2\|=2b$
Малая ось	$\|B_1B_2\|=2b$	$\|A_1A_2\|=2a$
Фокусное расстояние	$\|F_1F_2\|=2c$	$\|F_1F_2\|=2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon=c/a$	$\varepsilon=c/b$
Соотношение между a, b и c	$a^2-b^2=c^2$	$b^2-a^2=c^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами к длине большой оси. Эксцентриситет обозначается буквой ε:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}.$$

Так как по определению $2a>2c$, то эксцентриситет всегда выражается правильной дробью, т. е. $0\leqslant\varepsilon<1$.

Если величина эксцентриситета приближается к единице ($\varepsilon\approx1$), то эллипс сильно вытянут; если же величина эксцентриситета ближе к нулю ($\varepsilon\approx0$), то эллипс имеет более округлую форму. Если эксцентриситет равен нулю, то эллипс вырождается в окружность.

123. Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $2x^2+y^2=32$.

Решение. Приведем уравнение эллипса к каноническому виду (2). Для этого разделим все его члены на 32:

$$\frac{2x^2}{32}+\frac{y^2}{32}=\frac{32}{32};\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{32}=1.$$

Мы видим, что $a^2=16$, $b^2=32$, откуда $a=4$, $b=4\sqrt{2}$.

Так как $b>a$, то фокусы эллипса расположены на оси ординат. Они имеют координаты $F_1(0;\ c)$ и $F_2(0;\ -c)$, где c определяется из соотношения $b^2-a^2=c^2$. Подставив в него значения a и b, получим $32-16=c^2$; $c^2=16$; $c=4$. Итак, фокусами эллипса служат точки $F_1(0;\ 4)$; $F_2(0;\ -4)$.

Далее, находим: большую ось эллипса $2b=8\sqrt{2}$; малую ось $2a=8$; эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{2c}{2b}=\dfrac{8}{8\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}=0{,}705$.

124. Составить каноническое уравнение эллипса, у которого малая ось $2b=6$, а расстояние между фокусами $|F_1F_2|=8$.

Решение. Так как малая ось $2b=6$, то фокусы расположены на оси Ox. Имеем $b=3$, $c=4$. Из соотношения $a^2-c^2=b^2$ находим $a^2=b^2+c^2=9+16=25$, т. е. $a=5$. Итак, каноническое уравнение эллипса имеет вид $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$.

125. Найти координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $16x^2+25y^2=400$.

126. Составить уравнение эллипса, координаты фокусов которого $(-7;\ 0)$ и $(7;\ 0)$, а эксцентриситет $\varepsilon=0{,}28$.

127. Составить уравнение эллипса, фокусы которого лежат на оси ординат, $\varepsilon=0{,}6$ и $2b=10$.

128. Эллипс задан уравнением $\dfrac{x^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$. Найти координаты фокусов эллипса, фокусное расстояние и эксцентриситет.

129. Составить уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(\sqrt{3};\ 0)$ и $(-\sqrt{3};\ 0)$, а большая ось равна $4\sqrt{7}$.

130. Составить уравнение эллипса, проходящего через точки $A(\sqrt{5};\ \sqrt{7})$ и $B(\sqrt{10};\ \sqrt{5})$, если его фокусы лежат на оси абсцисс.

4. Гипербола и ее уравнение

Гиперболой называется множество точек плоскости, разность расстояний от каждой из которых до двух заданных точек (называется *фокусами*) есть величина постоянная. Эта постоянная величина положительна и меньше расстояния между фокусами.

Фокусы гиперболы принято обозначать буквами F_1 и F_2, расстояние между фокусами — через $2c$, постоянную разность между расстояниями от любой точки гиперболы до ее фокусов — через $2a (2a<2c)$.

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ или } \frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1, \tag{3}$$

где a, b, c связаны между собой равенством $a^2+b^2=c^2$.

Рассмотрим два основных случая расположения гиперболы относительно осей координат (рис. 58, 59). Эти случаи иллюстрирует следующая таблица.

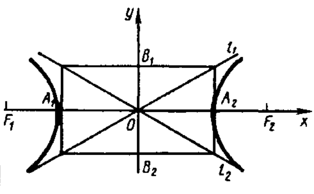


Рис. 58

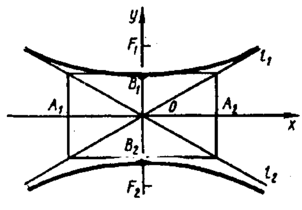


Рис. 59

	Рис. 58	Рис. 59
Положение фокусов	F_1; $F_2 \in Ox$	F_1; $F_2 \in Oy$
Координаты фокусов	$F_1(-c;\ 0)$; $F_2(c;\ 0)$	$F_1(0;\ c)$; $F_2(0;\ -c)$
Действительная ось	$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$	$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$
Мнимая ось	$\lvert B_1B_2\rvert = 2b$	$\lvert A_1A_2\rvert = 2a$
Фокусное расстояние	$\lvert F_1F_2\rvert = 2c$	$\lvert F_1F_2\rvert = 2c$
Эксцентриситет	$\varepsilon = c/a$	$\varepsilon = c/b$
Соотношение между a, b и c	$c^2-a^2=b^2$	$c^2-b^2=a^2$
Уравнение	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$

Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами к длине действительной оси:

$$\varepsilon=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a} \text{ или } \varepsilon=\frac{2c}{2b}=\frac{c}{b}.$$

Так как по определению $2a<2c$, то эксцентриситет гиперболы всегда выражается неправильной дробью, т. е. $\varepsilon>1$.

Прямые l_1 и l_2 (рис. 58, 59) называются *асимптотами;* их уравнения имеют вид

$$y=\pm\frac{b}{a}x. \tag{4}$$

131. Найти координаты фокусов, длины осей, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $16x^2-25y^2=400$.

Решение. Приведем уравнение к каноническому виду (3). Для этого разделим все его члены на 400:

$$\frac{16x^2}{400}-\frac{25y^2}{400}=\frac{400}{400}; \quad \frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1.$$

Из этого уравнения видно, что фокусы гиперболы расположены на оси абсцисс и мы можем записать $a^2=25$, $b^2=16$, т. е. $a=5$, $b=4$. Зная a и b, найдем c: $a^2+b^2=c^2$; $c^2=25+16=41$; $c=\sqrt{41}$.

Итак, фокусами гиперболы являются точки $F_1(-\sqrt{41};\,0)$; $F_2(\sqrt{41};\,0)$; действительная ось гиперболы $2a=10$; мнимая ось $2b=8$; эксцентриситет $\varepsilon=2\sqrt{41}/10=\sqrt{41}/5$; уравнения асимптот $y=\pm(4/5)x$.

132. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси абсцисс, если известно, что эксцентриситет $\varepsilon=1{,}5$, а фокусное расстояние равно 6.

Решение. Так как $|F_1,\ F_2|=6$, то $2c=6$, т. е. $c=3$. Далее, подставив в формулу $\varepsilon=c/a$ известные величины ε и c, получим $1{,}5=3/a$, откуда $a=2$. Зная a и c, из соотношения $c^2=a^2+b^2$ найдем $9=4+b^2$, откуда $b^2=5$.

Итак, каноническое уравнение гиперболы имеет вид $x^2/4-y^2/5=1$.

133. Найти длины осей, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения асимптот гиперболы, заданной уравнением $7x^2-9y^2=63$.

134. Составить каноническое уравнение гиперболы с фокусами на оси Oy, если действительная ось равна $4\sqrt{5}$, а эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}/2$.

135. Составить каноническое уравнение гиперболы, действительная ось которой $2b=10$, а уравнения асимптот имеют вид $y=\pm(5/3)x$.

136. Эксцентриситет гиперболы с фокусами на оси Oy равен 1,4. Составить каноническое уравнение гиперболы, если известно, что $2b=10$.

137. Составить каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой лежат на оси Ox, расстояние между ними равно $10\sqrt{2}$, а уравнения асимптот имеют вид $y=\pm(3/4)x$.

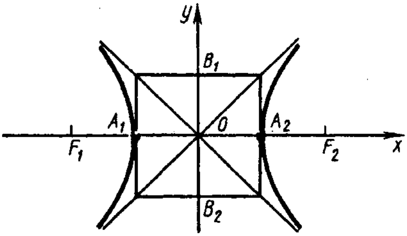


Рис. 60

Равносторонней гиперболой называется гипербола, у которой длина действительной оси равна длине мнимой оси, т. е. $2a=2b$ или $a=b$. Если фокусы такой гиперболы лежат на оси абсцисс (рис. 60), то ее каноническое уравнение имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{a^2}=1 \text{ или } x^2-y^2=a^2.$$

Если фокусы равносторонней гиперболы расположены на оси ординат, то ее каноническое уравнение имеет вид

$$y^2-x^2=a^2.$$

Для равносторонней гиперболы справедливо соотношение $c^2=a^2+a^2=2a^2$, т. е. $c=a\sqrt{2}$.

Найдем эксцентриситет равносторонней гиперболы:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{a\sqrt{2}}{a}, \text{ т. е. } \varepsilon=\sqrt{2}\approx 1{,}41.$$

Уравнения асимптот равносторонней гиперболы записываются в виде $y=\pm x$, т е. асимптотами равносторонней гиперболы являются биссектрисы координатных углов.

138. Составить уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, проходящей через точку $M(4;\ -2)$.

Решение. Так как точка M принадлежит гиперболе, то ее координаты удовлетворяют каноническому уравнению гиперболы:

$$x^2-y^2=a^2;\ 4^2-(-2)^2=a^2;\ a^2=12.$$

Следовательно, искомое уравнение имеет вид $x^2-y^2=12$.

139. Составить уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, проходящей через точку $A(-10;\ 8)$.

140. Составить уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Ox, проходящей через точку $B(-7;\ -3)$.

141. Составить уравнение равносторонней гиперболы с фокусами на оси Oy, проходящей через точку $C(1;\ -3)$.

5. Парабола и ее уравнение

Параболой называется множество точек на плоскости, равноудаленных от заданной точки (называемой *фокусом*) и данной прямой (называемой *директрисой*).

Фокус параболы принято обозначать буквой F, директрису — буквой d, расстояние от фокуса до директрисы — буквой p ($p>0$). Рассмотрим основные случаи расположения параболы относительно осей координат.

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси абсцисс, (рис. 61, 62), имеет вид

$$y^2 = 2px \text{ или } y^2 = -2px. \tag{5}$$

Эти два случая представлены в следующей таблице:

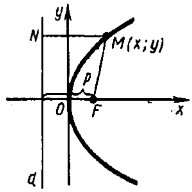


Рис. 61

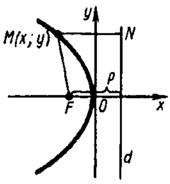


Рис. 62

	Рис. 61	Рис. 62
Положение фокуса	На положительной полуоси Ox	На отрицательной полуоси Ox
Координаты фокуса	$F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$	$F\left(-\frac{p}{2};\ 0\right)$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$y^2 = 2px$	$y^2 = -2px$

Каноническое уравнение параболы, фокус которой расположен на оси ординат (рис. 63, 64), имеет вид

$$x^2 = 2py \text{ или } x^2 = -2py. \tag{6}$$

Эти два случая представлены в таблице:

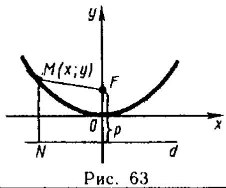


Рис. 63

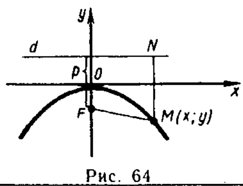


Рис. 64

	Рис. 63	Рис. 64
Положение фокуса	На положительной полуоси Oy	На отрицательной полуоси Oy
Координаты фокуса	$F\left(0;\ \frac{p}{2}\right)$	$F\left(0;\ -\frac{p}{2}\right)$
Уравнение директрисы	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
Уравнение параболы	$x^2 = 2py$	$x^2 = -2py$

142. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 8x$.

Решение. Из данного канонического уравнения параболы следует, что $2p = 8$, т. е. $p = 4$, откуда $p/2 = 2$. Значит, точка $F(2;\ 0)$ — фокус параболы, а $x = 2$ — уравнение ее директрисы.

143. Найти каноническое уравнение параболы и уравнение ее директрисы, если известно, что вершина параболы лежит в начале координат, а фокус имеет координаты $(0;\ -3)$.

Решение. Согласно условию фокус параболы расположен на отрицательной полуоси Oy, т. е. ее уравнение имеет вид $x^2 = -2py$. Так как $-p/2 = -3$, то $p = 6$, откуда $2p = 12$. Итак, уравнение параболы есть $x^2 = -12py$, а уравнение директрисы $y = 3$ или $y - 3 = 0$.

144. Составить уравнение параболы, имеющей вершину в начале координат, симметричной оси Ox и проходящей через точку $A(-3;\ -6)$.

Решение. Из условия заключаем, что уравнение параболы следует искать в виде $y^2 = -2px$. Так как точка A принадлежит параболе, то ее координаты удовлетворяют этому уравнению:

$$36 = -2p(-3);\ 36 = 3 \cdot 2p;\ 2p = 12.$$

Итак, уравнение параболы имеет вид $y^2 = -12x$.

145. Найти каноническое уравнение параболы и уравнение директрисы, если фокус параболы — точка $F(-2;\ 0)$.

146. Парабола задана уравнением $x^2 = -32y$. Найти координаты ее фокуса и уравнение директрисы.

147. Парабола с вершиной в начале координат симметрична оси Oy и проходит через точку $A(-5;\ 2)$. Составить каноническое уравнение параболы.

148. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $y^2 = 24x$.

149. Найти координаты фокуса и уравнение директрисы параболы, заданной уравнением $x^2 - 4y = 0$.

150. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы $x + 3 = 0$.

151. Составить уравнение параболы с вершиной в начале координат, если уравнение ее директрисы $2y + 7 = 0$.

Вопросы и задачи для конспектирования

1. Что называется вектором?
2. Что называется длиной вектора?
3. Какие векторы называются равными?
4. Как сложить два вектора?
5. Как найти разность двух векторов?
6. Как умножить вектор на число?
7. Постройте $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$; $3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - 0{,}5\overrightarrow{AB}$, взяв в качестве $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ два любых неколлинеарных вектора.
8. Какие векторы называются коллинеарными?
9. Как разложить вектор в декартовой системе координат?
10. Что называется базисом?
11. Что называется координатами вектора?

12. Что можно сказать о базисе $(\vec{i}, \vec{j})$?

13. Как найти координаты вектора, заданного двумя точками?

14. Найдите координаты вектора, заданного точками: а) $A(5; -3)$ и $B(-2; 7)$ б) $O(0; 0)$ и $M(7; 2)$.

15. Как найти длину вектора, заданного двумя точками?

16. Найдите длину вектора $\vec{n} = (-12; 5)$.

17. Как вычисляется длина вектора, заданного своими координатами?

18. Найдите длину вектора, заданного точками: а) $A(3; -1)$, $B(7; 0)$; б) $M(0; 16)$, $N(6; 4)$; в) $Q(-1; -2)$, $P(-5; 3)$.

19. Как выполняются сложение и вычитание векторов, заданных своими координатами?

20. Вычислите сумму и разность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN}$, заданных точками $A(3; -1)$, $B(-2; 6)$, $M(0; -3)$, $N(7; -2)$.

21. Как умножить вектор, заданный своими координатами, на число?

22. Даны векторы $\vec{a} = (5; -3)$ и $\vec{b}(-6; 4)$. Найдите $3\vec{a} - 0{,}5\vec{b}$; $5\vec{a} + 3\vec{b}$.

23. Для векторов, заданных точками $A(6; 2)$, $B(1; 3)$, $C(0; -5)$, найдите $0{,}5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AC}$.

24. Каким свойством обладают координаты коллинеарных векторов?

25. Даны векторы $\vec{m} = (-1; 3)$, $\vec{n} = (5; -2)$, $\vec{p} = (3; -9)$, $\vec{q} = (10; -4)$, $\vec{r} = (7; 1)$. Какие из них коллинеарны?

26. Запишите формулы деления отрезка в заданном отношении.

27. Запишите формулы деления отрезка на две равные части.

28. Найдите координаты середины отрезка AB, где $A(5; 3)$, $B(-1; 6)$.

29. Найдите координаты точек, которые делят отрезок, заданный точками $A(-1; 5)$ и $B(6; 3)$, на три равные части.

30. В треугольнике с вершинами $A(2; 7)$, $B(5; -4)$, $C(-3; 2)$ найдите длины сторон и медианы AD.

31. В треугольнике с вершинами $A(2; 7)$, $B(5; -4)$, $C(-3; 2)$ найдите точку пересечения медиан.

32. Что называется скалярным произведением векторов?

33. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{m}$ и $\vec{n}$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 3$, а угол между ними равен $60°$.

34. Как вычисляется скалярное произведение векторов, заданных своими координатами?

35. Вычислите скалярное произведение векторов: а) $\vec{n} = (-3; 5)$ и $\vec{m} = (7; 2)$; б) $\vec{m} = (3; -2)$ и $\vec{n} = (9; -6)$.

36. Какими свойствами обладает скалярное произведение векторов?

37. Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?

38. Чему равно скалярное произведение коллинеарных векторов?

39. Что называется уравнением линии?

40. Лежат ли точки $A(-3; 9)$; $B(2; -1)$, $C(7; 2)$ на линии, заданной уравнением $x^2 - y = 0$?

41. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?

42. Запишите уравнения осей координат.

43. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.

44. Какой координатной оси параллельна прямая, заданная уравнением $x + 5 = 0$? Начертите эту прямую.

45. Какой координатной оси параллельна прямая, заданная уравнением $2y - 8 = 0$? Начертите эту прямую.

46. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.

47. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(5; -3)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a} = (-3; -2)$.

48. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $B(-3; 7)$ и имеющей нормальный вектор $\vec{n} = (2; -4)$.

49. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки $A(3; -8)$ и $B(-1; 2)$.

50. Составьте уравнение прямой, отсекающей 5 единиц на оси Ox и 3 единицы на оси Oy.

51. Составьте уравнения сторон, высоты AE и медианы BD в треугольнике с вершинами $A(3;\ -7)$, $B(-1;\ 4)$, $C(-6;\ -5)$.

52. Сформулируйте условие параллельности прямых.

53. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.

54. Как найти угол между прямыми?

55. Найдите внутренние углы треугольника с вершинами $A(3;\ -7)$, $B(-1;\ 4)$, $C(-6,\ -5)$.

56. Каким уравнением описывается кривая на плоскости?

57. Запишите каноническое уравнение эллипса.

58. Найдите координаты фокусов, длины осей, фокусное расстояние и эксцентриситет эллипса, заданного уравнением $\frac{x^2}{169}+\frac{y^2}{144}=1$.

59. Что называется эксцентриситетом эллипса? Какова его величина?

60. Чему равен эксцентриситет окружности?

61. Запишите каноническое уравнение гиперболы.

62. Найдите координаты фокусов, длины осей и эксцентриситет гиперболы $144x^2-25y^2=3600$.

63. Запишите уравнение равносторонней гиперболы.

64. Запишите каническое уравнение параболы, директрисы параболы.

65. Составьте уравнение параболы, фокус которой имеет координаты $(0;\ -2)$.

66. Составьте уравнение параболы, директриса которой задана уравнением $4x+6=0$.

Ответы

14. а) $\overrightarrow{AB}=(-7;\ 10)$; б) $\overrightarrow{OM}=(7;\ 2)$. **18.** а) $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{17}$; б) $|\overrightarrow{MN}|=6\sqrt{5}$; в) $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{41}$. **20.** $\overrightarrow{AB}=(-5;\ 7)$; $\overrightarrow{MN}=(7;\ 1)$; $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{MN}=(2;\ 8)$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{MN}=(-12;\ 6)$. **22.** $3\vec{a}-0{,}5\vec{b}=(18;\ -11)$; $5\vec{a}+3\vec{b}=(7;\ -3)$. **23.** $\overrightarrow{AB}=(-5;\ 1)$; $\overrightarrow{BC}=(-1;\ -8)$; $\overrightarrow{AC}=(-6;\ -7)$; $0{,}5\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{AC}=(6{,}5;\ -9{,}5)$. **25.** $\vec{m}$ и $\vec{p}$, $\vec{n}$ и $\vec{q}$. **28.** $C(2;\ 4{,}5)$. **29.** $C(4/3;\ 13/3)$; $D(11/3;\ 11/3)$. **30.** $|AD|=\sqrt{65}$; $|AB|=\sqrt{130}$; $|BC|=10$; $|AC|=5\sqrt{2}$. **31.** $M(4/3;\ -2)$. **33.** $\vec{m}\vec{n}=7{,}5$. **35.** а) $\vec{n}\vec{m}=-11$; б) $\vec{m}\vec{n}=39$. **40.** A — да; B и C — нет. **44.** Оси Oy. **45.** Оси Ox. **47.** $2x-3y-19=0$. **48.** $2x-4y+34=0$. **49.** $5x+2y+1=0$. **50.** $x/5+y/3=1$. **51.** $11x+4y-5=0$; $9x-5y+29=0$; $2x-9y+57=0$; $20x-y+24=0$; $9x-5y-63=0$. **55.** $\arccos 0{,}6555$; $\arccos 0{,}5370$; $\arccos 0{,}2840$. **58.** $F_{1,2}(\pm5;\ 0)$; $2a=26$; $2b=24$; $2c=10$; $\varepsilon=5/13$. **62.** $F_{1,2}(\pm13;\ 0)$; $2a=24$; $2b=10$; $\varepsilon=13/12$. **65.** $x^2=-8y$. **66.** $y^2=6x$.

Контрольное задание

Вариант 1

1. Найдите длину вектора $\vec{c}=3\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=(2;\ -7)$, $\vec{b}=(-3;\ 6)$.
2. Составьте уравнение медианы BD и высоты AF в треугольнике с вершинами $A(1;\ 2)$, $B(6;\ 4)$, $C(7;\ -2)$.
3. Найдите угол между векторами $\vec{a}=(-3;\ 2)$ и $\vec{b}=(-5;\ -1)$.
4. Составьте уравнение эллипса, фокусы которого имеют координаты $(0;\ -4\sqrt{2})$ и $(0;\ 4\sqrt{2})$, а малая ось равна 14.

Вариант 2

1. Найдите длину вектора $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$, если $\vec{a}=(5;\ -8)$, $\vec{b}=(7;\ 3)$.
2. Составьте уравнение средней линии треугольника с вершинами $A(5;\ -2)$, $B(1;\ 6)$, $C(-3;\ 2)$ параллельной стороне BC.

3. Найдите точку пересечения прямых $3x+2y-1=0$ и $2x-y-17=0$.

4. Составьте уравнение равносторонней гиперболы, фокусы которой имеют координаты $(-3\sqrt{2};\ 0)$ и $3\sqrt{2};\ 0)$.

Ответы

Вариант 1. **1.** $|\vec{c}|=9$. **2.** $2x-y-8=0$; $x-6y+11=0$. **3.** $\varphi=45°$. **4.** $x^2/49+y^2/81=1$. Вариант 2. **1.** $|\vec{c}|=13$. **2.** $x-y-1=0$. **3.** $M(5;\ -7)$. **4.** $x^2-y^2=9$.